CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Vol. I

R. COURANT
Professor de Matemática da Universidade de New York

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

I VOLUME

Tradução de

ALBERTO NUNES SERRÃO
Engenheiro Civil
Docente livre da cadeira de Cálculo Infinitesimal, Geometria Analítica e Noções de Nomografia da Escola Nacional de Engenharia
Professor de Matemática do Colégio Pedro II

E

RUY HONÓRIO BACELAR
Engenheiro Civil

1.ª EDIÇÃO
3.ª impressão

EDITÔRA GLOBO
Rio de Janeiro - Pôrto Alegre - São Paulo

Título do original alemão:

Vorlesoungen über Differential - und Integralrechnung

Título da edição em língua inglêsa que serviu de base à tradução brasileira:

Differencial and Integral Calculus

1.ª EDIÇÃO

1.ª impressão — abril de 1951
2.ª   "   — abril de 1958

1963

PREFÁCIO DA EDIÇÃO INGLÊSA

Quando colegas americanos insistiram comigo para que publicasse um aedição inglêsa das minhas lições de cálculo diferencial e integral, hesitei a princípio. Verifiquei que, devido às diferenças entre os métodos de ensino do Cálculo na Alemanha, Inglaterra e América, uma simples tradução estava fora de cogitação, e que seriam precisas alterações fundamentais a fim de atender às necessidades dos estudantes de idioma inglês.

Minhas dúvidas, contudo, foram resolvidas quando encontrei o competente colega, professor E. J. McShane, da Universidade da Virgínia, que estava à altura não só de fazer a tradução, mas também — após entendimento pessoal que com êle mantive — de efetuar as alterações e melhoramentos necessários para a edição inglêsa.

Afora muitas questões de minúcias, as principais alterações foram as seguintes: (1) a edição inglêsa contém um grande número de exemplos classificados; (2) a divisão da matéria dos dois volumes difere algo da que se encontra no original alemão. Além da exposição detalhada da teoria das funções de uma variável, o presente volume apresenta (no capítulo X) um bosquejo da diferenciação e integração das funções de diversas variáveis. O segundo volume trata inteiramente das funções de diversas variáveis independentes e inclui elementos de cálculo vectorial. Há, também, discussão mais sistemática das equações diferenciais e um apêndice sôbre os fundamentos da teoria dos números reais.

O primeiro volume contém a matéria para um curso de cálculo elementar, enquanto o segundo é mais avançado. No primeiro volume, entretanto, há muitos assuntos que podem ser omitidos num curso inicial. Estas seções, destinadas aos estudantes que desejam penetrar mais profundamente na teoria, foram reunidas nos apêndices dos diversos capítulos, de modo que o principiante poderá estudar a matéria, omitindo ou deixando para mais tarde, sem inconveniente algum, a leitura dêstes apêndices.

A publicação dêste livro em inglês sòmente foi possível graças à generosidade do editor alemão Julius Springer, de Berlim, a quem desejo exprimir os meus mais cordiais agradecimentos. Igualmente agradeço a Blackie and Son, Ltd., que, a despeito das dificuldades atuais, empreenderam a publicação desta edição. Aos componentes da sua administração técnica, pelo excelente trabalho seu, e aos editôres de matemática, especialmente a Miss W. M. Deans, que livrou o Prof. McShane e a mim mesmo de grande parte da responsabilidade da preparação dos manuscritos para impressão e que fêz a revisão das provas, a minha gratidão. Sou, igualmente, grato a muitos amigos e colegas, principalmente ao Professor McClenon, do Grinnel College, de Iowa, a cujo encorajamento se deve esta edição; a Miss Margaret Kennedy, do Newnham College de Cambridge, e ao Dr. Fritz John, que cooperaram com os editôres na revisão das provas.

R. COURANT.

CAMBRIDGE, INGLATERRA.
Junho de 1934.

PREFÁCIO DA SEGUNDA EDIÇÃO INGLÊSA

Esta segunda edição difere da primeira, principalmente, pela melhor escolha e disposição dos exemplos, pelo acréscimo de muitos exercícios novos no fim do livro, e pela inclusão de matéria suplementar sôbre equações diferenciais.

R. COURANT.

NEW ROCHELLE, N. Y.
Junho de 1937.

ÍNDICE

APÊNDICE

Capítulo V

APLICAÇÕES

APÊNDICE

Capítulo VI

TEOREMA DE TAYLOR E REPRESENTAÇÃO APROXIMADA DAS FUNÇÕES POR MEIO DE POLINÔMIOS

APÊNDICE

Capítulo VII

MÉTODOS NUMÉRICOS

APÊNDICE

CAPÍTULO VIII

SÉRIES INFINITAS E OUTROS PROCESSOS-LIMITES

APÊNDICE

CAPÍTULO IX

SÉRIES DE FOURIER

APÊNDICE

CAPÍTULO X

ESBÔÇO DA TEORIA DAS FUNÇÕES DE DIVERSAS VARIÁVEIS

OBSERVAÇÕES INICIAIS

Quando o estudante entra, pela primeira vez, em contato com a matemática chamada superior, pode imaginar que existe certa descontinuidade entre a matemática secundária e a universitária. Êste sentimento repousa, em última instância, sôbre algo mais do que as circunstâncias históricas que fizeram com que o ensino universitário diferisse tão profundamente do ensino ginasial. A verdadeira *natureza* da matemática superior, ou melhor, da matemática moderna, que se desenvolveu durante os últimos três séculos, distingue-a da matemática elementar, cuja matéria de ensino, tomada quase diretamente da matemática dos antigos gregos, dominava inteiramente, até há pouco, os programas escolares.

A característica mais notável da matemática elementar é a sua íntima associação com a *geometria*. Mesmo quando a matéria transpõe as fronteiras da geometria e entra no reino da aritmética, as idéias fundamentais ainda permanecem geométricas. Outro aspecto da matemática dos antigos é, talvez, a sua tendência para concentrar-se nos casos particulares. Fatos que hoje em dia consideramos como casos especiais de fenômenos gerais, são expostos, confusamente, sem qualquer relação visível entre si. A associação íntima com as idéias geométricas e a importância que empresta a sutilezas particulares confere, à matemática dos antigos, um encanto todo particular. No início da idade moderna, tendências diversas imprimiram um progresso definitivo à matemática, atuando como estímulo para uma grande expansão da matéria, a qual, a despeito dos progressos feitos nos detalhes, marcara passo, em outro sentido, durante séculos.

A tendência fundamental de tôda a matemática moderna consiste na substituição das discussões isoladas dos casos particulares por *métodos* gerais cada vez mais sistemáticos. É possível que tal processo nem sempre considere com inteira justiça os aspectos individuais dos casos particulares, mas, graças à sua extensão e generalidade, sugere grande abundância de novos resultados. Além disso, o conceito de número e os métodos analíticos ocupam posições cada vez mais independentes, sobrepujando inteiramente as idéias geométricas. Esta nova orientação para o desenvolvimento da matemática, sob diversos aspectos, é mostrada de maneira mais clara no surgimento da geometria analítica, cujo progresso se deve, principalmente, a Fermat e a Descartes, e do cálculo diferencial e integral, que geralmente se considera como criado por Newton e Leibnitz.

Os três séculos de existência da matemática moderna viram progressos tão importantes, não só na matemática pura, mas, também, na imensa variedade de suas aplicações à ciência e à engenharia, que as suas idéias fundamentais e, sobretudo, o conceito de função, se tornaram gradualmente conhecidos e, eventualmente, foram incluídos nos próprios programas secundários.

O meu objetivo, ao escrever êste livro, foi apresentar e desenvolver os pontos mais importantes do cálculo diferencial e integral de tal maneira, que, ao concluí-lo, o leitor, embora não tenha tido antes qualquer conhecimento de matemática superior, esteja bem preparado, por um lado, para o estudo dos fundamentos da matéria e dos seus mais adiantados ramos, e, por outro, para a manipulação do cálculo nos vários domínios onde o mesmo tem aplicação.

Gostaria de prevenir o leitor, especialmente, contra o perigo que se origina da descontinuidade mencionada no parágrafo inicial. O ponto de vista da matemática secundária pode tentar alguém a deter-se nos detalhes, perdendo, assim, a visão das relações gerais e dos métodos sistemáticos. Por outro lado, do ponto de vista "superior", há o perigo oposto, que consiste em pôr de lado as minúcias concretas

ficando-se completamente desamparado quando se defrontam os casos mais simples de dificuldade individual, porque no mundo subjetivo das idéias gerais esquecemo-nos de como ajustar-nos firmemente à realidade objetiva. O leitor deve encontrar o caminho por si mesmo para sair dêste dilema. E sòmente será bem sucedido excogitando, repetidamente, casos particulares, e adquirindo segurança na aplicação dos princípios gerais às ocorrências individuais que surgirem. Nisto consiste a tarefa principal de quem deseja progredir no estudo da Ciência.

Capítulo I

INTRODUÇÃO

Além da idéia de número, o cálculo diferencial e integral é baseado em dois conceitos fundamentais de importância decisiva. São êles os conceitos de *função* e de *limite*. Na verdade, tais conceitos podem ser reconhecidos aqui e ali, na matemática dos antigos, mas foi sòmente a matemática moderna que expôs completamente o seu significado e o seu caráter essencial. Neste capítulo inicial procuraremos expor êstes conceitos da maneira mais simples e clara possível.

1. A continuidade dos números

A questão referente à natureza real dos números é das que interessam mais aos filósofos do que aos matemáticos, e aquêles já se ocuparam muito com ela. Felizmente, os estudantes de matemática podem dispensar os estudos preliminares sôbre a natureza essencial do conceito de número, do ponto de vista da teoria do conhecimento, e isto concorre para que a matemática seja conservada cuidadosamente afastada dos conflitos entre as opiniões filosóficas. Admitiremos, pois, como dados, os números e, em primeiro lugar, os números naturais 1, 2, 3, ..., assim como consideraremos conhecidas as regras com as quais operamos sôbre êstes números [1]. Lembraremos apenas, em breves linhas, a teoria que permitiu o desenvolvimento do conceito de número inteiro e positivo (números naturais).

(1) Estas regras são: Primeira: $(a + b) + c = a + (b + c)$. Isto é, se adicionarmos à soma de dois números a e b, um terceiro número c, obteremos o mesmo resultado que se somarmos a à soma de b e c. (Esta é a denominada lei associativa da adição.) Segunda: $a + b = b + a$ (lei comutativa da adição). Terceita: $(ab)c = a(bc)$ (lei associativa da multiplicação). Quarta: $ab = ba$ (lei comutativa da multiplicação). Quinta: $a(b + c) = ab + ac$ (lei distributiva da multiplicação).

1. O conjunto dos números racionais e a necessidade de sua ampliação.

No domínio dos números naturais, as operações fundamentais de adição e de multiplicação podem sempre ser efetuadas, sem restrição; isto é, a soma ou o produto de dois números naturais é sempre um número natural. As operações inversas das precedentes, subtração e divisão, porém, nem sempre podem ser efetuadas no domínio dos números naturais. Devido a isto, os matemáticos, há muito tempo já, foram obrigados a inventar o número 0, os números negativos e as frações positivas e negativas. A totalidade de todos êstes números é usualmente denominada a classe dos *números racionais*, visto todos êles serem obtidos da mesma unidade, pelo emprêgo das "operações racionais de cálculo", adição, multiplicação, subtração e divisão.

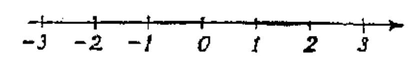


Fig. 1.—O eixo dos números

Em geral, os números são representados, gràficamente, pelos pontos de uma linha reta, denominada "eixo dos números", tomando-se um ponto arbitrário da linha como origem ou ponto zero, e um outro ponto, igualmente arbitrário, como ponto um. A distância entre êstes dois pontos (comprimento do *intervalo unitário*) serve, então, como escala, com a qual determinaremos um ponto para cada número racional, positivo ou negativo, sôbre o eixo referido. É costume marcar os números positivos para a direita e os negativos para a esquerda da origem (fig. 1). Se, como é usual, definirmos o valor absoluto (também chamado valor numérico ou módulo) $|a|$ de um número a, como sendo o próprio a quando $a \geqq 0$ (1), e sendo $-a$ quando $a < 0$, $|a|$ indica a distância, sôbre o eixo dos números, do ponto considerado à origem.

A representação geométrica dos números racionais por meio de pontos sôbre o eixo dos números, sugere uma importante propriedade que, em geral, é enunciada da seguinte forma: o conjunto dos números *racionais é denso.* Isto significa que em qualquer intervalo do eixo númerico, tão pequeno quanto se queira, há sempre números racionais. Geomètricamente, quer dizer que no segmento do eixo numérico limitado por dois pontos racionais quaisquer, tão próximos quanto se desejar, há sempre pontos correspondentes a números racionais. A

(1) O sinal $\geqq$ indica que deve ser usado o sinal $>$ ou o sinal $=$. O mesmo fica estabelecido para os sinais $\pm$ e $\mp$ que serão empregados posteriormente.

noção de densidade dos números racionais torna-se clara se partirmos do fato de que os números $\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots$ ficam cada vez menores e aproximam-se de zero à medida que n cresce. Se dividirmos o eixo dos números em partes iguais de comprimento $1/2^n$, começando na origem, os pontos extremos $\frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}, \frac{3}{2^n}, \ldots$ dêstes intervalos representam números racionais da forma $m/2^n$; neste caso, ainda, temos o número n à nossa disposição. Se agora fixarmos um intervalo tão pequeno quanto quisermos, sôbre o eixo dos números, sòmente precisamos escolher n tão grande que $1/2^n$ seja menor que o comprimento do intervalo. Desta maneira os intervalos da subdivisão efetuada são bastante pequenos para que possamos afirmar que, no mínimo, um dos pontos da subdivisão $m/2^n$ está contido nêle.

Todavia, a despeito dessa propriedade de densidade, os números racionais não são suficientes para representar *todos* os pontos do eixo dos números. Os matemáticos gregos já haviam reconhecido que há intervalos cujos comprimentos não podem ser representados por números racionais, em comparação com um segmento linear de comprimento unitário; são os chamados segmentos incomensuráveis com a unidade. Assim, por exemplo a hipotenusa de um triângulo retângulo isósceles, com catetos iguais à unidade de comprimento, é incomensurável com a mesma unidade. Pelo teorema de Pitágoras, o quadrado dêste comprimento l, deveria ser igual a 2. Mas, se l fôsse um número racional, por conseqüência igual a p/q, onde p e q são inteiros e diferentes de 0, teríamos $p^2 = 2q^2$. Admitimos que p e q não têm fatôres comuns, pois, se os tivessem, êles poderiam ser reduzidos de início. De acôrdo com a equação acima, p^2 é um número par e o próprio p o deve ser, isto é, $p = 2p'$. Substituindo êste valor teremos $4p'^2 = 2q^2$, ou $q^2 = 2p'^2$; conseqüentemente q^2 é par, e q também o deve ser. Os números p e q sendo ambos pares, devem ter o fator comum 2, o que contraria a hipótese de serem primos entre si. Assim, a hipótese de que a hipotenusa pudesse ser representada pela fração p/q leva a contradição, sendo, portanto, falsa.

O raciocínio acima, que é um exemplo característico de "prova indireta", mostra que o símbolo $\sqrt{2}$ não pode corresponder a nenhum número racional. Vemos, pois, que se insistirmos em que cada ponto do eixo dos números tenha um número correspondente, uma vez fixado

o intervalo unitário, seremos forçados a expandir o domínio dos números racionais pela introdução de novos números "irracionais". O conjunto de números racionais e irracionais, no qual a cada ponto do eixo corresponde um só número e a cada número corresponde um só ponto sôbre o eixo, é denominado conjunto dos *números reais* [1].

2. Números reais e decimais infinitas.

A exigência da correspondência de um ponto do eixo a cada número real nada indica, *a priori*, sôbre a possibilidade de calcular com êstes números, do mesmo modo que com os números racionais. Estabeleceremos o direito de proceder assim, demonstrando que o que foi exigido é equivalente ao seguinte fato: a totalidade de todos os números reais é representada pela totalidade de todos os números decimais finitos e infinitos.

Inicialmente recordaremos, o que é conhecido da matemática elementar, que qualquer número racional pode ser representado por uma decimal finita ou por uma dízima periódica; inversamente, tôda a decimal dêsse tipo representa um número racional. Mostraremos que a cada ponto do eixo dos números podemos atribuir uma única decimal determinada (geralmente infinita), de modo a podermos representar tanto os pontos como os números irracionais por decimais infinitas. (De acôrdo com esta observação, os números irracionais serão representados por decimais infinitas, não periódicas, por exemplo, 0,101 101 110...).

Suponhamos que os pontos correspondentes aos inteiros estejam indicados sôbre o eixo dos números. Tais pontos subdividem o eixo em intervalos ou segmentos de comprimento 1. Na exposição que segue, diremos que um ponto do eixo pertence a um intervalo, quando estiver no seu interior ou fôr um dos seus pontos extremos. Seja P um ponto arbitrário do eixo dos números. De acôrdo com o que dissemos acima, êste ponto pertencerá a um ou a dois intervalos, se fôr um ponto de divisão. Se convencionarmos que no segundo caso escolheremos o intervalo que se encontra à direita, teremos, em qualquer hipótese, um intervalo com os pontos extremos g e $g + 1$, ao qual o ponto P pertence, sendo g um número inteiro. Dividiremos, agora, êste intervalo em 10 subintervalos iguais, por meio dos pontos cor-

[1] Assim chamam-se para se distinguirem do conjunto dos números complexos, obtidos por meio de uma outra extensão.

respondentes aos números $g + \frac{1}{10}$, $g + \frac{2}{10}$, $\dots$, $g + \frac{9}{10}$, e numeraremos tais subintervalos 0, 1, 2, $\dots$, 9, na ordem natural, da esquerda para a direita. O subintervalo a terá, então, os pontos extremos $g + \frac{a_1}{10}$ e $g + \frac{a_1}{10} + \frac{1}{10}$. O ponto P deverá estar contido num dêsses subintervalos. (Se P fôr um dos novos pontos de divisão, pertencerá a dois intervalos consecutivos; como no caso anterior, escolheremos o da direita.) Denominaremos o intervalo assim determinado, por a_1. Os seus pontos extremos corresponderão aos números $g + \frac{a_1}{10}$ e $g + \frac{a_1}{10} + \frac{1}{10}$. Podemos, novamente, dividir êste subintervalo em dez partes iguais, determinando aquela que contém P. Como já fizemos antes, se P pertencer a dois intervalos, adotaremos o da direita. Obteremos, assim, um intervalo com os pontos extremos $g + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2}$ e $g + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{1}{10^2}$, onde a_2 é um dos dígitos 0, 1, $\dots$, 9. Subdividiremos êste subintervalo e continuaremos repetindo o processo. Após n operações, chegaremos a um subintervalo contendo P, com o comprimento $1/10^n$, cujos pontos extremos correspondem aos números

$$g + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n}{10^n} \text{ e } g + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} \dots + \frac{a_n}{10^n} + \frac{1}{10^n}.$$

Nesta expressão cada a representa algum dos números 0, 1, $\dots$, 9. Mas

$$\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n}{10^n}$$

é a fração decimal $0{,}a_1a_2\dots a_n$. Os pontos extremos do intervalo podem, portanto, também ser escritos sob a forma

$$g + 0{,}a_1a_2\dots a_n \text{ e } g + 0{,}a_1a_2\dots a_n + \frac{1}{10^n}.$$

Se imaginarmos o processo acima repetido indefinidamente, obteremos uma *decimal infinita* $0{,}a_1a_2\dots$, que tem o seguinte significado. Interrompendo a decimal em uma ordem qualquer, digamos na enegésima, o ponto P estará no intervalo de comprimento $\frac{1}{10^n}$, cujos pontos extremos (pontos de aproximação) são

$$g + 0{,}a_1a_2\dots a_n \text{ e } g + 0{,}a_1a_2\dots a_n + \frac{1}{10^n}.$$

Em particular, o ponto correspondente ao número racional $g+0,a_1a_2...a_n$ encontrar-se-á arbitràriamente próximo de P, desde que n seja suficientemente grande. Por esta razão os pontos $g+0,a_1a_2\ldots a_n$, são denominados pontos de aproximação. *Podemos, pois, afirmar que a decimal infinita* $g+0,a_1a_2\ldots$ *é o número real correspondente ao ponto* P.

Queremos salientar a *hipótese fundamental* de que podemos calcular, na forma habitual, tanto com os números reais, como com as frações decimais. É possível demonstrá-lo empregando, sòmente, as propriedades dos números inteiros como ponto de partida. Esta prova, porém, não é tarefa fácil; e antes de permitir que nosso progresso sofra embaraços logo de início, preferimos admitir que as regras comuns de cálculo se aplicam aos números reais como um axioma, sôbre o qual basearemos todo o cálculo diferencial e integral.

Inserimos aqui uma observação sôbre a possibilidade de, em certos casos, podermos escolher o intervalo do esquema do desenvolvimento acima, de *duas* maneiras. Da construção deduz-se que os pontos de divisão obtidos no processo repetido de subdivisão, e sòmente êstes pontos, podem ser representados pelas frações decimais finitas $g + 0,a_1a_2\ldots a_n$. Suponhamos que o ponto P apareça, primeiramente, como ponto de divisão na n subdivisão. De acôrdo com o que estabelecemos, escolhemos, na fase de ordem n da subdivisão, o intervalo à direita de P. Nas subdivisões seguintes devemos escolher um subintervalo dêste intervalo. Um intervalo de tal espécie, porém, deve conter P como ponto extremo da esquerda. Nestas condições, em tôdas as fases subseqüentes da subdivisão, devemos escolher o primeiro subintervalo, isto é, aquêle que começa por 0. Então, a decimal infinita que corresponde a P é $g + 0,a_1a_2\ldots a_n000\ldots$. Se, por outro lado, tivéssemos escolhido na fase de ordem n o intervalo da esquerda que contém P, então em todos os outros estágios posteriores da subdivisão, deveríamos escolher os subintervalos mais afastados para a direita, os quais têm 9 como ponto extremo da direita. Obteríamos, assim, um desenvolvimento decimal para P em que todos os dígitos, a partir de $(n + 1)$, são noves. A dupla possibilidade de escolha na construção que imaginamos corresponde, portanto, ao fato de que, por exemplo, o número $\frac{1}{4}$ pode ser escrito $0,250\,000\ldots$ e $0,249\,999\ldots$.

3. Expressão dos números em sistemas de base diferente da decimal.

Na representação dos números reais atribuímos um papel especial ao número 10, visto termos subdividido cada intervalo em dez partes iguais. A única razão para tal se encontra no uso generalizado do sistema decimal. Poderíamos, de modo análogo, ter considerado p subintervalos iguais, onde p é um número inteiro arbitrário, superior à unidade. Teríamos, neste caso, obtido uma expressão da forma

$g + \frac{b_1}{p} + \frac{b_2}{p^2} + \ldots$, onde b é um dos números $0, 1, \ldots, p-1$. Neste caso, novamente, os números racionais, e sòmente êles, têm desenvolvimentos periódicos ou finitos dessa espécie. Com finalidades teóricas, convém, muitas vêzes, escolher $p = 2$. Obtém-se assim o desenvolvimento *binário* dos números reais,

$$g + \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2^2} + \ldots,$$

onde cada b representa 0 ou 1 (1).

Nos cálculos numéricos é costume exprimir-se o inteiro g que, por simplicidade, admitimos ser positivo, no sistema decimal, isto é, sob forma

$$\alpha_m 10^m + \alpha_{m-1} 10^{m-1} + \ldots + \alpha_1 10 + \alpha_0,$$

onde cada α_ν representa um dos dígitos $0, 1, \ldots, 9$. Em lugar de $g + 0{,}a_1 a_2 \ldots$, podemos, então, escrever simplesmente

$$\alpha_m \alpha_{m-1} \ldots \alpha_1 \alpha_0 \, , \, a_1 a_2 \ldots$$

Anàlogamente, o número inteiro positivo g pode ser escrito de uma e sòmente de uma maneira, na forma

$$\beta_k p^k + \beta_{k-1} p^{k-1} + \ldots + \beta_1 p + \beta_0,$$

onde cada um dos números β representa alguns dos números $0, 1, \ldots, p-1$. Isto, com a expressão que determinamos, dá o seguinte resultado: todo o número real e positivo pode ser representado sob a forma

$$\beta_k p^k + \beta_{k-1} p^{k-1} + \ldots + \beta_1 p + \beta_0 + \frac{b_1}{p} + \frac{b_2}{p^2} + \ldots,$$

onde β_ν e b_ν são números inteiros compreendidos entre 0 e $p-1$. Assim, por exemplo, o desenvolvimento binário da fração $21/4$ é

$$\frac{21}{4} = 1 \times 2^2 + 0 \times 2 + 1 + \frac{0}{2} + \frac{1}{2^2}.$$

(1) Mesmo para os cálculos numéricos, o sistema decimal não é o melhor. O sistema sexagesimal ($p = 60$), com o qual os babilônios calculavam, apresenta a vantagem de que nêle, uma proporção relativamente grande de números racionais, cujas expressões decimais são infinitas, possuem desenvolvimentos finitos.

4. Desigualdades.

O cálculo com as desigualdades desempenha papel muito mais importante na matemática superior do que na matemática elementar. Recapitularemos, por isso, brevemente, algumas das regras mais simples referentes às mesmas.

Se $a > b$ e $c > d$, segue-se que $a + c > b + d$, mas não que $a - c > b - d$. Além disso, se $a > b$ segue-se que $ac > bc$, desde que c seja positivo. Multiplicando-se uma desigualdade por um número negativo, o seu sentido é invertido. Se $a > b > 0$ e $c > d > 0$, segue-se que $ac > bd$.

As seguintes desigualdades são verificadas para os valores absolutos dos números:

$$|a \pm b| \leqq |a| + |b|, \quad |a \pm b| \geqq |a| - |b|.$$

O quadrado de qualquer número real é maior que ou igual a zero. Se x e y forem números reais arbitrários, teremos, portanto,

$$(x - y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy \geqq 0,$$

ou

$$2xy \leqq x^2 + y^2.$$

5. Desigualdade de Schwarz.

Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n$ e $b_1, b_2, \ldots, b_n$, números reais quaisquer. Façamos as seguintes substituições na última desigualdade [1]

$$x = \frac{|a_i|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}}, \quad y = \frac{|b_i|}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2}}$$

para $i = 1$, $i = 2, \ldots, i = n$ sucessivamente e somemos as desigualdades resultantes. À direita obteremos a soma 2, porque

$$\left(\frac{|a_1|}{\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{|a_n|}{\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}}\right)^2 = 1,$$

$$\left(\frac{|b_1|}{\sqrt{b_1^2 + \ldots + b_n^2}}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{|b_n|}{\sqrt{b_1^2 + \ldots + b_n^2}}\right)^2 = 1.$$

Se dividirmos ambos os membros da desigualdade por 2, virá

$$\frac{|a_1b_1| + |a_2b_2| + \ldots + |a_nb_n|}{\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}\,\sqrt{b_1^2 + \ldots + b_n^2}} \leqq 1,$$

[1] O símbolo $\sqrt{x}$, onde $x > 0$, representa o número positivo cujo quadrado é x.

ou finalmente

$$|a_1b_1| + |a_2b_2| + \ldots + |a_nb_n| \leqq \sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}\,\sqrt{b_1^2 + \ldots + b_n^2}.$$

Como os dois membros desta desigualdade são positivos, podemos elevá-los ao quadrado e omitir os sinais dos módulos:

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 \leqq (a_1^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + \ldots + b_n^2).$$

Esta é a desigualdade de Cauchy-Schwarz.

EXEMPLOS (1)

1. Demonstrar que os números seguintes são irracionais: (*a*) $\sqrt{3}$. (*b*) $\sqrt{n}$, desde que n não seja quadrado perfeito. (*c*) $\sqrt[3]{3}$. (*d*)* $x = \sqrt{2} + \sqrt[3]{2}$. (*e*)* $x = \sqrt{3} + \sqrt[3]{2}$.

2.* Os pontos que, num sistema usual de coordenadas retangulares, têm ambas as coordenadas representadas por números inteiros, são denominados *pontos reticulares*. Provar que um triângulo cujos vértices são pontos reticulares, não pode ser eqüilátero.

3. Verificar as desigualdades:

(*a*) $x + \dfrac{1}{x} \geqq 2,\ x > 0.$ (*b*) $x + \dfrac{1}{x} \leqq -2,\ x < 0.$

(*c*) $\left| x + \dfrac{1}{x} \right| \geqq 2,\ x \neq 0.$

4. Demonstrar que se $a > 0$, $ax^2 + 2bx + c \geqq 0$ para qualquer valor de x, desde que, ùnicamente, $b^2 - ac \leqq 0$.

5. Verificar as desigualdades seguintes:

(*a*) $x^2 + xy + y^2 \geqq 0.$
(*b*)* $x^{2n} + x^{2n-1}y + x^{2n-2}y^2 + \ldots + y^{2n} \geqq 0.$
(*c*)* $x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x + 1 \geqq 0.$

6. Verificar a desigualdade de Schwarz, considerando a expressão

$$(a_1x + b_1)^2 + (a_2x + b_2)^2 + \ldots + (a_nx + b_n)^2,$$

reunindo os têrmos e aplicando o Ex. 4.

7. Demonstrar que o sinal de igualdade na desigualdade de Schwarz se verifica, e sòmente neste caso, se os a e os b forem proporcionais, isto é, se $ca_\nu + db_\nu = 0$ para ν qualquer, desde que c e d sejam independentes de ν e não simultâneamente, nulos.

8. Para $n = 2, 3$, achar a interpretação geométrica da desigualdade de Schwarz.

9. Os números γ_1 e γ_2 são os co-senos diretores de uma linha, isto é, $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 = 1$. Da mesma forma, $\eta_1^2 + \eta_2^2 = 1$. Demonstrar que a equação $\gamma_1\eta_1 + \gamma_2\eta_2 = 1$ implica as equações $\gamma_1 = \eta_1$ e $\gamma_2 = \eta_2$.

10.* Verificar a desigualdade

$$\sqrt{(a_1 - b_1)^2 + \ldots + (a_n - b_n)^2} \leqq \sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2} + \sqrt{b_1^2 + \ldots + b_n^2}$$

e estabelecer sua interpteração geométrica.

1) Os exemplos mais difíceis são indicados por um asterisco.

2. Conceito de função

1. Exemplos.

(*a*) Se um gás ideal fôr comprimido em um recipiente por meio de um pistão, conservando-se a temperatura constante, a pressão p e o volume v são ligados pela relação

$$pv = C,$$

onde C é uma constante. Esta fórmula, denominada *lei de Boyle,* nada estatui relativamente às quantidades p e v em si mesmas, mas tem o seguinte significado: se p tiver um valor definido, arbitràriamente escolhido em uma determinada seqüência (seqüência esta determinada física, mas não matemàticamente), v pode ser determinado, e, inversamente:

$$v = \frac{C}{p}, \quad p = \frac{C}{v}.$$

Dizemos, então, que v é função de p ou, no caso inverso, que p é função de v.

(*b*) Se aquecermos uma barra de metal, de comprimento l_0 à temperatura 0°, até à temperatura $\theta°$, o seu comprimento l será fornecido pela seguinte lei, em face das hipóteses mais simples da física

$$l = l_0 (1 + \beta\theta).$$

Nesta fórmula, β, o "coeficiente de dilatação" do metal, é constante. Diremos, novamente, que l é função de θ.

(*c*) Suponhamos dados os comprimentos de dois lados, a e b, de um triângulo. Se atribuirmos ao ângulo γ, compreendido entre êstes dois lados, um valor arbitrário, inferior a 180°, o triângulo fica completamente determinado; particularmente, o terceiro lado c pode ser calculado. Neste caso diremos que, se a e b forem dados, c é uma função do ângulo γ. Como sabemos da trigonometria, esta função é representada pela fórmula

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}.$$

2. Estabelecimento do conceito de função.

Com o fito de dar uma definição geral do conceito matemático de função, fixaremos idéias sôbre um intervalo definido do eixo dos números, digamos o intervalo compreendido entre os números a e b, e

consideremos a totalidade dos números x pertencentes a êste intervalo, isto é, que satisfazem a relação

$$a \leqq x \leqq b.$$

Se considerarmos o número x como designando, à vontade, qualquer dos números dêste intervalo, chamá-lo-emos uma *variável* (*contínua*) no *intervalo*.

Se, a cada valor de x neste intervalo, corresponder um único valor definido para y, e se x e y forem ligados por uma lei qualquer, diremos que *y é uma função de x* e escreveremos, simbòlicamente,

$$y = f(x), \quad y = F(x), \quad y = g(x),$$

ou outra expressão semelhante. Chamaremos, então, x de *variável independente* e atribuiremos a y a denominação de *variável dependente*, ou diremos que x é o *argumento* da função y.

Deve ser observado que, em certos casos, não é indiferente incluir-se os pontos extremos do intervalo entre a e b, como fizemos acima, ou excluí-los; na última hipótese, a variável x é condicionada pelas desigualdades

$$a < x < b.$$

Para evitar qualquer engano, chamaremos o primeiro tipo de intervalos (incluindo os pontos extremos), de *intervalo fechado*, e o segundo tipo, de *intervalo aberto*. Se ùnicamente um dos extremos fôr incluído (por exemplo, $a < x \leqq b$), dizemos que se trata de um *intervalo aberto num extremo* (neste caso o extremo a). Finalmente, podemos considerar intervalos abertos que se estendem sem limite, em uma ou ambas as direções. Diremos, então, que a variável x percorre um intervalo *infinito* (aberto) e escrevemos, simbòlicamente,

$$a < x < \infty \quad \text{ou} \quad -\infty < x < b \quad \text{ou} \quad -\infty < x < \infty.$$

Ao estabelecer o conceito geral de uma função definida num intervalo, nada foi esclarecido sôbre a natureza da relação que permite que a variável dependente seja determinada, uma vez conhecida a variável independente. Tal relação pode ser tão complicada quanto quisermos e, nas investigações teóricas, esta generalidade constitui uma vantagem. Nas aplicações, porém, e em particular no cálculo diferencial e integral, as funções com as quais lidarmos, não são as de maior generalidade; ao contrário, as leis de correspondência pelas quais um valor de y é determinado para cada valor de x, são sujeitas a certas restrições simplificadoras.

3. Representação gráfica. Continuidade. Funções monótonas.

Quando consideramos a relação existente entre o conceito geral de função e a geometria, ocorrem restrições naturais sôbre o mesmo. A idéia fundamental da geometria analítica é, efetivamente, dar uma representação analítica característica das curvas definidas por alguma propriedade geométrica, referida a uma das coordenadas retangulares, digamos y, como uma função $y = f(x)$ de outra coordenada x; por exemplo, a parábola é representada pela função $y = x^2$, o círculo de raio 1, com centro na origem, pelas duas funções $y = \sqrt{1 - x^2}$ e $y = -\sqrt{1 - x^2}$. No primeiro exemplo a função é definida no intervalo $-\infty < x < \infty$; no segundo podemos nos restringir ao intervalo $-1 \leqq x \leqq 1$, por isso que, fora do mesmo, a função não tem significado (quando x e y forem reais).

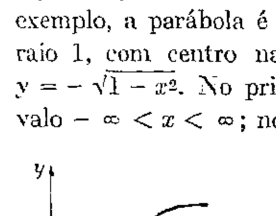


Fig. 2—Eixos retangulares

Inversamente, se em lugar de partirmos de uma curva geomètricamente determinada, considerarmos uma função dada, $y = f(x)$, podemos representar gràficamente a dependência de y em relação a x, empregando um sistema de coordenadas retangulares da maneira usual (fig. 2). Se, para cada abscissa x, determinarmos a ordenada correspondente $y = f(x)$, obteremos a representação geométrica da função. A restrição que imporemos agora, ao conceito de função, é: a representação geométrica da função deve assumir a forma de uma curva geométrica "plausível". É verdade que isto implica mais em uma vaga idéia geral do que, pròpriamente, em uma estrita condição matemática. Cedo, porém, formularemos tais condições, como a continuidade, a derivabilidade e outras, que farão com que o gráfico da função possua o caráter de curva plausível, visualmente, de representação geométrica. De qualquer forma, excluiremos funções como a seguinte: para cada valor racional de x, a função tem o valor 1; para cada valor irracional de x, o valor de y é 0. Esta definição atribui a y um valor definido para cada valor de x, mas, em cada intervalo de x, por menor que seja, o valor de y salta de 0 a 1 e vice-versa, um número infinito de vêzes.

A não ser que o contrário seja expressamente enunciado, suporemos, sempre, que a lei que atribui um valor da função para cada valor de x, atribui, também, sòmente um valor de y para cada valor de x, como,

por exemplo, $y = x^2$ ou $y = \operatorname{sen} x$. Se iniciarmos com uma curva geométrica, pode acontecer, como no caso do círculo, $x^2 + y^2 = 1$, que o desenvolvimento completo da curva não seja dado por uma única função (de um só valor), porém requeira diversas funções — no caso do círculo, as duas funções $y = \sqrt{1-x^2}$ e $y = -1\sqrt{1-x^2}$. O mesmo se verifica para a hipérbole $y^2 - x^2 = 1$, que é representada pelas duas funções $y = \sqrt{1+x^2}$ e $y = -\sqrt{1+x^2}$. Tais curvas, pois, não determinam as funções correspondentes de forma única. Conseqüentemente, diz-se, algumas vêzes, que a função correspondente à curva é *plurívoca*. As funções distintas que representam a curva são denominadas *ramos unívocos* relativos à mesma. Por uma

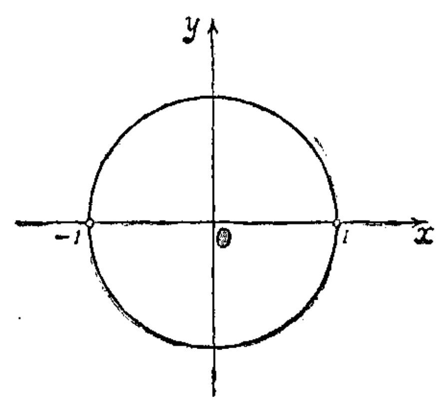


Fig. 3

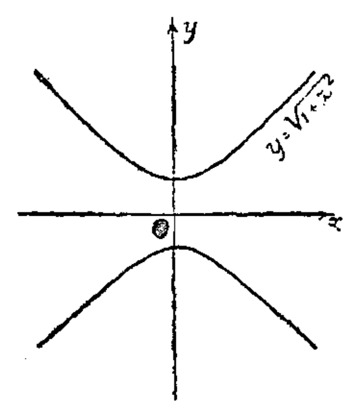


Fig. 4

Funções plurívocas

questão de clareza, usaremos, doravante, a palavra *função* para significar uma curva unívoca. Assim, pois, o símbolo $\sqrt{x}$ (para $x \geqq 0$) indicará, sempre, o número *não-negativo*, cujo quadrado é x.

Se a curva fôr a representação geométrica de *uma* função, ela poderá ser cortada, por uma paralela ao eixo dos y, no máximo em um ponto, visto que, a cada ponto x, contido no intervalo da definição, corresponde um valor de y. De outro modo, tal como acontece no cálculo, que é representado pelas duas funções

$$y = \sqrt{1-x^2} \quad \text{e} \quad y = -\sqrt{1-x^2},$$

tais paralelas ao eixo dos y poderão cortar a curva em mais de um ponto. Os segmentos da curva correspondentes a diferentes ramos unívocos, estão, algumas vêzes, ligados de tal modo, que a curva completa é uma figura simples que pode ser descrita de uma só vez, como,

por exemplo, o círculo (fig. 3), ou podem resultar completamente separados, como na hipérbole (fig. 4).

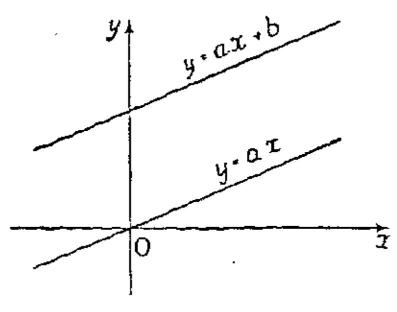


Fig. 5.—Funções lineares

Apresentamos aqui alguns exemplos sôbre a representação gráfica das curvas.

(a) $y = ax.$

y é proporcional a x. O gráfico (fig. 5) é uma linha reta passando pela origem do sistema de coordenadas.

(b) $y = ax + b.$

y é uma função linear de x. O gráfico é uma linha reta que passa pelo ponto $x = 0$, $y = b$, a qual, se $a \neq 0$, passa também pelo ponto $x = -b/a$ e, se $a = 0$, é horizontal.

(c) $y = \frac{a}{x}.$

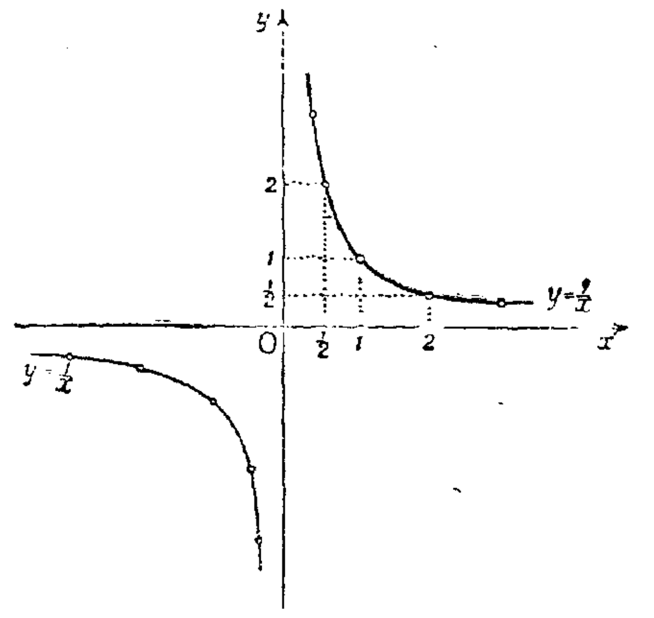


Fig. 6.—Descontinuidades infinitas

y é inversamente proporcional a x. Se, em particular, $a = 1$, de modo que

$$y = \frac{1}{x},$$

achamos, por exemplo, que

$$y = 1 \text{ para } x = 1;\ y = 2 \text{ para } x = \tfrac{1}{2};\ y = \tfrac{1}{2} \text{ para } x = 2.$$

O gráfico (fig. 6) é uma curva, uma hipérbole eqüilátera, simétrica em relação às bissetrizes dos ângulos formados pelos eixos coordenados.

Esta última função, evidentemente, não é definida para o valor $x = 0$, visto que a divisão por zero não tem significado. O ponto excepcional $x = 0$, em cuja vizinhança ocorrem valores arbitràriamente grandes da função, tanto positivos como negativos, é o exemplo mais simples de uma *descontinuidade infinita*, assunto do qual trataremos mais tarde (pág. 51).

(*d*) $y = x^2$.

Esta função, como se sabe, representa uma parábola (fig. 7).

Da mesma forma, a função $y = x^3$ é representada pela parábola cúbica (fig. 8).

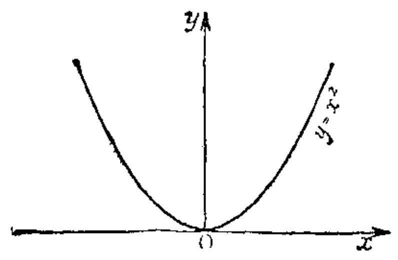


Fig. 7.—Parábola

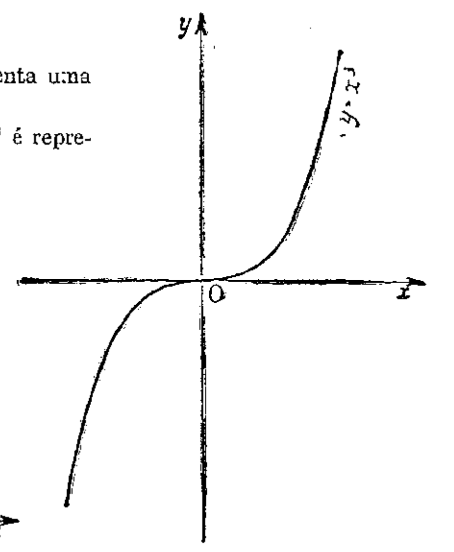


Fig. 8.—Parábola cúbica

As curvas que acabamos de ver e seus respectivos gráficos, revelam uma propriedade da maior importância na discussão das funções, a saber, a propriedade da *continuidade*. Mais tarde (§ 8, pág. 49) analisaremos êste conceito com mais detalhes; intuitivamente, porém, êle significa que uma pequena mudança em x sòmente acarreta uma pequena alteração em y e não um salto brusco em seu valor; quer dizer, a curva não é quebrada. Mais exatamente, pode-se dizer que a alteração de y se manterá inferior a qualquer número positivo, arbitràriamente escolhido, desde que a mudança de x seja correspondentemente pequena.

Uma função que, para todos os valores de x em um certo intervalo, tem o mesmo valor de $y = a$ denomina-se *constante*. A sua representação gráfica é uma linha horizontal. Uma função $y = f(x)$ tal que, no intervalo para o qual é definida, um acréscimo no valor de x sempre ocasione um acréscimo no valor de y, é denomi-

nada *função monótona crescente*. Se, por outro lado, um acréscimo no valor de x causar sempre um decréscimo no valor de y, então a função se diz *monótona decrescente*. Tais funções são representadas, gràficamente, por curvas que, no intervalo correspondente, sempre sobem (da esquerda para a direita) ou sempre descem (fig. 9).

Se a curva representada por $y = f(x)$ fôr simétrica em relação ao eixo dos y, isto é, se $x = -a$ e $x = a$ derem o mesmo valor absoluto à função, ou

$$f(-x) = f(x),$$

dizemos que a função é *par*. Por exemplo, a função $y = x^2$ é par (fig. 7).

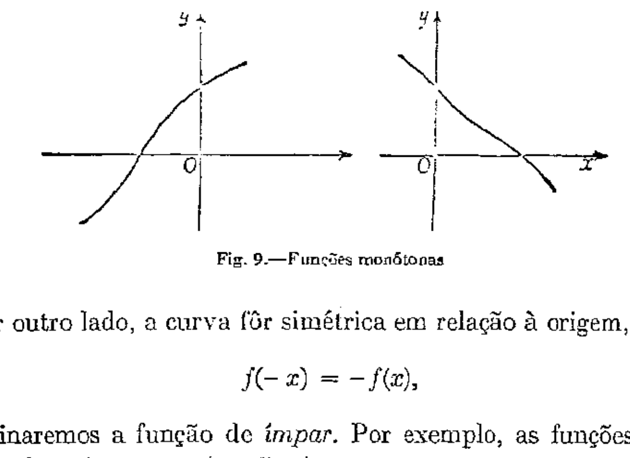


Fig. 9.—Funções monótonas

Se, por outro lado, a curva fôr simétrica em relação à origem, isto é, se

$$f(-x) = -f(x),$$

denominaremos a função de *ímpar*. Por exemplo, as funções $y = x$ e $y = x^3$ (fig. 8) e $y = 1/x$, são ímpares.

4. Funções inversas.

No primeiro exemplo da pág. 14 já ficou evidenciado que a relação existente entre duas quantidades pode ser encarada sob dois aspectos diferentes, conforme se considere a primeira variável como função da segunda ou a segunda como função da primeira. Se, por exemplo, $y = ax + b$, onde admitimos que $a \neq 0$, x será representado como uma função de y, pela equação $x = (y - b)/a$. Também, a relação funcional indicada pela equação $y = x^2$ pode ser representada por $x = \pm\sqrt{y}$, de modo que a função $y = x^2$ simboliza a mesma coisa que as duas funções $x = \sqrt{y}$ e $y = -\sqrt{y}$.

Assim, quando fôr dada uma função arbitrária $y = f(x)$, podemos procurar determinar x como função de y, ou, como diremos, substituir a função $y = f(x)$ pela *função inversa* $x = \phi(y)$.

O significado geométrico do que acabamos de expor é o seguinte: a curva é obtida construindo-se os pontos simétricos do gráfico de $y = f(x)$ em relação à bissetriz do ângulo formado pelos eixos dos x e dos y positivos [1] (fig. 10). A construção nos dá a representação gráfica de x como função de y, ou seja, a função inversa $x = \phi(y)$.

Estas considerações geométricas, entretanto, mostram imediatamente que a função $y = f(x)$, definida em um intervalo, não possui

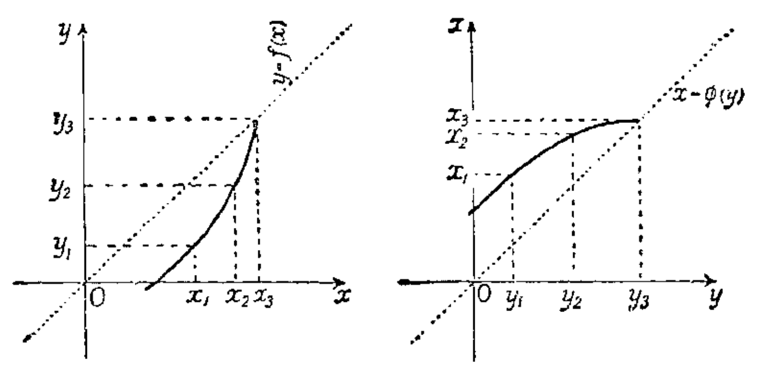


Fig. 10.—Inversão de uma função

função inversa monótona, salvo se forem preenchidas certas condições. Se o gráfico da função fôr cortado pela linha $y = c$, paralela ao eixo dos x, em mais de um ponto, o valor $x = c$ corresponderá a mais de um valor de x, de sorte que a função não pode admitir função inversa unívoca. Êste caso não ocorrerá se $y = f(x)$ fôr contínua e monótona. A figura 10 mostra que para cada valor de y no intervalo y_1yy_3 há sòmente um valor correspondente a x no intervalo x_1xx_3, e da figura deduzimos que *uma função contínua e monótona num intervalo admite sempre função inversa unívoca, a qual é, tambem, contínua e monótona.* (Para uma demonstração rigorosa, ver pág. 67.)

(1) Em lugar de *refletir* os pontos do gráfico dêste modo, poderíamos girar, primeiramente, os eixos coordenados e a curva $y = f(x)$, de um ângulo reto e, depois, refletir o gráfico em relação ao eixo dos x.

3. Estudo mais pormenorizado das funções elementares

1. Funções racionais.

Passemos agora breve revista nas funções elementares que o leitor já encontrou nos seus estudos anteriores. Os tipos mais simples de funções serão obtidos pela aplicação repetida das operações elementares: adição, multiplicação e subtração. Se aplicarmos estas opera-

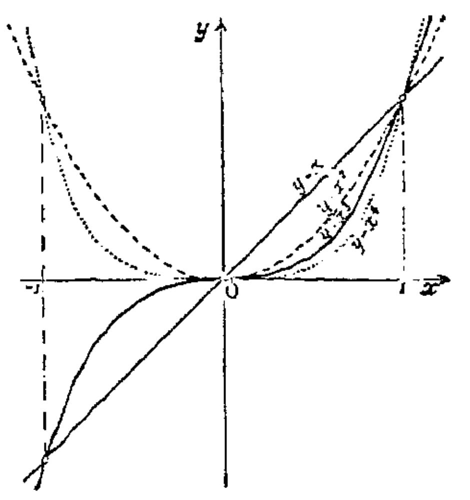


Fig. 11.—Potências de x

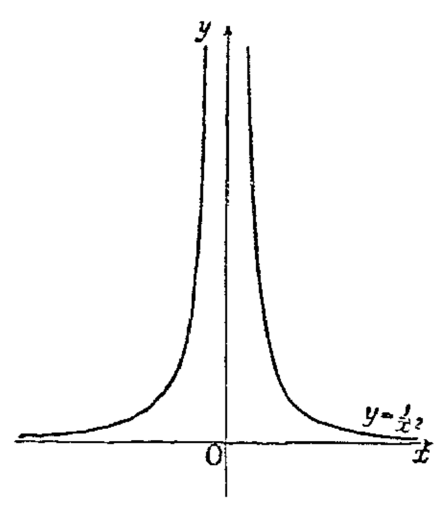


Fig. 12

ções a uma variável independente x e a números reais quaisquer, obteremos as *funções racionais inteiras* ou *polinômios*:

$$y = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n.$$

Os polinômios são as funções mais simples e, de certo modo, básicas da análise.

Se formarmos o quociente destas funções, isto é, expressões da forma

$$y = \frac{a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m},$$

obteremos as funções racionais gerais ou funções racionais fracionárias, definidas em todos os pontos em que o denominador fôr diferente de zero.

A função racional inteira mais simples é a função linear

$$y = ax + b.$$

Ela é representada, gràficamente, por uma linha reta. Tôda *função quadrática* da forma

$$y = ax^2 + bx + c$$

é representada por uma parábola. As curvas representativas das funções racionais inteiras do terceiro grau

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

são, ocasionalmente, denominadas parábolas de terceira ordem, e assim sucessivamente.

Como exemplos, damos os gráficos da função $y = x^n$ para os expoentes $n = 1, 2, 3, 4$ (fig. 11). Vemos que, para os valores pares de n, a função $y = x^n$ satisfaz a equação $f(-x) = f(x)$, sendo, portanto, uma função par. Para os valores ímpares de n a função proposta satisfaz a $f(-x) = -f(x)$, sendo, então, uma função ímpar.

O exemplo mais simples de uma função racional não polinômica é $x = 1/x$, já mencionada na pág. 18. O seu gráfico é uma hipérbole retangular. Outro exemplo é a função $y = 1/x^2$ (fig. 12).

2. Funções algébricas.

A consideração do problema da formação das funções inversas das funções racionais leva-nos, de imediato, para fora do domínio destas. O exemplo mais frisante dêste fato é a introdução da função $\sqrt[n]{x}$. Partimos da função $y = x^n$, que, para $x \geqq 0$ é monótona. Nestas condições ela possui inversa monótona, a qual representamos pelo símbolo $x = \sqrt[n]{y}$, ou, trocando as letras usadas para as variáveis dependente e independente,

$$y = \sqrt[n]{x} = x^{1/n}.$$

De acôrdo com a definição, esta raiz é negativa. No caso de valores ímpares de n, a função x^n é monótona para todos os valores de x, inclusive os negativos. Conseqüentemente, para valores ímpares de n podemos definir $\sqrt[n]{x}$ de forma única para todos os valores de x; neste caso $\sqrt[n]{x}$ é negativa para os valores negativos de x.

De um modo mais geral, podemos considerar

$$y = \sqrt[n]{R(x)},$$

onde $R(x)$ é uma função racional. Chegaremos a outras funções de tipo semelhante, aplicando as operações racionais a uma ou mais destas funções. Por exemplo, podemos formar as funções

$$y = \sqrt[m]{x} + \sqrt[m]{x^2+1}, \quad y = x + \sqrt{x^2+1}.$$

Estas são casos especiais de *funções algébricas*. (O conceito geral de função algébrica não pode ser definido aqui; ver cap. X).

3. Funções trigonométricas.

Enquanto as funções racionais e algébricas que acabamos de considerar foram definidas e deduzidas diretamente das operações elementares de cálculo, a geometria é a fonte da qual obtemos os primeiros conhecimentos sôbre outra espécie de funções, as denominadas *funções transcendentes elementares* (1). Consideraremos as funções *transcendentes elementares*, especialmente as funções trigonométricas, as funções exponenciais e logarítmicas.

Em tôdas as investigações analíticas de ordem superior em que ocorrem ângulos, é usual medi-los, não em graus, minutos e segundos, mas em *radianos*. Situaremos o ângulo a medir com o vértice no centro de um círculo de raio 1, e mediremos o ângulo pelo comprimento do arco da circunferência interceptado pelos seus lados. Assim, o ângulo de 180° equivale a um ângulo de π radianos (isto é, em radianos vale π), um ângulo de 90° mede $\pi/2$ radianos, um ângulo de 45° vale $\pi/4$ radianos, um ângulo de 360° equivale a 2π radianos. Inversamente, um ângulo de 1 radiano, expresso em graus, vale

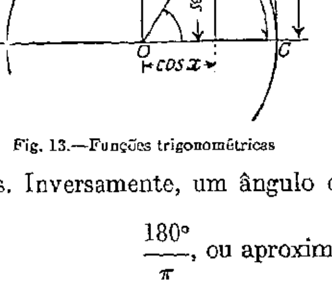


Fig. 13.—Funções trigonométricas

$$\frac{180^\circ}{\pi}, \text{ ou aproximadamente, } 57^\circ\, 17'\, 45''.$$

Daqui por diante, sempre que nos referirmos a um ângulo x, imaginaremos um ângulo cuja medida é x radianos.

Depois destas considerações preliminares, relembraremos sucintamente ao leitor o significado das funções trigonométricas sen x, cos x, tg x, cotg x (2). A figura 13 representa estas funções, nas quais o ângulo x é medido a partir do raio OC (de comprimento 1), considerando-se positivos os ângulos descritos no sentido oposto ao do movimento dos ponteiros de um relógio. As coordenadas retangulares do ponto A dão

(1) A palavra "transcendente" não significa algo particularmente profundo ou misterioso. Sugere, apenas, que a definição dessas funções por meio das operações elementares de cálculo é impossível. "Quod algebrae vires transcendit."

(2) Às vêzes é conveniente a introdução das funções sec $x = 1/\cos x$, co-sec $x = 1/\text{sen}\, x$.

imediatamente as funções sen x e cos x. Os gráficos das funções sen x, cos x, tg x e cotg x estão representados nas figuras 14 e 15.

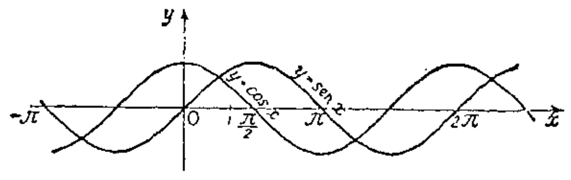


Fig. 14

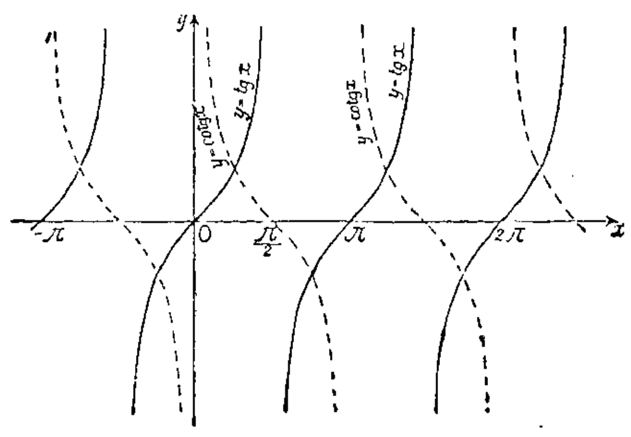


Fig. 15

4. Funções exponencial e logarítmica.

Juntamente com as funções trigonométricas, a função exponencial de base positiva a,

$$y = a^x,$$

assim como a sua inversa, o logaritmo de base a,

$$x = \log_a y,$$

são também considerados como funções transcendentes elementares. Na matemática elementar é costume pôr de lado certas dificuldades inerentes à definição destas funções, e nós também adiaremos a sua discussão precisa, até que disponhamos de métodos mais apropriados (cap. III, § 6, págs. 166-177, e também pág. 191). Podemos, entretanto, estabelecer, desde já, a base da sua definição. Se $x = p/q$ fôr

um número racional (onde p e q são inteiros e positivos), admitindo que o número a seja positivo — definimos a^x como $\sqrt[q]{a^p} = a^{p/q}$, onde a raiz, de acôrdo com a convenção estabelecida, deve ser considerada como positiva. Visto que os valores racionais de x^x são densos em qualquer ponto, é natural estender esta função a^x de modo que ela seja contínua também para os valores irracionais de x, atribuindo a a^x valores contínuos, quando x fôr irracional, como os já definidos para x racional. Esta consideração origina a função contínua $y = a^x$, a *função exponencial*, que, para todos os valores *racionais* de x dá o valor de a^x acima determinado. Admitimos, por enquanto, que esta extensão é de fato possível e que pode ser efetivada de uma só maneira; entretanto, não esqueçamos que devemos *prová-lo* ainda. A função

$$x = \log_a y$$

pode ser definida para $y > 0$, como o inverso da função exponencial.

EXEMPLOS

1. Construir o gráfico de $y = x^3$. Dêste, sem qualquer outro cálculo, deduzir o gráfico de $y = \sqrt[3]{x}$.

2. Desenhar os gráficos seguintes, verificando quais as funções pares e quais as ímpares:

(*a*) $y = \operatorname{sen} 2x$.
(*b*) $y = 5 \cos x$.
(*c*) $y = \operatorname{sen} x + \cos x$.
(*d*) $y = 2 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x$.
(*e*) $y = \operatorname{sen} (x + \pi)$.
(*f*) $y = 2 \cos \left(x + \frac{\pi}{3} \right)$.
(*g*) $y = \operatorname{tg} x - x$.

3. Desenhar os gráficos das funções seguintes, verificando quando as funções são (1) monótonas ou não, (2) pares ou ímpares:

(*a*) $y = x^2 \; (-\infty < x < \infty)$.
(*b*) $y = x^2 \; (0 \leqq x \leqq 1)$.
(*c*) $y = x \; (-1 \leqq x \leqq 1)$.
(*d*) $y = |x| \; (-1 \leqq x \leqq 1)$.
(*e*) $y = \sqrt{x^2} \; (-1 \leqq x \leqq 1)$.
(*f*) $y = |x - 1| \; (-\infty < x < \infty)$.
(*g*) $y = |x^2 + 4x + 2| \; (-4 \leqq x \leqq 3)$.
(*h*) $y = [x] \; (-\infty < x < \infty)$, onde $[x]$ representa o maior inteiro que não excede x; isto é, $[x] \leqq x \leqq [x] + 1$.

(1) Ver págs. 70 e 173.

(i) $y = x - [x]\ (-\infty < x < \infty)$.

j) $y = \sqrt{x - [x]}\ (-\infty < x < \infty)$.

(k) $y = x + \sqrt{x - [x]}\ (-\infty < x < \infty)$.

(l) $y = |x - 1| + |x + 1| - 2\ (-5 \leqq x \leqq 5)$.

(m) $y = |x - 1| - 2|x| + |x + 1|\ (-\infty < x < \infty)$.

Quais destas duas funções são idênticas?

4. Um corpo cai com velocidade aproximada de 4,90 t^2 metros em t segundos. Se uma bola cair de uma janela de 7,70 m de altura acima do solo, traçar um gráfico da altura em função de t para os primeiros 4 segundos após o início da queda.

4. Funções de variáveis inteiras. Seqüências de números

Até agora consideramos a variável independente como contínua, isto é, variando num intervalo completo. Entretanto, ocorrem inúmeros casos em matemática onde uma quantidade depende só de um inteiro, um número n, o qual pode assumir os valores 1, 2, 3, ... Tal função é denominada função de uma variável inteira. Esta concepção será mais fàcilmente apreendida por meio de exemplos.

1. A soma dos primeiros n inteiros,

$$S_1(n) = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n = \tfrac{1}{2}n(n + 1),$$

é uma função de n. Da mesma forma, a soma dos primeiros n quadrados

$$S_2(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2,$$

é, também, uma função (1) do inteiro n.

(1) Esta última soma pode ser fàcilmente representada como uma expressão racional simples em n, do seguinte modo. Partimos da fórmula

$$(\nu + 1)^3 - \nu^3 = 3\nu^2 + 3\nu + 1,$$

escrevendo esta equação para $\nu = 0, 1, 2, \ldots, n$, e somando, obtemos

$$(n + 1)^3 = 3S_2 + 3S_1 + n + 1;$$

substituindo a expressão determinada por S_1, teremos

$$3S_2 = (n + 1)\left[(n + 1)^2 - 1 - \frac{3}{2}n\right] = (n + 1)\left(n^2 + \frac{1}{2}n\right).$$

de modo que

$$S_2 = \frac{1}{6}n(n + 1)(2n + 1).$$

Por um processo análogo, as funções

$$S_3(n) = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3,$$
$$S_4(n) = 1^4 + 2^4 + \ldots + n^4,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

podem ser representadas como funções racionais de n.

2. Outras funções simples de inteiros são as expressões

$$n! = 1.2.3\ldots n$$

e os coeficientes binomiais

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

para valores fixos de k.

3. Todo número inteiro $n > 1$ que não fôr primo é divisível por mais de dois inteiros positivos, ao passo que os números primos são apenas divisíveis por si mesmos e pela unidade. Evidentemente, podemos considerar o número $T(n)$ de divisores de n, como uma função do próprio n. Para os primeiros números, esta função é dada pela seguinte tabela:

$n =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$T(n) =$	1	2	2	3	2	4	2	4	3	4	2	6

4. Uma função dêste tipo, de grande importância na teoria dos números, é $\pi(n)$, isto é, o número de primos menor que n. A sua investigação detalhada constitui um dos problemas mais interessantes e atraentes da teoria dos números. Mencionaremos, aqui, apenas o resultado principal destas investigações: o número $\pi(n)$ é dado aproximadamente, para grandes valores de n, pela função (¹) $n/\log n$, na qual por $\log n$ indicamos o logaritmo da "base natural" e, a ser definido mais adiante (págs. 168, 174).

As funções de variáveis inteiras ocorrem, normalmente, sob a forma das chamadas *seqüências de números*. Por *seqüência de números* entendemos *um conjunto infinito de números* $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$, (*não necessàriamente todos diferentes*), *ordenados segundo uma lei qualquer*. Em outras palavras, trata-se simplesmente de uma função a da variável inteira n; a única diferença está no fato de usarmos a notação por meio de índice a_n em lugar de $a(n)$.

EXEMPLOS

1. Demonstrar que $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2$.
2. Deduzir a fórmula $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n+1)^2$ de $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$.
3. Demonstrar as seguintes propriedades dos coeficientes binomiais:

(a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ $(k \leqq n)$. (b) $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$ (para $k > 0$.

(c) $1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$.

(¹) Isto é, o quociente do número $\pi(n)$ por $n/\log n$ difere arbitràriamente pouco de 1, desde que n seja suficientemente grande.

4. Calcular as somas seguintes:

(a) $1.2 + 2.3 + \ldots + n(n+1)$.

(b) $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$.

(c) $\frac{3}{1^2.2^2} + \frac{5}{2^2.3^2} + \ldots + \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$.

5. Uma seqüência é denominada progressão aritmética de primeira ordem se a diferença entre os têrmos sucessivos fôr constante. É denominada progressão aritmética de segunda ordem se a diferença entre os têrmos sucessivos formar uma progressão aritmética de primeira ordem; e, em geral, é chamada progressão aritmética de ordem k se a diferença entre os seus têrmos sucessivos formar uma progressão aritmética de ordem $(k-1)$.

Os números 4, 6, 13, 27, 50, 84 são os primeiros seis têrmos de uma progressão aritmética. Qual é a sua ordem? Qual é o oitavo têrmo?

6. Demonstrar que o têrmo n de uma progressão aritmética de segunda ordem pode ser escrito sob a forma $an^2 + bn + c$, onde a, b e c são independentes de n.

7.* Demonstrar que o têrmo n de uma progressão aritmética de ordem k pode ser escrito sob a forma $an^k + bn^{k-1} + \ldots + pn + q$, pode $a, b, \ldots, p, q$ são independentes de n.

Determinar o têrmo n da progressão do exemplo 5.

5. Conceito de limite de uma seqüência

O conceito fundamental sôbre o qual se baseia tôda a Análise é, em última instância, o de limite de uma seqüência. Esclareceremos esta afirmativa, considerando, inicialmente, alguns exemplos.

1. $a_n = \frac{1}{n}$.

Consideremos a seqüência

$$a_1 = 1,\quad a_2 = \frac{1}{2},\quad a_3 = \frac{1}{3},\quad \ldots,\quad a_n = \frac{1}{n},\quad \ldots$$

Nenhum número desta seqüência é nulo; vemos, porém, que quanto maior fôr n tanto mais perto de zero estará o número a_n. Se, portanto, fixarmos, em tôrno de 0, um intervalo, tão pequeno quanto desejarmos, a partir de um índice determinado em diante, todos os números a_n cairão neste intervalo. Exprimiremos tal estado de coisas dizendo que, à medida que n cresce, os números a_n tendem para 0, ou que tais números possuem o *limite* 0, ou que a seqüência $a_1, a_2, a_3, \ldots$ *converge* para 0.

Se representarmos os números pelos pontos de uma linha, isto significa que os pontos $1/n$ se acumulam cada vez mais perto de 0, à medida que n cresce.

O mesmo se verifica com a seqüência

$$a_1 = 1, \quad a_2 = -\frac{1}{2}, \quad a_3 = \frac{1}{3}, \quad a_4 = -\frac{1}{4}, \ldots, \quad a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}, \ldots.$$

Aqui, também, os números a_n tendem para zero à medida que n cresce; a única, diferença é que os números a_n são, às vêzes, maiores e, outras, menores do que o limite 0; êles *oscilam*, como dizemos, em tôrno do limite.

A convergência das seqüências para 0 é usualmente expressa de forma simbólica, pela equação

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0,$$

ou, às vêzes, pela abreviação

$$a_n \to 0.$$

2. $a_{2m} = \frac{1}{m}$; $a_{2m-1} = \frac{1}{2m}$.

Nos exemplos precedentes o valor absoluto da diferença entre a_n e o limite torna-se cada vez menor, à medida que n cresce. Isto, entretanto, não é absolutamente necessário, como mostra a seqüência

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = \frac{1}{4}, \quad a_4 = \frac{1}{2}, \quad a_5 = \frac{1}{6}, \quad a_6 = \frac{1}{3}, \ldots;$$

sto é, para valores pares, $n = 2m$, $a_n = a_{2m} = 1/m$, e para valores ímpares, $n = 2m-1$ $a_n = a_{2m-1} = 1/2_m$. Esta seqüência também tem o limite zero, pois cada intervalo em tôrno da origem, tão pequeno quanto se queira, conterá todos os números a_n a partir de um determinado valor de n em diante. Não é, porém, verdade que cada número esteja situado mais perto do limite zero do que o precedente

3. $a_n = \frac{n}{n+1}$.

Consideremos a seqüência

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{2}{3}, \ldots, \quad a_n = \frac{n}{n+1}, \ldots,$$

onde o índice inteiro n assume todos os valores 1, 2, 3, ... Se escrevermos $a_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ constatamos que, à medida que n cresce, o número a_n se aproxima cada vez mais de 1, de tal maneira que, se marcarmos qualquer intervalo em tôrno do ponto 1, todos os números a_n que seguem um certo a_n, cairão no seu interior. Escreveremos então,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1.$$

A seqüência
$$a_n = \frac{n^2 - 1}{n^2 + n + 1}$$
comporta-se de maneira semelhante. Esta seqüência tende, também, para um limite, desde que n cresça, na realidade, para o limite 1, ou, em símbolos, $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$. Vemos isto mais simplesmente se escrevermos
$$a_n = 1 - \frac{n+2}{n^2+n+1} = 1 - r_n;$$
tornando-se preciso, apenas, mostrar que os números r_n tendem para 0, desde que n cresça. Efetivamente, para todos os valores de n maiores do que 2, temos $n + 2 < 2n$ e $n^2 + n + 1 > n^2$. A expressão do resto será, pois,
$$0 < r_n < \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n} \; (n > 2),$$
no qual constatamos imediatamente que r_n tende para 0, desde que n cresça. A discussão permite, ao mesmo tempo, estabelecer uma avaliação de quanto o número a_n (para $n > 2$) pode, no máximo, diferir do limite 1. Esta diferença, com efeito, não pode exceder $2/n$.

O exemplo considerado ilustra o fato que, aliás, deveríamos esperar naturalmente, dos têrmos com os expoentes mais elevados predominarem, tanto no numerador como no denominador da fração correspondente a a_n, para os grandes valores de n, determinando, ao mesmo tempo, o limite.

4. $a_n = \sqrt[n]{p}$.

Seja p um determinado número positivo. Consideremos a seqüência a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ..., onde
$$a_n = \sqrt[n]{p}.$$
Afirmamos que
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} = 1.$$

Podemos demonstrar muito fàcilmente a asserção, utilizando um *lema* que servirá, ainda, para outras finalidades.

Se $1 + h$ *fôr um número positivo (isto é, se* $h > -1$*), e* n *fôr um inteiro maior do que* 1, *teremos*
$$(1 + h)^n > 1 + nh. \qquad (1)$$

Suponhamos que a desigualdade (1) já tenha sido demonstrada para um certo valor de $m > 1$. Multiplicando ambos os membros por $(1 + h)$, obteremos
$$(1 + h)^{m+1} > (1 + mh)\,(1 + h) = 1 + (m + 1)h + mh^2.$$
Se omitirmos o têrmo positivo mh^2 à direita, a desigualdade continua válida. Obtemos então
$$(1 + h)^{m+1} > 1 + (m + 1)h.$$

Esta, entretanto, é a desigualdade para o expoente $m + 1$. Segue-se, pois, que se a desigualdade se verificar para o expoente m, também se verificará para o expoente $m + 1$. Como ela se verifica para $m = 2$, valerá, também, para $m = 3$

e, portanto, para $m = 4$, e assim sucessivamente, verificando-se para qualquer expoente. O exemplo ilustra uma demonstração por *indução matemática*, tipo de prova que é empregado muitas vêzes.

Voltando à nossa seqüência, distinguiremos os casos $p > 1$ e $p < 1$ (se $p = 1$, teríamos $\sqrt[n]{p}$ também igual a 1 para qualquer valor de n, e o nosso enunciado tornar-se-ia trivial).

Se $p > 1$, teremos $\sqrt[n]{p}$ também maior do que 1. Façamos $\sqrt[n]{p} = 1 + h_n$, onde h_n é uma quantidade positiva dependente de n. A desigualdade (1) nos dá

$$p = (1 + h_n)^n > 1 + nh_n,$$

donde decorre imediatamente

$$0 < h_n < \frac{p-1}{n}.$$

Vemos, pois, que, à medida que o número n cresce, h_n tende para 0, provando que os números a_n tendem para o limite 1, como asseveramos. Ao mesmo tempo, dispomos de um meio para avaliar a proximidade de qualquer a_n, do limite 1. A diferença entre a_n e 1 não poderá ser maior do que $(p-1)/n$.

Se $p < 1$, $\sqrt[n]{p}$ será menor do que 1 e, portanto, podemos igualar a $1/(1 + h_n)$, onde h_n é um número positivo. Daí se conclui, empregando-se a desigualdade (1), que

$$p = \frac{1}{(1 + h_n)^n} < \frac{1}{1 + nh_n}.$$

(Tornando o denominador cada vez menor, fazemos crescer a fração). Temos então

$$1 + nh_n < \frac{1}{p},$$

e, portanto

$$h_n < \frac{1/p - 1}{n}.$$

Verificamos, assim, que, desde que n cresça, h_n converge para 0. Como recíproca de uma quantidade que tende para 1, a própria $\sqrt[n]{p}$ converge para 1.

5. $a_n = \alpha^n$.

Consideremos a seqüência $a_n = \alpha^n$, onde α é determinado e n assume os valores da seqüência dos números inteiros positivos.

Primeiramente, seja α um número positivo menor do que 1. Podemos escrever $\alpha = 1/(h + 1)$, onde h é positivo, e a desigualdade (1) dá

$$a_n = \frac{1}{(1 + h)^n} < \frac{1}{1 + nh} < \frac{1}{nh}.$$

Visto que os números h e, conseqüentemente, $1/h$, dependem, ùnicamente, de α e não se alteram quando n cresce, vemos que, à medida que n aumenta, α^n converge para 0:

$$\lim_{n\to\infty} \alpha^n = 0 \qquad (0 < \alpha < 1).$$

A mesma relação se verifica quando α é nulo ou negativo, porém, maior do que -1. Isto é claro porque, em qualquer caso, $\lim\limits_{n \to \infty} |\alpha|^n = 0$.

Se $\alpha = 1$, será α^n sempre igual a 1, e teremos considerado o número 1 como limite de α^n.

Se $\alpha > 1$, faremos $\alpha = 1 + h$, onde h é positivo, e vemos imediatamente, partindo da desigualdade (1), que, quando n cresce, α^n não converge para limite definido, mas cresce além de qualquer limite. Dizemos, então, que α^n *tende para o infinito* à medida que n cresce, ou que α^n *torna-se infinito*. Em símbolos,

$$\lim_{n \to \infty} \alpha^n = \infty \qquad (\alpha > 1).$$

Não obstante, como devemos salientar, *o símbolo ∞ não indica um número com o qual possamos calcular, como qualquer outro*. Equações ou enunciados que exprimam que uma quantidade é ou se torna infinita, nunca têm o mesmo sentido que uma relação entre valores definidos. Apesar disso, tais maneiras de expressão e o emprêgo do símbolo ∞ são extremamente convenientes, como veremos muitas vêzes nas páginas seguintes.

Se $\alpha = -1$, os valores de α^n não convergirão para qualquer limite, mas, à medida que n fôr percorrendo a seqüência dos inteiros positivos, êles assumirão as formas $+1$ e -1 alternativamente. Da mesma maneira, se $\alpha < -1$, o valor de α^n crescerá, numèricamente, além de qualquer limite, mas o sinal respectivo será, alternadamente, positivo e negativo.

6. Representação geométrica dos limites de α^n e $\sqrt[n]{p}$.

Se considerarmos as curvas $y = x^n$ e $y = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$, e nos restringirmos, por uma questão de conveniência, aos valores não negativos de x, os limites precedentes estão ilustrados nas figuras 16 e 17, respectivamente. No caso das curvas $y = x^n$ observamos que no intervalo entre 0 e 1 elas se aproximam cada vez mais do eixo dos x, à medida que n cresce, ao passo que, fora do intervalo citado, se elevam contìnuamente e seus gráficos tendem a confundir-se numa linha paralela ao eixo dos y. Tôdas as curvas passam pelo ponto de coordenadas $x = 1$, $y = 1$, e pela origem.

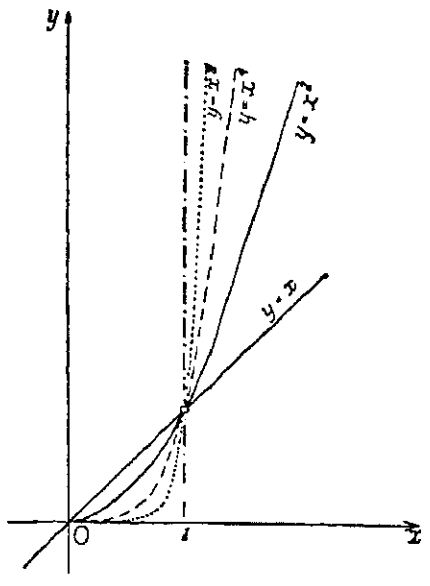


Fig. 16.—x^n à medida que n cresce

No caso das funções $y = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$, as curvas aproximam-se cada vez mais de uma linha paralela ao eixo dos x, à distância 1 acima dêle. Por outro lado, tôdas as curvas devem passar pela origem. No limite, portanto, as curvas se aproximam da linha quebrada formada pela parte do eixo dos y compreendida entre os pontos

$y = 0$ e $y = 1$ e a paralela ao eixo dos x, $y = 1$. Ademais, é claro que as duas figuras estão intimamente relacionadas, como se poderia esperar do fato de que as funções $y = \sqrt[n]{x}$ são, efetivamente, as funções inversas das potências n de x. Deduzimos, daí, que uma figura se transforma na outra, mediante reflexão segundo a linha $y = x$.

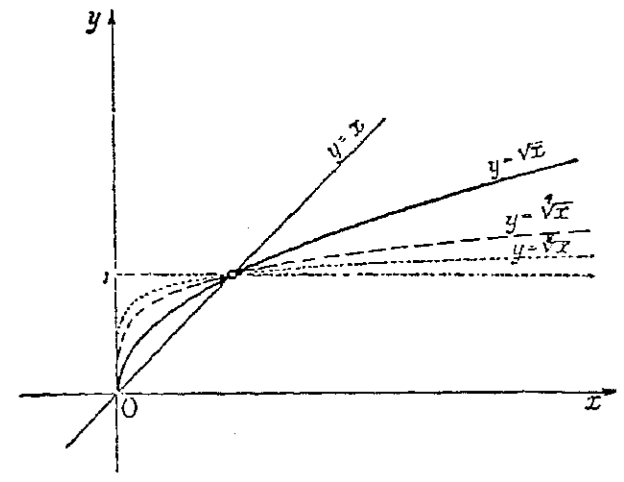


Fig. 17.—$x^{1/n}$ à medida que n cresce

7. Séries geométricas.

Um exemplo de limite, mais ou menos familiar na matemática elementar, é a *série geométrica*

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} = S_n;$$

o número q é chamado *razão comum* da série. O valor desta soma, como sabemos, pode ser expresso sob forma

$$S_n = \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

desde que $q \neq 1$; podemos obter esta expressão multiplicando a soma S_n por q e subtraindo a equação assim obtida da equação original, ou podemos verificar a fórmula por meio da divisão.

Agora, surge a pergunta: que acontece à soma, quando n cresce indefinidamente? A resposta é a seguinte: a soma S_n tem um limite definido S, se q se mantiver entre -1 e $+1$, excluindo-se êstes valores extremos. Então, é verdade que

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n = \frac{1}{1 - q}.$$

A fim de verificar tal afirmativa, escrevemos os números S_n sob a forma $S_n = \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1}{1 - q} - \frac{q^n}{1 - q}$. Já mostramos que, sendo $|q| < 1$ a quantidade q^n,

e, com ela $\dfrac{q^n}{1-q}$, convergem para 0, à medida que n cresce; logo, de acôrdo com a hipótese acima, o número S_n tende, como fôra enunciado, para o limite $\dfrac{1-q}{1}$, à medida que n cresce.

A passagem ao limite $\lim\limits_{n \to \infty} (1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}) = \dfrac{1}{1-q}$ é usualmente expressa dizendo-se que, quando $|q| < 1$, a série geométrica pode ser estendida ao infinito e que a soma *da série geomélrca infinila é* $\dfrac{1}{1-q}$.

As somas S_n das séries geométricas finitas são também denominadas *somas parciais* das séries geométricas infinitas $1 + q + q^2 + \ldots$ (devemos distinguir com clareza as *seqüências de números* $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$, das *séries geométricas*).

O fato das somas parciais S_n das séries geométricas convergirem para o limite $S = \dfrac{1-q}{1}$ à medida que n cresce, pode também ser expresso, dizendo-se que a série geométrica infinita $1 + q + q^2 + \ldots$ *converge* para a soma $S = \dfrac{1}{1-q}$ quando $|q| < 1$.

8. $a_n = \sqrt[n]{n}$.

Demonstraremos que a seqüência de números

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \sqrt{2}, \quad a_3 = \sqrt[3]{3}, \quad \ldots, \quad a_n = \sqrt[n]{n}, \quad \ldots$$

tende para 1 desde que n cresça, isto é,

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Empregaremos, para esta demonstração, um pequeno artifício. Em lugar da seqüência $a_n = \sqrt[n]{n}$, consideraremos a série $b_n = \sqrt{a_n} = \sqrt{\sqrt[n]{n}} = \sqrt[n]{\sqrt{n}}$. Quando $n > 1$, o têrmo b_n é, também, maior do que 1. Podemos, portanto, escrever $b_n = 1 + h_n$, sendo h_n positivo e dependente de n. A desigualdade (1), pág. 31, permite escrever

$$\sqrt{n} = (b_n)^n = (1 + h_n)^n \geqq 1 + nh_n,$$

de modo que

$$h_n \leqq \frac{\sqrt{n} - 1}{n} \leqq \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Temos, agora,

$$1 \leqq a_n = b_n^2 = 1 + 2h_n + h_n^2 \leqq 1 + \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}.$$

O segundo membro desta desigualdade, evidentemente, converge para 1, o mesmo devendo acontecer com a_n.

9. $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}.$

Afirmamos que $\lim\limits_{n \to \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0.$

Para demonstrá-lo, basta escrever a expressão sob a forma

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})\,(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}};$$

vendo-se, em seguida, que a expressão tende para 0, à medida que n cresce.

10. $a_n = \dfrac{n}{\alpha^n}.$

Seja α um número maior do que 1. Afirmamos que, à medida que n cresce, a seqüência de números $a = \dfrac{n}{\alpha^n}$ converge para o limite 0.

Como no caso anterior de $\sqrt[n]{n}$, consideramos a seqüência

$$\sqrt{a_n} = \frac{\sqrt{n}}{(\sqrt{a})^n}.$$

Faremos $\sqrt{\alpha} = 1 + h$. Neste caso $h > 0$, visto que α e, portanto, $\sqrt{\alpha}$ é maior do que 1. A desigualdade (1), pág. 31, nos dá

$$\sqrt{\alpha^n} = (1+h)^n > 1 + nh,$$

de modo que $$\sqrt{a_n} = \frac{\sqrt{n}}{(1+h^n} \leqq \frac{\sqrt{n}}{1+nh} \leqq \frac{\sqrt{n}}{nh} = \frac{1}{h\sqrt{n}}.$$

Logo $$a_n \leqq \frac{1}{nh^2}.$$

Como a_n é positivo e o segundo membro desta equação tende para 0, concluímos que a_n deve também convergir para 0.

EXEMPLOS

1. Demonstrar que $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n^2+n-1}{3n^2+1} = \dfrac{1}{3}$. Determinar um N tal, que para $n > N$, a diferença entre $\dfrac{n^2+n-1}{3n^2+1}$ e $\dfrac{1}{3}$ seja (a) menor do que $\frac{1}{10}$, (b) menor do que $\frac{1}{1000}$, (c) menor do que $\frac{1}{1000000}$.

2. Determinar os limites das seguintes expressões, quando $n \to \infty$:

cada têrmo é menor que o anterior (*seqüência monótona decrescente*), é particularmente fácil responder se elas convergem para um limite. Temos o seguinte teorema:

Tôda seqüência monótona crescente cujos têrmos tenham limite superior (isto é, inferiores a um número fixo), possui limite; da mesma forma, tôda seqüência monótona decrescente cujos têrmos jamais ficam abaixo de uma cota fixa, é limitada. Consideremos êstes resultados como óbvios, por enquanto, recomendando simplesmente ao leitor a demonstração rigorosa do apêndice (pág. 61). Uma seqüência monótona crescente deve, portanto, convergir para um limite que é maior do que qualquer dos têrmos da seqüência, ao passo que nas seqüências monótonas decrescentes os números tendem para um limite que é menor que qualquer dos têrmos considerados. Assim, por exemplo, os números $1/n$ formam uma seqüência monótona decrescente com o limite 0, enquanto que os números $1 - 1/n$ constituem uma seqüência monótona crescente com limite 1.

Em muitos casos é conveniente substituir a condição do crescimento monótono das seqüências pela condição mais geral de que os seus têrmos nunca decresçam; em outras palavras, permitir que os números sucessivos sejam iguais uns aos outros. Neste caso, teremos as *seqüências monótonas não decrescentes* ou *seqüências monótonas crescentes num sentido mais amplo*.

4. Operações com limites.

Concluiremos com uma observação relativa ao cálculo com os limites. Da definição de limite decorre, quase imediatamente, que podemos realizar as operações elementares de adição, multiplicação, subtração e divisão, de acôrdo com as regras seguintes:

Se $a_1, a_2, \ldots$ fôr uma seqüência com o limite a, e $b_1, b_2, \ldots$ outra com o limite b, a seqüência dos números $c_n = a_n + b_n$ também tem limite, e

$$\lim_{n\to\infty} c_n = a + b.$$

A seqüência dos números $c_n = a_n b_n$ converge da mesma maneira, e

$$\lim_{n\to\infty} c_n = ab.$$

Semelhantemente, verifica-se a convergência de $c_n = a_n - b_n$ e

$$\lim_{n\to\infty} c_n = a - b.$$

Desde que o limite b seja diferente de 0, os números $c_n = \frac{a_n}{b_n}$ também convergem, tendo por limite

$$\lim_{n \to \infty} c_n = \frac{a}{b}.$$

Em palavras: podemos *permutar* as operações racionais de cálculo, com o processo de formação dos limites; isto é, obtemos o mesmo resultado executando, primeiramente, a passagem ao limite e, depois, uma operação racional, ou procedendo de maneira inversa.

Para demonstração destas regras simples é suficiente dar um exemplo; usando-o como modêlo, o leitor poderá estabelecer os outros casos por si mesmo. Consideremos, pois, a multiplicação dos limites. As relações $a_n \to a$ e $b_n \to b$ significam o seguinte: se escolhermos um número positivo qualquer ϵ, necessitaremos apenas tomar n maior do que N, onde $N = N(\epsilon)$ é um número suficientemente grande que depende de ϵ, a fim de têrmos, simultâneamente,

$$| a - a_n | < \epsilon \quad \text{e} \quad | b - b_n | < \epsilon.$$

Se escrevermos $ab - a_nb_n = b(a - a_n) + a_n(b - b_n)$, lembrando-nos que existe um limite positivo M, independente de n, tal que $| a_n | < M$, obteremos

$$| ab - a_nb_n | \leqq | b | \, | a - a_n | + | a_n | \, | b - b_n | < (| b | + M)\epsilon.$$

Já que a quantidade $(| b | + M)\epsilon$ pode ser tão pequena quanto desejarmos, pela escolha de ϵ suficientemente pequeno, vemos que a diferença entre ab e a_nb_n torna-se, efetivamente, tão pequena quanto quisermos para todos os valores suficientemente grandes de n, o que é, precisamente, a afirmação contida na equação

$$ab = \lim_{n \to \infty} a_nb_n.$$

Por meio destas regras podem-se avaliar inúmeros limites com facilidade; por exemplo

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^2 - 1}{n^2 + n + 1} = \lim_{n \to \infty} \frac{1 - \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} = 1,$$

visto que, na segunda expressão, a passagem ao limite, tanto no numerador como no denominador, pode ser feita diretamente.

Existe outra regra simples e óbvia, digna de menção. *Se* $\lim a_n = a$ e $\lim b_n = b$, *e se, além disso,* $a_n > b_n$ *para cada* n, *teremos* $a \geqq b$.

Entretanto, de modo algum podemos esperar que, em geral, a seja *maior* do que b, como se mostrou no caso das seqüências $a_n = 1/n$, $b_n = 1/2n$, para as quais $a = 0 = b$.

5. O número *e*.

Como primeiro exemplo da geração de um número, cujo valor não pode ser estabelecido *a priori* como limite de uma seqüência de números conhecidos, consideremos as somas

$$S_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}.$$

Afirmamos que, à medida que n cresce, êsses números S_n convergem para um limite definido.

A fim de demonstrar a existência do limite, observemos que as somas S_n crescem monòtonamente, à medida que n cresce. Para todos os valores de n temos também

$$S_n \leqq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} < 3.$$

Os números S_n têm, portanto, para limite superior 3 e, sendo a seqüência monótona crescente, possuem limite, que designaremos por e:

$$e = \lim_{n \to \infty} S_n.$$

Além disso, afirmamos que o número e, definido como o limite acima, é, também, o limite da seqüência

$$T_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

A demonstração é simples e, ao mesmo tempo, constitui um exemplo instrutivo de operações com limites. De acôrdo com o teorema do binômio, que consideramos conhecido,

$$\begin{aligned} T_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\ &= 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots 1}{n!}\frac{1}{n^n} \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \ldots \\ &\quad + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right). \end{aligned}$$

Vemos imediatamente que $T_n \leqq S_n$, e que os T_n formam também uma seqüência monótona crescente [1], donde se deduz a existência do limite $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = T$. Para provar que $T = e$, observemos que

$$T_m > 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{m}\right) + \dots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{m}\right),$$

desde que $m > n$. Se fixarmos n, deixando m crescer além de qualquer limite, obteremos, à esquerda, o número T e, à direita, a expressão S_n, de modo que $T \geqq S_n$. Estabelecemos, assim, a relação $T_n \geqq S_n \geqq T_n$, para todos os valores de n. Podemos, agora, deixar n crescer, de tal sorte que T_n tenda para T. Da dupla desigualdade segue-se $T = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = e$, o que representa o enunciado que queríamos provar.

Mais adiante (cap. III, § 6, pág. 172) trataremos novamente do número e, porém, sob outro ponto de vista.

6. O número π como limite.

Um processo de limite que, na sua essência, remonta à antiguidade clássica (Arquimedes) é o que permite a definição do número π. Geomètricamente, π representa a área do círculo de raio 1. Aceitaremos, pois, a existência dêste número como intuitiva e admitiremos como evidente que tal área possa ser representada por um número (racional ou irracional), o qual será designado, simplesmente, por π. Esta definição, contudo, não será de grande auxílio, se desejarmos calcular o número com relativa precisão. Não temos, portanto, que escolher o número, mas sim representá-lo, como limite de uma seqüência de números conhecidos e fàcilmente calculáveis, isto é, por meio de um processo de limite. O próprio Arquimedes empregou êste processo no seu método de exaustão, pelo qual chegava cada vez mais perto do círculo, partindo de polígonos regulares com número crescente de lados, que se iam adaptando mais e mais à circunferência. Se designarmos a área de um polígono regular de m lados, inscrito no círculo,

(1) Podemos obter T_{n+1} de T_n, substituindo os fatôres $1 - 1/n$, $1 - 2/n$, ... pelos fatôres maiores $1 - \frac{1}{n+1}$, $1 - \frac{2}{n+1}$, ... e, finalmente, somando um têrmo positivo.

por f_m, a área do polígono inscrito com $2m$ lados será dada pela fórmula (demonstrada na geometria elementar)

$$f_{2m} = \frac{2}{m}\sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \left(\frac{2f_m}{m}\right)^2}}.$$

Façamos, agora, m variar, não segundo a sucessão de todos os inteiros positivos, mas, sim, conforme a seqüência das potências de 2, isto é, $m = 2^n$; em outras palavras, formemos polígonos regulares cujos vértices são obtidos pela bisseção repetida da circunferência. A área do círculo será, então, dada pelo limite

$$\pi = \lim_{n\to\infty} f_{2^n}.$$

A representação de π como limite serve, efetivamente, de base para os cálculos numéricos. Partindo, por exemplo, de um valor $f_4 = 2$, podemos calcular os têrmos da seqüência que converge para π. A avaliação da precisão com que qualquer têrmo f_{2^n} representa π, pode ser constatada pela construção das linhas que tocam o círculo, paralelas aos lados do polígono inscrito de 2^n lados. Tais linhas formam um polígono circunscrito, semelhante ao inscrito de 2^n lados, tendo suas dimensões majoradas na proporção $1 : \cos \frac{\pi}{2^{n-1}}$. A área F_{2^n} do polígono circunscrito é, portanto, dada por

$$\frac{f_{2^n}}{F_{2^n}} = \left(\cos\frac{\pi}{2^{n-1}}\right)^2.$$

Como a área do polígono circunscrito é, evidentemente, maior do que a do círculo, temos

$$f_{2^n} < \pi < F_{2^n} = \frac{f_{2^n}}{\left(\cos\frac{\pi}{2^{n-1}}\right)^2}.$$

Consideramos o leitor mais ou menos familiarizado com êstes assuntos. O que, porém, desejamos salientar é que o cálculo de áreas por meio de exaustão de áreas de figuras retilíneas fàcilmente calculáveis, constitui o conceito básico da integral, o qual será introduzido no próximo capítulo (pág. 76).

Exemplos

1.° (a) Substituir o enunciado a "seqüência a_n não é, em absoluto, limitada", por outro equivalente, sem empregar as palavras "limitada" ou "ilimitada".

(b) Substituir o enunciado "a seqüência a_n é divergente" por outro equivalente, não envolvendo as palavras "convergente" ou "divergente".

2.* Sejam a_1 e b_1 dois números positivos e $a_1 < b_1$. Definamos a_2 e b_2 por meio das equações

$$a_2 = \sqrt{a_1 b_1}, \quad b_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}.$$

Da mesma forma, sejam $\quad a_3 = \sqrt{a_2 b_2}, \quad b_3 = \dfrac{a_2 + b_2}{2},$

e, em geral, $\quad a_n = \sqrt{a_{n-1} b_{n-1}}, \quad b_n = \dfrac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}.$

Demonstrar (a) que a seqüência $a_1, a_2, \ldots,$ converge, (b) que a seqüência $b_1, b_2, \ldots,$ converge, (c) que as duas seqüência têm o mesmo limite. (Este limite é denominado a *média aritmético-geométrica* de a_1 e b_1).

3.* Provar que, se $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \xi$, $\lim\limits_{n \to \infty} \sigma_n = \xi$, sendo σ_n a média aritmética $(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)/n$.

4. Se $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \xi$, mostrar que a média aritmética das médias aritméticas σ_n tende para ξ.

5. Calcular o êrro cometido quando se emprega $S_n = 1 + \dfrac{1}{1!} + \ldots + \dfrac{1}{n!}$, como aproximação de e. Determinar e com cinco decimais exatas.

7. Conceito de limite quando a variável é contínua

Até aqui consideramos os limites de seqüências, isto é, das funções de uma variável inteira n. A noção de limite, entretanto, ocorre freqüentemente relacionada com os conceitos de variável contínua x e de função $f(x)$.

Estabelecemos que o valor da função $f(x)$ tende para um limite l, à medida que x tende para ξ, ou, em símbolos,

$$\lim_{x \to \xi} f(x) = l,$$

se todos os valores da função $f(x)$, para os quais x está situado bastante perto de ξ, diferirem arbitràriamente pouco de l. Esta condição é expressa mais precisamente da forma seguinte:

Dada uma quantidade positiva ϵ, arbitràriamente pequena, podemos determinar, em tôrno de ξ, um intervalo $|x - \xi| < \delta$ tão pequeno que, para cada ponto x dêste intervalo, diferente do próprio ξ, verifica-se a desigualdade $|f(x) - l| < \epsilon$.

Excluímos, expressamente, a igualdade entre x e ξ, assim procedendo para maior simplicidade e para obtermos a definição sob o aspecto mais conveniente para as aplicações, por exemplo, no caso em

que $f(x)$ não estiver definida no ponto ξ, embora o esteja para todos os outros pontos vizinhos de ξ (pág. 159).

Se a função fôr definida, ou considerada apenas em um determinado intervalo, por exemplo, $\sqrt{1 - x^2}$ para $-1 \leqq x \leqq 1$, devemos restringir os valores de x a êste intervalo. Assim, se ξ designar um extremo do intervalo, x aproxima-se de ξ por meio de valores situados sòmente de um lado de ξ (limite a partir do interior do intervalo ou limite unilateral).

Como decorrência imediata desta definição, temos o seguinte: se $\lim_{x \to \xi} f(x) = l$, e $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ fôr uma seqüência de números, todos diferentes de ξ, mas aproximando-se dêle como limite, então $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = l$.

Seja ϵ um número positivo qualquer. Mostraremos que, para todos os valores de n maiores do que um determinado n_0, tem-se a desigualdade

$$|f(x_n) - l| < \epsilon.$$

Por definição, existe um $\delta > 0$ tal que, sempre que $|x - \xi| < \delta$, a desigualdade

$$|f(x) - l| < \epsilon$$

é verdadeira. Visto que $x_n \to \xi$, a relação $|x_n - \xi| < \delta$ é satisfeita para todos os valores de n suficientemente grandes. Para tais valores, $|f(x_n) - l| < \epsilon$, como queríamos provar.

Procuremos, agora, esclarecer esta definição abstrata por meio de exemplos simples. Consideremos, primeiramente, a função

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x},$$

definida para $x \neq 0$. Afirmamos que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

Não podemos provar o enunciado proposto pela simples passagem ao limite do numerador e denominador separadamente, porque êles se anulam para $x = 0$ e o símbolo $0/0$ nada significa. Efetuaremos a demonstração da maneira seguinte.

A comparação das áreas dos triângulos OAB e OAC e do setor OAB da figura 18, mostra que, se $0 < x < \pi/2$,

$$\operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x.$$

Daí decorre que, se $0 < |x| < \pi/2$,

$$1 < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{1}{\cos x}.$$

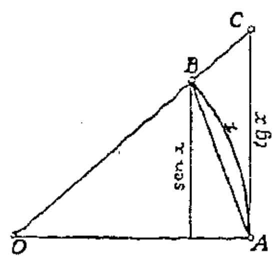


Fig. 18

Logo, o quociente $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ fica situado entre os números 1 e $\cos x$. Sabemos que $\cos x$ converge para 1 à medida que $x \to 0$, e isto quer dizer que o quociente $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ pode diferir arbitràriamente pouco de 1, desde que x esteja bastante próximo de 0. Êste é o significado exato da equação que devia ser demonstrada.

Do resultado obtido deduz-se que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} = 1,$$

e, também,

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0.$$

Esta relação decorre da fórmula, válida para $0 < |x| < \pi/2$,

$$\frac{1 - \cos x}{x} = \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x(1 + \cos x)} = \frac{1 - \cos^2 x}{x(1 + \cos x)}$$

$$= \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{1}{1 + \cos x} \cdot \operatorname{sen} x.$$

À medida que $x \to 0$, o primeiro fator da direita tende para 1, o segundo para $\frac{1}{2}$, e o terceiro, para 0, convergindo, pois, o produto para 0, como foi enunciado.

Dividindo-se a mesma fórmula por x, obtemos

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} = \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2 \frac{1}{1 + \cos x},$$

donde

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Finalmente, consideremos a função $\sqrt{x^2}$, definida por todos os valores de x. Esta função nunca é negativa, sendo igual a x para $x \geqq 0$ e a $-x$ para $x < 0$. Em outras palavras, $\sqrt{x^2} = |x|$. Conseqüentemente, a função $\sqrt{x^2}/x$, definida para todos os valores de x, diferentes de zero, tem o valor $+1$ quando $x > 0$ e -1 quando $x < 0$. É, portanto, impossível a existência do limite $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x^2}/x$, visto que podemos

encontrar valores de x arbitràriamente perto de 0 para os quais o quociente é $+1$ e outros para os quais êle vale -1.

Concluindo a discussão sôbre limites relativos às variáveis contínuas, observemos que é, efetivamente, possível considerarmos processos limites nos quais a variável contínua x cresce além de qualquer limitação. Por exemplo, o significado da equação

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\dfrac{1}{x^2}}{1-\dfrac{1}{x^2}} = 1$$

torna-se claro, sem necessidade de discussão. Êle indica que a função da esquerda difere arbitràriamente pouco de 1, desde que x seja suficientemente grande.

Nestes exemplos, procedemos como se as operações com limites, no caso de variáveis contínuas, obedecessem às mesmas leis que as seqüências. O leitor poderá fazer a verificação por si mesmo, visto que as demonstrações são essencialmente as mesmas que para os limites das seqüências.

Exemplos

1. Determinar os limites seguintes, dando, em cada caso, o teorema que o justifica:

(a) $\lim\limits_{x\to 2} 3x.$ (c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+2x-1}{2x+2}.$

(b) $\lim\limits_{x\to 3} 4x+3.$ (d) $\lim\limits_{x\to 2} \sqrt{5+\sqrt[3]{2x^5}}.$

2. Demonstrar que

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^n-1}{x-1} = n;$ (b) $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\operatorname{sen} x}{\pi - x} = 1;$ (c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2)}{x} = 0.$

3. Verificar se os limites seguintes existem ou não, e, no caso afirmativo, determinar os seus valores:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-x}}{x};$ (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}}{x};$ (c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}.$

8. Conceito de continuidade

1. Definições.

Já ilustramos a noção de continuidade no § 2 (pág. 19) por meio de exemplos. Agora, com o auxílio da idéia de limite, estamos em condições de precisar tal definição.

Consideramos o gráfico de uma função contínua em um intervalo como sendo uma curva constituída de um segmento inteiro; estabelecemos ainda que a mudança na função y deve permanecer arbitràriamente pequena, contanto que a variação da variável independente x f que restringida a um intervalo suficientemente pequeno. Estas hipóteses são usualmente formuladas como segue, com maior prolixidade, porém, com maior precisão Diz-se que uma função $f(x)$ é contínua no ponto ξ, se o valor de $f(\xi)$ fôr se aproximando, com um grau de precisão ϵ, preestabelecido, de todos os valores de $f(x)$, para os quais x estiver suficientemente próximo de ξ. Em outras palavras, $f(x)$ é contínua em ξ, se para qualquer número positivo ϵ, arbitràriamente pequeno, puder ser determinado outro número positivo $\delta = \delta(\epsilon)$, tal que $|f(x) - f(\xi)| < \epsilon$ (fig. 19) para todos os pontos x para os quais $|x - \xi| < \delta$. Ou ainda: a condição de continuidade requer que a equação entre limites

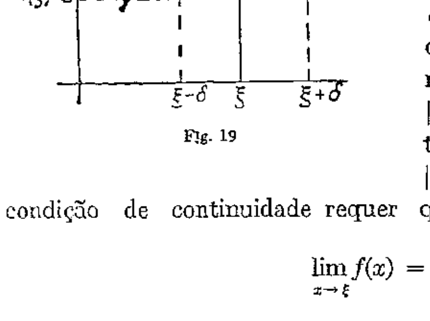


Fig. 19

$$\lim_{x \to \xi} f(x) = f(\xi)$$

seja verificada para o ponto ξ. O valor da função no ponto ξ é o mesmo que o limite dos valores de $f(x_n)$ para uma seqüência arbitrária qualquer, x_n, de números que convergem para ξ.

É importante observar que a condição acima encerra duas afirmações diferentes: (1) a *existência* do limite $\lim_{x \to \xi} f(x)$, e, (2), a *coincidência* dêste limite com $f(\xi)$, isto é, o valor da função no ponto ξ.

Definida a continuidade de uma função $f(x)$ num ponto ξ, estabeleçamos o que entendemos por *continuidade de uma função* f(x) *num intervalo*. Esta definição pode ser obtida, fàcilmente, do modo seguinte: a função $f(x)$ é contínua num intervalo se fôr contínua em cada ponto dêste intervalo. De uma maneira precisa, tal afirmação requer que, se fôr dado um número positivo ϵ, exista, para cada ponto x do inter-

valo, um número positivo δ, dependente, em geral, de ϵ e de x, tal que

$$|f(\overline{x}) - f(x)| < \epsilon \text{ se } |\overline{x} - x| < \delta,$$

estando $\overline{x}$ situado no intervalo $a \leqq \overline{x} \leqq b$.

Ìntimamente ligado com êste, há o conceito de *continuidade uniforme*. A função $f(x)$ é *uniformemente* contínua no intervalo $a \leqq x \leqq b$ se, para cada número positivo ϵ, houver um número positivo correspondente δ, tal que, para cada par de pontos x_1, x_2 do intervalo cuja distância $|x_1 - x_2|$ é menor do que δ, se verifique a desigualdade $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$. Tal conceito difere do estabelecido acima, porque δ, na definição da continuidade uniforme, não depende de x, sendo igualmente válido em relação a todos os valores de x. Daí o nome de continuidade uniforme.

É claro que uma função uniformemente contínua é, necessàriamente, contínua. Inversamente, pode ser demonstrado que tôda função $f(x)$, contínua no intervalo *fechado* $a \leqq x \leqq b$, é também uniformemente contínua. Deixamos esta exposição para o apêndice (pág. 64) e, embora o leitor não queira estudá-la no momento, ser-lhe-á útil examinar os exemplos apresentados no início do apêndice I, § 2, n.º 2 (pág. 65). Contudo, mesmo antes de estudar a demonstração, admitiremos que, sempre que mencionarmos uma função contínua num intervalo fechado, nos referimos à continuidade uniforme.

2. Pontos de descontinuidade.

O conceito de continuidade é mais fàcilmente apreendido, quando estudamos o seu oposto, o conceito de descontinuidade. Os tipos mais simples de descontinuidade ocorrem nos pontos onde a função dá um *salto*, isto é, nos quais apresenta limites definidos e diferentes, conforme x se aproxime do ponto, pela direita ou pela esquerda. A forma ou a inexistência de definição da função no ponto de descontinuidade não altera o problema.

Por exemplo, a função $f(x)$ definida pelas equações

$$f(x) = 0 \text{ para } x^2 > 1, \quad f(x) = 1 \text{ para } x^2 < 1, \quad f(x) = \tfrac{1}{2} \text{ para } x^2 = 1$$

tem descontinuidades nos pontos $\xi = 1$ e $\xi = -1$. Os limites, quando nos aproximamos dêstes pontos, tanto pela direita como pela esquarda, diferem de 1. Os valores da função coincidem não com qualquer limite, nestes pontos, porém são iguais à média aritmética dos dois limites.

Notemos, de passagem, que a função pode ser representada, utilizando-se a idéia de limite, pela expressão

$$f(x) = \lim_{n \to 0} \frac{1}{1 + x^{2n}}.$$

Se $x^2 < 1$, isto é, se x ficar compreendido no intervalo $-1 < x < 1$, os números x^{2n} terão o limite 0, e a função assumirá o valor 1. Se, entretanto, $x^2 > 1$, à medida que n cresce, x^{2n} crescerá além de qualquer limite e a função terá o valor 0. Final-

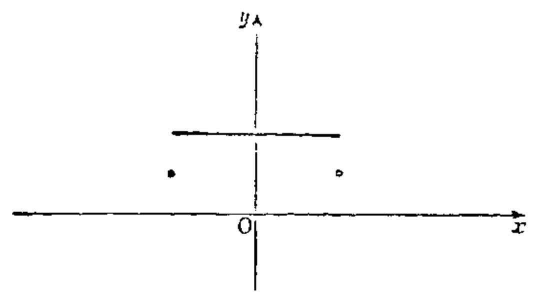


Fig. 20

mente, se $x^2 = 1$, isto é, para $x = +1$ e $x = -1$, a função admite simplesmente o valor ½ (fig 20).

Outras curvas descontínuas (com saltos), estão representadas nas figuras 21*a* e 21*b*. Elas traduzem funções com descontinuidades evidentes.

Nos casos de descontinuidades desta natureza existem limites tanto à direita como à esquerda. Passaremos, agora, à consideração de descontinuidades em que não se verificam tais limites. As mais importantes são as *descontinuidades infinitas*. São descontinuidades como as apresentadas pelas funções $1/x$ ou $1/x^2$ no ponto $\xi = 0$.

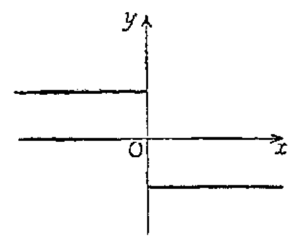


Fig 21*a*

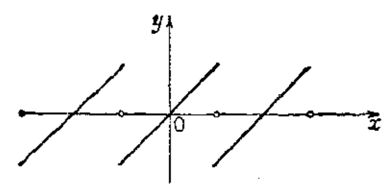


Fig. 21*b*

À medida que $x \to \xi$ o valor absoluto $|f(x)|$ da função cresce além de qualquer limite. No caso de $1/x$, a função cresce, numèricamente além de tôda a limitação através de valores positivos e negativos, respectivamente, à medida que x se aproxima da origem pela direita ou pela esquerda. Por outro lado, a função $1/x^2$ tem, para $x = 0$, uma descontuinidade infinita, na qual o valor da função se torna positivamente infinito a partir de ambos os lados (fig. 6, pág. 18, e fig. 12, pág. 22). A fun-

ção $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$, desenhada na figura 22, tem descontinuidades infinitas tanto em $x = 1$ como em $x = -1$.

Finalmente, ilustraremos por meio de um exemplo, outro tipo de descontinuidade, no qual não existem limites, nem à direita, nem à esquerda. Seja a função

$$y = \operatorname{sen} \frac{1}{x},$$

definida para todos os valores diferentes de zero. Esta função admite qualquer

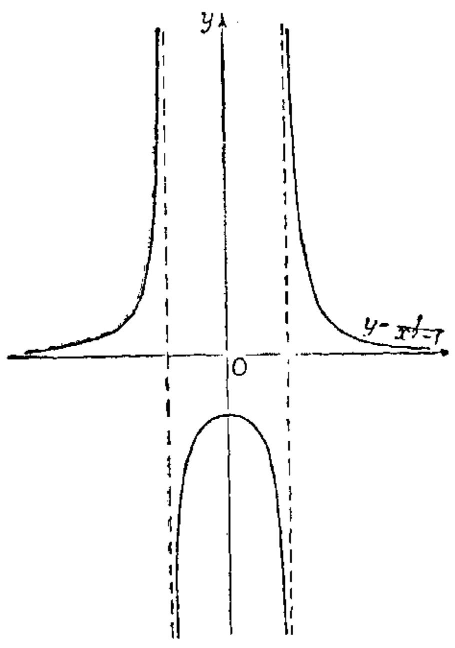


Fig. 22.—Função com descontinuidades infinitas

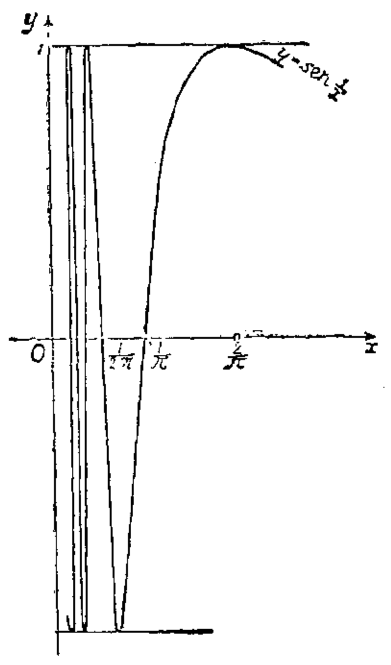


Fig. 23.—Função oscilante com descontinuidade

valor entre -1 e $+1$, quando $1/x$ varia entre $(2n - \frac{1}{2})\pi$ e $(2n + \frac{1}{2})\pi$, qualquer que seja o valor do inteiro n. Nos pontos $x = \dfrac{2}{(4n - 1)\pi}$ a função valerá -1 e, nos pontos $x = \dfrac{2}{(4n + 1)\pi}$ terá o valor $+1$. Vemos, portanto, que a função oscila para a frente e para trás, cada vez mais ràpidamente, entre os valores $+1$ e -1, à medida que x se aproxima mais e mais do ponto $x = 0$, e que, na vizinhança imediata de $x = 0$, ocorre um número infinito de oscilações (fig. 23).

É interessante observar que, em contraste com o exemplo acima, a função $y = x \operatorname{sen} 1/x$ (fig. 24) permanece contínua no ponto $x = 0$, se lhe atribuirmos o valor 0 em tal ponto. Esta continuidade é devida ao fato de que, à medida que nos

aproximamos da origem, o fator x amortece as oscilações do seno. Contudo, na proximidade da origem, a função $y = x \operatorname{sen} 1/x$ não passa do crescimento para o decrescimento monótono um número *finito* de vêzes. Pelo contrário, ela oscila para a frente e para trás um número infinito de vêzes, tornando-se a amplitude destas oscilações tão pequena quanto quisermos, à medida que nos aproximamos da origem. Êste exemplo mostra que, mesmo a idéia simples de continuidade, permite tôda a sorte de possibilidades notáveis, estranhas à intuição comum.

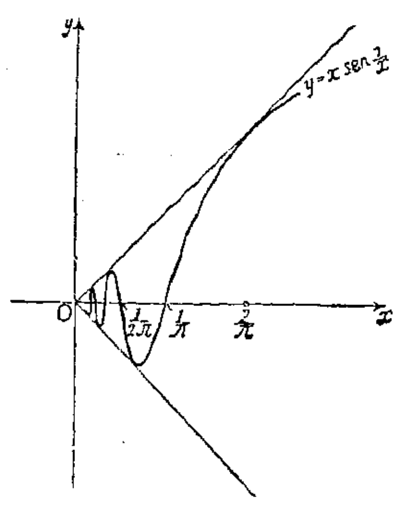


Fig. 24.—Função contínua oscilante

Há um fato importante que deve ser considerado quando quisermos dar maior precisão às nossas idéias. Pode acontecer que, num certo ponto, a função não seja definida pela lei primitiva, como, por exemplo, no ponto $x = 0$, nos dois últimos exemplos apresentados. Podemos, então, estender a definição da função, dando-lhe o valor que quisermos em tal ponto. No último exemplo, entretanto, podemos estender a definição de tal modo que a função se mantenha *contínua* no ponto considerado, fazendo $y = 0$, quando $x = 0$. Isto pode ser feito sempre que existirem ambos os limites à esquerda e à direita e quando forem iguais entre si. Basta, então, fazermos o valor da função igual a êstes limites, de modo a torná-la contínua, no ponto considerado. Com a função $y = \operatorname{sen} 1/x$, tal não é possível.

3. Teoremas sôbre funções contínuas.

Concluindo, enunciaremos os seguintes importantes teoremas gerais, cujas demonstrações decorrem imediatamente das observações sôbre as operações com limites (pág. 41):

A soma, a diferença e o produto de duas funções contínuas são, elas próprias, funções contínuas. O quociente de duas funções contínuas é uma função contínua em todos os pontos em que o denominador não se anular.

Em particular tôdas as funções polinomiais e tôdas as funções racionais não contínuas, exceto nos pontos onde o denominador se

anula. O fato de outras funções elementares, tais como as trigonométricas, serem contínuas, decorrerá naturalmente de considerações ulteriores (págs. 69, 97).

Exemplos

1. Demonstrar que

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}}{\operatorname{sen} x} = 0.$$

2. Provar que

$$(a)\ \lim_{x\to\alpha} \frac{\operatorname{sen}(x-\alpha)}{x^2-\alpha^2} = \frac{1}{2\alpha}; \qquad (b)\ \lim_{x\to\infty} \frac{x+\cos x}{x+1} = 1;$$

$$(c)\ \lim_{x\to\infty} \cos 1/x = 1.$$

3. (*a*) Seja $f(x)$ definida pela equação $y = 6x$. Determinar um δ, dependendo de ξ, tão pequeno que $|f(x) - f(\xi)| < \epsilon$ sempre que $|x - \xi| < \delta$, onde (1) $\epsilon = 1/10$; (2) $\epsilon = 1/100$; (3) $\epsilon = 1/1\,000$.

Fazer o mesmo para
(*b*) $f(x) = x^2 - 2x$;
(*c*) $f(x) = 3x^4 + x^2 - 7$;
(*d*) $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geqq 0$;
(*e*) $f(x) = \sqrt{x^2}$

4. (*a*) Seja $f(x) = 6x$ no intervalo $\leqq x \leqq 10$. Calcular δ tão pequeno que $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$ sempre que $|x_1 - x_2| < \delta$, onde (1) $\epsilon = 1/100$; (2) ϵ é arbitrário, > 0.

Fazer o mesmo para
(*b*) $f(x) = x^2 - 2x$, $-1 \leqq x \leqq 1$;
(*c*) $f(x) = 3x^4 + x^2 - 7$, $2 \leqq x \leqq 4$;
(*d*) $f(x) = \sqrt{x}$, $0 \leqq x \leqq 4$;
(*e*) $f(x) = \sqrt{x^2}$, $-2 \leqq x \leqq 2$.

5. Determinar, entre as funções seguintes, quais as contínuas. Estabelecer os pontos de descontinuidade para as descontínuas.

(*a*) $x^2 \operatorname{sen} x$.
(*b*) $x \operatorname{sen}^2(x^2)$.
(*c*) $\dfrac{1}{x} \operatorname{sen} x$.
(*d*) $\dfrac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}}$.
(*e*) $\dfrac{x^3 + 3x + 7}{x^2 - 6x + 8}$.
(*f*) $\dfrac{x^3 + 3x + 7}{x^2 - 6x + 9}$.
(*g*) $\dfrac{x^3 + 3x + 7}{x^2 - 6x + 10}$.
(*h*) $\operatorname{tg} x$.
(*i*) $\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$.
(*j*) $\cot x$.
(*k*) $\dfrac{1}{\cos x}$.
(*l*) $x \operatorname{cotg} x$.
(*m*) $(\pi - x) \operatorname{tg} x$.

APÊNDICE I AO CAPÍTULO I

OBSERVAÇÕES PRELIMINARES

Na matemática dos gregos encontramos uma extensa aplicação do princípio de que todos os teoremas devem ser demonstrados de forma lògicamente coerente, mediante sua redução a um conjunto de axiomas, em número tão pequeno quanto possível, os quais não são provados. Êste método axiomático de apresentação, que serviu como critério para o rigor da investigação, foi considerado, no início da era moderna, como modêlo para outros ramos do conhecimento. Por exemplo, na filosofia, homens como Descartes e Espinosa acreditavam ter tornado suas investigações mais convincentes apresentando-as axiomàticamente ou, como êles próprios diziam, "geomètricamente".

O mesmo, porém, não aconteceu com a matemática moderna, que começou a desenvolver-se quase ao mesmo tempo que a nova filosofia. Em matemática, o princípio da redução a axiomas é freqüentemente pôsto de lado, surgindo a prova intuitiva, em cada caso isolado, como o método favorito de demonstração. Mesmo no caso de cientistas de primeira categoria encontramos operações com êstes novos conceitos, baseados, principalmente, sôbre a intuição de resultados corretos, nem sempre livres de associações místicas — particularmente no caso das nefastas "quantidades infinitamente pequenas" ou "infinitesimais". Fé cega na onipotência dos novos métodos conduziu o investigador por caminhos que nunca teria podido percorrer, caso estivesse sujeito às limitações impostas por um rigorismo puro. E não nos deve admirar que sòmente o instinto seguro de um grande mestre pudesse evitar os erros crassos, precavendo-se contra êles.

Felizmente, as correntes antagônicas que surgiram no século XVIII e atingiram pleno desenvolvimento no século XIX, não intentaram pôr à prova o desenvolvimento da matemática moderna, mas limitaram-se a estabelecer e estender os seus resultados. A necessidade, porém, de uma investigação crítica e da consolidação dos progressos feitos cresceu, gradativamente, de tal modo, que a sua realização, no século XIX, é justamente considerada como uma das maiores façanhas da matemática.

No cálculo diferencial e integral a obra crítica de Cauchy foi particularmente importante. Formulando os conceitos fundamentais de modo claro e satisfatório, Cauchy desenvolveu, em várias direções, a obra iniciada no século XVIII, relativa à apresentação da análise superior de forma inteligível, livre de dúvidas e incertezas devidas ao uso dos infinitesimais.

O mais importante que restava fazer era substituir as considerações intuitivas, nas demonstrações e discussões, por considerações de análise pura, baseadas, ùnicamente, sôbre números ou sôbre operações que podem ser efetuadas com os números — como dizemos atualmente, era preciso "aritmetizar" a análise. Na realidade, os espíritos preparados para a crítica sentem que há algo de insatisfatório no apêlo à intuição em demonstrações analíticas. Não necessitamos penetrar no âmago da questão relativa à "precisão" ou "imprecisão" da intuição ou da existência da "intuição pura *a priori*" no sentido estabelecido por Kant, para reconhecer que o pensamento intuitivo comum inclui muitas imprecisões que impedem o acesso rigoroso às provas exigidas pela análise. Nos capítulos seguintes esta constatação nos aparecerá de modo cada vez mais claro. Mencionamos aqui, como exemplo, a dificuldade que existe em apreender, intuitivamente, o conceito de curva contínua. Uma curva contínua não necessita, de modo alguma, possuir uma direção definida em cada ponto. De fato, existem curvas contínuas que não possuem direção em *nenhum* ponto e curvas contínuas a que não podemos atribuir qualquer comprimento. Em face de tais resultados, mesmo o principiante sentirá a necessidade de uma análise "aritmética" ([1]).

Todavia, não nos devemos esquecer que foi possível um século de brilhante e frutífero desenvolvimento da matemática antes que tais exigências fôssem satisfeitas. Apesar de todos os seus defeitos, a intuição continuará sendo a fôrça propulsora mais importante da descoberta matemática, e sòmente ela pode construir a ponte que liga a teoria às aplicações.

Seguiremos Bolzano e Weierstrass no desenvolvimento das diretivas de pensamento que deram como resultado as rigorosas e completas demonstrações dos teoremas que formulamos, por processos intuitivos, no primeiro capítulo.

([1]) Conceitos matemáticos rigorosos são sempre formas altamente desenvolvidas de idéias que se originam intuitivamente. Logo, é absolutamente impossível dispor os problemas relacionados com os fundamentos básicos da matemática, recorrendo ùnicamente à intuição comum.

1. PRINCÍPIO DO PONTO DE ACUMULAÇÃO E SUAS APLICAÇÕES

1. Princípio do ponto de acumulação.

Na discussão rigorosa dos fundamentos da análise, a parte principal é representada pelo *princípio do ponto de a umulação* de Weierstrass. Do ponto de vista intuitivo, êste princípio importa, simplesmente, na exposição de um fato comum; mas, justamente porque resume um estado de coisas que ocorre freqüentemente, êle é tão importante quanto uma pequena alteração na vida diária. O princípio se enuncia da forma seguinte:

Se um intervalo finito contêm uma infinidade de números, êstes possuem ao menos um ponto de acumulação isto é, há, no mínimo, um ponto ξ tal que, em cada intervalo, por menor que êste seja, em tôrno de ξ, existe uma infinidade de números dados.

A fim de provar aritmèticamente o princípio do ponto de acumulação, admitiremos, de início, que o intervalo dado seja o de 0 até 1. Dividiremos, agora, êste intervalo em 10 partes iguais, por meio de pontos 0,1, 0,2, ..., 0,9. Ao menos um dêstes subintervalos deve conter uma infinidade de pontos. Suponhamos que o intervalo que começa com o número $0{,}a_1$ seja aquêle (ou um daquêles se houver vários) que tem a propriedade mencionada. Subdividiremos, agora, êste intervalo em dez partes iguais, empregando os pontos de subdivisão $0.a_11$, $0.a_22$, ..., $0{,}a_19$. Novamente será verdade que, no mínimo, um dêsses subintervalos deve conter uma infinidade de pontos; admitamos que seja o subintervalo que começa com o número $0{,}a_1a_2$. Mais uma vez o subdividiremos em dez partes — notando que uma dessas partes deve conter uma infinidade de pontos — e continuaremos o processo. Consideremos, agora, o número decimal

$$\xi = 0{,}a_1a_2a_3 \ldots .$$

É claro que êste representa um ponto de acumulação para o nosso conjunto de números. Cada intervalo, por menor que seja, em cujo interior estiver situado o ponto ξ, conterá subintervalos do nosso sistema de subdivisão com um certo grau de precisão em diante, e êstes subintervalos contêm uma infinidade de números do conjunto.

Se o intervalo considerado, em lugar de ser o intervalo desde 0 a 1, fôsse, digamos, o intervalo desde a até $a + h$, nada de essencial seria alterado no ra-

ciocínio acima. O ponto de acumulação é, pois, representado, simplesmente, por um número da forma

$$a + h \times 0, a_1 a_2 a_3 \ldots .$$

2. Limites das seqüências.

As considerações acima projetam nova luz sôbre o conceito de limite das seqüências infinitas de números $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$. Em primeiro lugar consideremos o caso excepcional em que uma infinidade de números da seqüência são iguais entre si, e estenderemos nossa definição, aplicando, também, a denominação de "ponto de acumulação" a êste ponto (ou a êstes pontos). Se existir uma infinidade de números diferentes na seqüência, e admitirmos que os seus números a_n são "ilimitados", isto é, que há um número M tal que a desigualdade $|a_n| < M$ se verifique para todos os valores de n, os têrmos de seqüência formam um conjunto infinito de números num intervalo finito, visto estarem todos situados entre $-M$ e M. Êles devem, portanto, possuir pelo menos um ponto de acumulação (ξ). Se existir sòmente *um* ponto de acumulação, é fácil demonstrar que a seqüência é convergente e que o seu limite é ξ. Marquemos um intervalo, arbitràriamente pequeno, em tôrno do número ξ. Se houvesse uma infinidade de pontos da seqüência fora do intervalo, êles teriam outro limite, diferente de ξ, o que é contrário à hipótese. Portanto, sòmente um número finito de têrmos da seqüência é exterior ao intervalo e, assim, por definição, a seqüência converge para ξ. *Se, por outro lado, existirem diversos pontos de acumulação, a seqüência não converge para limite algum.* A existência do limite e a unidade do ponto de acumulação das seqüências limitadas são, pois, idéias equivalentes.

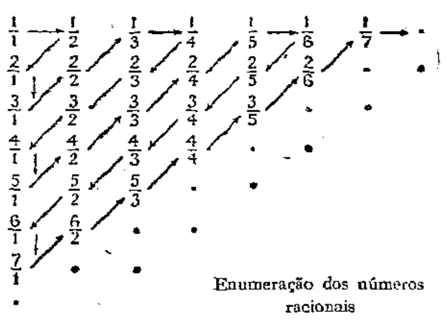
A inexistência de limite deve ser considerada antes como regra do que como exceção. Por exemplo, a seqüência com os têrmos $a_{2n} = 1/n$, $a_{2n-1} = 1 - 1/n$ ($n = 1, 2, \ldots$) tem dois pontos de acumulação: 0 e 1.

O conjunto dos números positivos e racionais pode ser considerado como uma seqüência de números, na qual a ordenação pela grandeza foi, de fato, completamente destruída. Chegaremos mais fàcilmente a um arranjo desta natureza numa seqüência se, primeiramente, escrevermos os números racionais como está indicado na página 60 e, depois, compusermos o esquema como indicam as setas, desprezando os números que já tenham sido encontrados (tais como 2/4). O sistema de números racionais contém, evidentemente, todos os pontos racio-

nais e irracionais, como pontos de acumulação, constituindo, assim, um exemplo simples de seqüência com um número infinito de pontos de acumulação.

Por intermédio do conceito de convergência será possível estabelecermos o princípio do ponto de acumulação sob forma notável, a qual encontra ampla aplicação.

Em qualquer conjunto infinito de números, é possível escolher uma seqüência infinita a_1, a_2, a_3,... *convergente para um limite definido* ξ. Para tal, basta que tomemos um ponto de acumulação ξ do conjunto numérico e um número a_1, cuja distância de ξ seja menor do que 1/10; em seguida, um número a_2, cuja distância de ξ seja menor do que 1/100, mais um terceiro número a_3, cuja distância de ξ seja inferior a 1/1000, e assim sucessivamente. Vemos, imediatamente, que esta seqüência converge, de fato, para o limite ξ.



Enumeração dos números racionais

3. Demonstração do critério de convergência de Cauchy.

Voltemos, novamente, às seqüências convergentes, isto é, às seqüências limitadas que têm apenas um ponto de acumulação. O critério de convergência de Cauchy, exposto no § 6 (pág. 40), reduz-se, agora, quase que a uma banalidade. Efetivamente, admitamos que $|a_m - a_n|$ seja arbitràriamente pequeno, quando m e n forem suficientemente grandes. Os números a_n, neste caso, situam-se todos num intervalo finito e, portanto, possuem, no mínimo, um ponto de acumulação ξ. Se existisse um segundo ponto de acumulação η, a distância dêste ponto a ξ seria $|\xi - \eta| = \alpha$, quantidade positiva. Dentro de uma distância arbitràriamente pequena de ξ, digamos, menor do que $\alpha/3$, existiriam infinitos a_n e, portanto, em particular, uma infinidade de números a_n para os quais $n > N$, por maior que fôsse o N escolhido. Da mesma maneira, dentro de uma distância arbitràriamente pequena do ponto η, digamos, menor do que $\alpha/3$, existirá uma infinidade de números a_n da seqüência, em particular, infinitos a_m, para os quais $m > N$.

Para os valores a_n e a_m verifica-se $|a_m - a_n| > \alpha/3$, porém, esta relação é incompatível com a hipótese feita, isto é, para valores suficientemente grandes de N, a diferença $|a_m - a_n|$ é arbitràriamente pequena, desde que n e m sejam, ambos, maiores do que N. Conseqüentemente, não há dois pontos distintos de acumulação, o que demonstra o critério de Cauchy.

4. Existência de limites das seqüências monótonas restritas.

É igualmente fácil verificar que *uma seqüência monótona restrita, crescente ou decrescente, deve possuir limite.* De fato, suponhamos que a seqüência é monótona crescente, e seja ξ um ponto de acumulação; êste ponto de acumulação existirá, certamente. Neste caso, ξ deve ser maior do que qualquer número da seqüência porque, se um têrmo a_l fôsse igual ou maior do que ξ, cada número a_n para o qual $n > l + 1$ satisfaria a desigualdade $a_n > a_{l+1} > a_l \geqq \xi$. Desta forma, todos os números da seqüência, exceto o primeiro $(l + 1)$, no máximo, estariam situados fora do intervalo de comprimento $2(a_{l+1} - \xi)$, cujo ponto médio é ξ. Isto, entretanto, contraria a hipótese estabelecida de ser ξ um ponto de acumulação. Logo, não existem têrmos da seqüência, e, *a fortiori*, pontos de acumulação, situados além de ξ. Se existisse um outro ponto de acumulação η, deveríamos ter $\eta < \xi$. Mas, se repetirmos o raciocínio acima com η, em lugar de ξ, encontraríamos $\xi < \eta$, o que é uma contradição. Assim, sòmente um ponto de acumulação pode existir, ficando, pois, provada a convergência. Raciocínio análogo aplica-se às seqüências monótonas decrescentes.

Como na pág. 41, podemos ampliar os enunciados relativos às seqüências monótonas, mediante a inclusão do caso limite em que os números sucessivos da seqüência são iguais uns aos outros. Neste caso, são mais convenientes as designações, seqüências monótonas não-decrescentes e seqüências monótonas não-crescentes, respectivamente. O teorema relativo à existência do limite continua válido para tais seqüências.

5. Ponto de acumulação superior e inferior; limites superior e inferior de conjuntos numéricos.

Na construção da página 58, que nos conduziu ao ponto de acumulação ξ, tínhamos, a cada instante, que escolher um subintervalo que contivesse uma infinidade de pontos do conjunto. Se escolhês-

semos sempre o último subintervalo que contivesse um número infinito de pontos, seríamos levados a um determinado ponto de acumulação β. Êste ponto de acumulação β é denominado *ponto de acumulação superior* ou *limite superior* do conjunto de números, e é representado, abreviadamente, por $\overline{\lim}$. É o ponto de acumulação da seqüência que fica à direita, sendo perfeitamente possível que um número infinito de pontos estejam acima de β, porém, escolhido um número positivo ϵ, tão pequeno quanto quisermos, *não* haverá um número infinito de pontos acima de $\beta + \epsilon$.

Se, na construção da página 58, tivéssemos escolhido sempre o primeiro dos intervalos que contivesse um número infinito de pontos da seqüência, teríamos novamente chegado a um ponto de acumulação definido α. Êste ponto α é chamado *ponto de acumulação inferior* ou *limite inferior* da seqüência, sendo representado por $\underline{\lim}$. Pode existir uma infinidade de números do conjunto abaixo de α, porém, por menor que seja o número positivo ϵ, há sòmente um número finito abaixo de $\alpha - \epsilon$. A demonstração dêsse fato pode ser reservada ao leitor.

Tanto o limite superior β, como o inferior α, não precisam, necessàriamente, pertencer ao conjunto que limitam. Por exemplo, para a seqüência $a_{2n} = 1/n$, $a_{2n-1} = 2 - 1/n$, êstes limites são, respectivamente, $\alpha = 0$ e $\beta = 2$, porém, os próprios números 0 e 2 não ocorrem no conjunto.

Neste exemplo, não há nenhum número da seqüência acima de $\beta = 2$. Dizemos, então, que $\beta = 2$ é, também, o limite superior do conjunto, de acôrdo com a seguinte definição: M é denominado *limite superior mínimo*, ou, simplesmente, *limite superior* de um conjunto numérico, se (1) não houver na seqüência têrmos superiores a M, mas (2) para cada número positivo ϵ deve existir um número do conjunto maior do que $M - \epsilon$. O limite superior mínimo pode coincidir com o limite superior, como evidencia o exemplo acima. Mas a seqüência $a_n = 1 + 1/n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, mostra que nem sempre isto se verifica, pois, neste caso, $M = 2$ e $\beta = 1$.

Todo o conjunto restrito de números tem limite superior mínimo. Seja B tal limite. Com efeito, ou não existem números do conjunto maiores do que β, ou existem tais números. Se não existirem, β é o limite superior mínimo, pois não há números acima dêle, mas existem outros menores, arbitràriamente próximos de β. No segundo caso,

seja a um número do conjunto maior do que β. Existe apenas um número finito de têrmos da seqüência iguais ou maiores do que a, visto que de outro modo existiria um ponto de acumulação acima de β, o que é impossível. Precisamos, pois, apenas escolher o maior dêstes números; êle será o limite superior do conjunto.

Em qualquer caso, porém, vemos que $M \geqq \beta$, e deduzimos:

Se o limite superior do conjunto não coincidir com o valor superior, êle pertence ao conjunto, como um ponto isolado da seqüência.

Propriedades correspondentes se verificam para o limite inferior m; é sempre igual ou menor do que α e, se m e α não coincidirem, m pertence à seqüência, sendo um ponto isolado da mesma.

2. Teoremas sôbre as funções contínuas

1. Valores máximo e mínimo das funções contínuas.

Um conjunto infinito e delimitado de números deve possuir, pelo menos, um limite superior mínimo M e um limite inferior máximo m. Como vimos, porém, êstes números M e m não precisam, necessàriamente, pertencer ao conjunto ou, como dizemos, a seqüência não precisa ter, obrigatòriamente, valores máximo ou mínimo.

Em vista disso, o teorema seguinte sôbre funções contínuas não é, de forma alguma, tão claro quanto parece à simples intuição:

Tôda a função f(x), *contínua num intervalo fechado* a $\leqq$ x $\leqq$ b *admite um valor máximo ao menos uma vez, ou, como podemos dizer, possui um valor máximo e um mínimo.*

A afirmativa pode ser demonstrada fàcilmente. Os valores admitidos pela função contínua $f(x)$ no intervalo $a \leqq x \leqq b$ constituem um conjunto restrito de números que, como sabemos, possui um limite superior mínimo M, visto que, de outra forma, existiria uma seqüência de números $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n, \ldots$, no intervalo considerado, para a qual $f(\xi_n)$ cresceria além de qualquer limite. Tal seqüência teria, ao menos, um ponto de acumulação ξ no intervalo em aprêço, de forma que, arbitràriamente perto de $\bar{\xi}$, haveria sempre números ξ_n da nossa seqüência, para os quais a expressão $|f(\bar{\xi}) - f(\xi_n)|$ seja maior que 1 (e, na realidade, é arbitràriamente grande), isto é, a função seria descontínua no ponto $\bar{\xi}$. Assim, existe ao menos um limite superior M e, ou há um ponto ξ tal que $f(\xi) = M$, o que provaria o enunciado,

ou existe uma seqüência de números $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ no intervalo, para o qual

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = M.$$

De acôrdo com o princípio do ponto de acumulação formulado na página 60, podemos escolher uma subseqüência de números x_n que tenda para o limite ξ. Chamemos tal subseqüência $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n, \ldots$, de modo que

$$\lim_{n\to\infty} \xi_n = \xi.$$

É, então, certo que

$$\lim_{n\to\infty} f(\xi_n) = M.$$

Por outro lado, a função é contínua no intervalo, por hipótese, e particularmente em ξ, de tal modo que

$$\lim_{n\to\infty} f(\xi_n) + f(\xi).$$

Logo, $f(\xi) = M$. O valor M é, pois, admitido pela função no ponto definido ξ, no interior ou sôbre o contôrno do intervalo, como foi enunciado. Discussão, em tudo semelhante, é aplicável ao valor mínimo.

O teorema relativo aos valores máximo e mínimo das funções contínuas não é, em geral, verdadeiro, exceto quando se estabelece, expressamente, que o intervalo é fechado, isto é, a menos que se faça a hipótese de que a continuidade inclui, também, os pontos extremos. Por exemplo, a função $y = 1/x$ é contínua no intervalo aberto $0 < x < \infty$. Ela não admite valor máximo, mas tem valores arbitràriamente grandes nas proximidades de $x = 0$. Da mesma forma, a função não admite valor mínimo, mas torna-se arbitràriamente pequena para valores suficientemente grandes de x, sem jamais atingir 0.

2. Continuidade uniforme.

Como já vimos (pág. 54) e veremos posteriormente, a continuidade da função $f(x)$ no intervalo fechado $a \leqq x \leqq b$ deixa margem para inúmeras possibilidades, as quais, entretanto, não aparecem intuitivamente. Por tal razão, apresentaremos demonstrações lògicamente rigorosas de certas conseqüências da idéia de continuidade, que, partindo de um ponto de vista simples, apresentam-se inteiramente claras. A

definição de continuidade estabelece, simplesmente, que, partindo da relação $\lim_{n\to\infty} x_n = \xi$, obtém-se $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\xi)$. Podemos ainda exprimir êste fato da maneira seguinte: para cada ponto ξ corresponderá, a cada $\epsilon > 0$, um número $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(\xi)| < \epsilon$ sempre que $|x - \xi| < \delta$, desde que todos os números x considerados estejam incluídos no intervalo $a \leqq x \leqq b$.

Por exemplo, no caso da função $y = cx$ (onde $c \neq 0$), um número δ de tal espécie é dado pela relação $\delta = \epsilon/|c|$. Para a função $y = x^2$, podemos determinar tal número, admitindo que $a = 0$ e $b = 1$ e indagando quão perto de ξ deve ficar o número x a fim de que a expressão $|x^2 - \xi^2|$ possa ser menor do que ϵ. Para êste fim, escrevemos $|x^2 - \xi^2| = |x - \xi||x + \xi| \leqq |x - \xi|(1 + \xi)$. Se, portanto, escolhermos $\delta \leqq \epsilon/(1 + \xi)$, podemos ter certeza de que $|x^2 - \xi^2| < \epsilon$. Vemos, neste exemplo, que o número δ encontrado desta maneira depende não sòmente de ϵ, mas, também, do ponto do intervalo no qual se investiga a continuidade da função. Mas, se desistirmos de fixar a melhor escolha possível de δ para cada ξ, podemos eliminar a dependência de δ em relação a ξ. Para tanto basta substituir ξ por 1, à direita, obtendo, então, a expressão $\epsilon/2$ para δ, que é menor do que o valor anteriormente determinado, mas que serve igualmente bem para todos os pontos ξ.

Surge, agora, a pergunta se algo semelhante não sucede a tôdas as funções contínuas num intervalo fechado. Isto é, indagamos se é ou não possível determinar, para cada ϵ, um $\delta = \delta(\epsilon)$ dependente *sòmente de ϵ e não de* ξ, de tal modo que a desigualdade

$$|f(x) - f(\xi)| < \epsilon$$

se verifique desde que $|x - \xi| < \delta$, para todos os valores de ξ ao mesmo tempo (ou, melhor, uniformemente em relação a ξ). Na realidade, isto é possível como conseqüência da definição geral de continuidade, sem qualquer hipótese adicional. Êste fato, que despertou atenção, pela primeira vez, em fins do século XIX, é denominado *teorema da continuidade uniforme das funções contínuas*.

Demonstraremos o teorema indiretamente. Isto é, mostraremos que a existência de uma função contínua, mas não uniforme, num intervalo fechado $a \leqq x \leqq b$ nos leva a uma contradição. Continuidade uniforme significa que, se desejarmos tomar a diferença $|f(u) - f(v)|$ menor do que um número positivo arbitràriamente escolhido ϵ, sendo u e v tomados no intervalo fechado $a \leqq x \leqq b$, precisaremos apenas escolher u e v bastante próximos um do outro, isto é, separados por uma distância menor do que $\delta = \delta(\epsilon)$. O lugar do intervalo onde fôr

escolhido o par de valores u e v, não tem importância. Se $f(x)$ não fôsse uniformemente contínua, existiria um número positivo (talvez muito pequeno), α com a seguinte propriedade: a cada número δ_n de uma seqüência arbitrária $\delta_1, \delta_2, \ldots$ de números positivos, que tender para zero, corresponderá um par de valores u_n, v_n, do intervalo, para o qual $|u_n - v_n| < \delta_n$ e $|f(u_n) - f(v_n)| > \delta$. De acôrdo com o princípio, os números u_n devem ter um ponto de acumulação ξ, o mesmo acontecendo com os números v_n. Se marcarmos um intervalo arbitràriamente pequeno $|x - \xi| < \delta$ em tôrno dêstes pontos ξ, haverá uma infinidade de pares de números u_n, v_n, contidos neste intervalo. Isto, porém, contraria a hipótese admitida da continuidade de $f(x)$ no ponto ξ porque requer, de acôrdo com o critério de convergência de Cauchy, que

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \alpha,$$

para pontos x_1 e x_2 suficientemente próximos de ξ. A uniformidade da continuidade está, portanto, demonstrada.

Nesta demonstração frisamos, especialmente, que o intervalo considerado é fechado [1]. E, na realidade, o teorema da uniformidade da continuidade não se verifica para intervalos abertos.

Por exemplo, a função $1/x$ é contínua no intervalo semi-aberto, $0 < x \leqq 1$, mas não é uniformemente contínua, porque, por menor que seja o comprimento escolhido δ (< 1) de um intervalo, a função assumirá valores que diferem por um número fixo qualquer, digamos 1, no intervalo, se êste fôr tomado bastante próximo da origem, por exemplo, $\delta/2 \leqq x \leqq 3\delta/2$. A não uniformidade da continuidade é, efetivamente, devida ao fato de que, no intervalo fechado $0 \leqq x \leqq 1$, a função é descontínua na origem. Se tivéssemos considerado $y = x^2$ em todo o intervalo (aberto) $-\infty < x < \infty$, em lugar de num intervalo fechado, não haveria continuidade uniforme.

3. Teorema do valor intermediário.

Outro teorema constantemente empregado na Análise é o seguinte:

Uma função f(x), *contínua num intervalo fechado* a $\leqq$ x $\leqq$ b, *negativa para* x = a *e positiva para* x = b *(ou vice-versa), admite o valor* 0, *ao menos uma vez, no intervalo.*

Geomètricamente êste teorema é trivial, pois estabelece, apenas, que uma curva que começa abaixo do eixo dos x e termina acima dêle,

(1) De outro modo, o ponto de acumulação ξ não teria necessidade de pertencer ao intervalo.

deve cortá-lo em alguma parte, entre os dois pontos. Analìticamente, a demonstração do teorema é muito simples. No intervalo considerado há uma infinidade de pontos para os quais $f(x) < 0$. Levando-se em conta a continuidade da função, isto é verdade para todo o *intervalo* que começa em a. O conjunto dêstes pontos x para os quais $f(x) < 0$, tem um limite superior mínimo ξ, que é maior do que a. Como, porém, nas vizinhanças de ξ há pontos x para os quais $f(x) < 0$, devemos ter $f(\xi) < 0$ (em particular para $\xi \neq b$). É impossível, entretanto, que $f(\xi) < 0$, pois, neste caso, $f(x)$ seria negativa em vizinhança suficientemente próxima de ξ, que incluísse valores de x maiores do que ξ, em contradição com a hipótese feita de que ξ é o limite superior dos valores de x, para os quais $f(x) < 0$. Desta maneira, $f(\xi) = 0$, ficando provada nossa asserção.

O teorema permite a seguinte generalização:

Se admitirmos que f(a) $= \alpha$ *e* f(b) $= \beta$, *e se* μ *fôr um valor qualquer entre* α *e* β, *a função contínua* f(x) *assume o valor* μ, *ao menos uma vez no intervalo.* A função contínua

$$\phi(x) = f(x) - \mu$$

terá sinais diferentes nos dois extremos do intervalo, e admitirá, portanto, o valor 0 em alguma parte do mesmo.

4. Funções inversas das funções contínuas monótonas.

Se a função contínua $y = f(x)$ fôr monótona no intervalo $a \leqq x \leqq b$, admitirá cada valor μ, entre $f(a)$ e $f(b)$, uma vez, e sòmente uma. Logo, se y percorrer o intervalo fechado entre os valores $\alpha = f(a)$ e $\beta = f(b)$, a cada valor de y corresponderá sòmente um valor de x. Podemos, pois, imaginar x como função unívoca de y neste intervalo, isto é, a função $y = f(x)$ tem função inversa única. Afirmamos que tal função $x = \phi(y)$ é, também, uma função contínua e monótona de y, à medida que y varia no intervalo compreendido entre α e β.

O caráter monótono da função inversa $x = \phi(y)$ é óbvio. A fim de demonstrar sua continuidade, observaremos que, partindo da função $f(x)$, cujo caráter monótono é conhecido, segue-se que

$$|f(x_2) - f(x_1)| = |y_2 - y_1| > 0.$$

desde que x_1 e x_2 sejam números distintos do intervalo. Se h fôr um número positivo menor do que $b - a$, a função

$$|f(x + h) - f(x)|$$

será contínua no intervalo fechado $a \leqq x \leqq b - h$. No ponto ξ ela atinge, portanto, o valor mínimo $|f(\xi + h) - f(\xi)| = \alpha(h)$, que, de acôrdo com as observações precedentes, não é nulo [1]. Partindo destas premissas, concluímos que se x_1 e x_2 forem dois pontos do intervalo para os quais $|x_1 - x_2| \geqq h$, verificar-se-á $|f(x_1) - f(x_2)| \geqq \alpha(h)$. Isto implica, porém, na continuidade da função inversa. Se $|y_1 - y_2|$ cair embaixo do número positivo $\alpha(h)$, devemos ter $|x_1 - x_2| < h$ e, portanto, se fôr dado um número positivo ϵ, necessitaremos apenas escolher δ igual a $\alpha(\epsilon)$, a fim de assegurar que $|\phi(y_1) - \phi(y_2)| < \epsilon$ se verifique para todos os valores de y para os quais $|y_1 - y| < \delta$.

Ficou estabelecido, assim, o teorema seguinte: *Se a função* $y = f(x)$ *fôr contínua e monótona no intervalo* $a \leqq x \leqq b$, *e* $f(a) = \alpha$, $f(b) = \beta$, *haverá uma função unívoca inversa* $x = \phi(y)$, $\alpha \leqq y \leqq \beta$, *que, por sua vez, será também contínua e monotona.*

5. Outros teoremas sôbre funções contínuas.

Deixamos ao leitor a demonstração do seguinte: uma função contínua de uma função contínua é, ela própria, uma função contínua. Isto é, se $\phi(x)$ fôr uma função contínua no intervalo $a \leqq x \leqq b$ e seus valores estiverem contidos no intervalo $\alpha \leqq \phi \leqq \beta$, e se, além disso, $f(\phi)$ fôr uma função contínua de ϕ neste último intervalo, então $f(\phi(x))$ representará uma função contínua de x para $a \leqq x \leqq b$. (Teorema da continuidade das funções contínuas.)

Já foi mencionado na pág. 54 que *a soma, diferença e produto das funções contínuas são outras tantas funções contínuas, e que o quociente de tais funções será função contínua sempre que o denominador fôr diferente de zero.*

3. OBSERVAÇÕES SÔBRE AS FUNÇÕES ELEMENTARES

No Cap. I admitimos, tàcitamente, que as funções elementares são contínuas. A demonstração é muito simples. Em primeiro lugar, a função $f(x) = x$ é contínua, logo $x^2 = x.x$ é contínua, pois é o produto de duas funções contínuas, o mesmo acontecendo com qualquer

(1) Tendo-se em vista a continuidade de $f(x)$, o próprio $\alpha(h)$ tende para 0, juntamente com h.

potência de x. Assim, qualquer polinômio é uma função contínua, visto representar a soma de funções contínuas. Tôda a função racional fracionária é, igualmente, uma função contínua, como quociente de funções contínuas, em todo o intervalo em que o denominador não fôr nulo.

A função x^n é contínua e monótona, logo, a raiz n sendo a função inversa da potência n, é contínua. Pelo teorema da continuidade das funções de funções contínuas, a raiz n de uma função racional é contínua (exceto nos casos em que o denominador é nulo).

A continuidade das funções trigonométricas, com as quais o leitor deve estar familiarizado desde a matemática elementar, poderia ser fàcilmente demonstrada empregando-se os conceitos desenvolvidos acima. Não apresentamos, porém, esta discussão aqui, visto ela decorrer naturalmente da derivabilidade, como teremos oportunidade de verificar no cap. II, § 3 (pág. 97).

Faremos, simplesmente, algumas observações sôbre a definição e continuidade da função exponencial a^x, da função-potência geral x^α e da função logarítmica. Suporemos, como no § 3, pág. 25-26, que a é um número positivo, digamos maior do que 1, e se $r = p/q$ fôr um número racional positivo (p e q sendo inteiros), $a^r = a^{p/q}$ significará o número positivo cuja potência q é a^p. Se α representar um número irracional qualquer e $r_1, r_2, \ldots, r_m, \ldots$ uma seqüência de números racionais que se aproximam de α, podemos afirmar que $\lim\limits_{m \to \infty} a^{r_m}$ existe; chamaremos então êste limite de a^α.

Para provar a asserção pelo critério de Cauchy, basta mostrar que $|a^{r_n} - a^{r_m}|$ é arbitràriamente pequeno, desde que n e m sejam suficientemente grandes. Suponhamos, por exemplo, que $r_n > r_m$, isto é, que $r_n - r_m = \delta$, onde $\delta > 0$. Teremos

$$a^{r_n} - a^{r_m} = a^{r_m}(a^\delta - 1).$$

Desde que a^{r_m} é limitado, precisamos apenas provar que

$$|a^\delta - 1| = a^\delta - 1$$

é arbitràriamente pequeno, quando os valores de n e m forem suficientemente grandes. Mas δ é um número racional, e, certamente, podemos torná-lo tão pequeno quanto quisermos, desde que os valores de n e m sejam suficientemente grandes. Logo, se l fôr um inteiro

positivo, arbitràriamente grande, $\delta < 1/l$ se n e m forem suficientemente grandes. As relações $\delta < 1/l$ e $a > 1$ dão [1]

$$1 < a^{\delta} < a^{1/l},$$

e, desde que $a^{1/l}$ tende para 1 à medida que l cresce (pág. 31), nossa afirmação decorre imediatamente.

O leitor poderá demonstrar, seguindo o mesmo raciocínio, que a função a^x, estendida aos valores irracionais, é, também, contínua e, mais ainda, que é uma função monótona. Para os valores negativos de x esta função será naturalmente definida pela equação

$$a^x = \frac{1}{a^{-x}}.$$

À medida que x varia desde $-\infty$ até $+\infty$, a^x assume todos os valores compreendidos entre 0 e $+\infty$. Conseqüentemente, a equação possui função inversa, contínua e monótona, a qual é denominada *logaritmo de base a*. Da mesma forma poderíamos provar que a potência geral x^α é uma função contínua de x, sendo α qualquer número dado, racional ou irracional, e x variando no intervalo $0 < x < \infty$; se $\alpha \neq 0$, x^α também é uma função monótona.

A discussão "elementar" das funções exponencial, logarítmica, e potência de x aqui delineada será substituída, oportunamente, por outra que é, em princípio, muito mais simples (cap. III, § 6, pág. 167).

Exemplos

1. Determinar os valores máximo e mínimo e os limites superior e inferior das seguintes seqüências, dizendo quais dêles pertencem ao conjunto:

(a) $\frac{6^n}{n!}$, $n = 1, 2, \ldots$. (b) $0, \frac{(-1^n)}{n!}$, $n = 1, 2, \ldots$.

(c) $\frac{(-1)^c}{n} + \frac{n}{2n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$. (d) $1 + \frac{(-1)^n}{n} + \frac{(-1)^n n}{2n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$,

(e) $\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2}$, $m, n = 1, 2, \ldots$.

[1] Porque, quando $a > 1$, a potência $a^{m/n}$ é maior do que 1 se m/n fôr positivo. Isto é claro. visto que, se $a^{m/n}$ fôsse menor que 1, $a^m = (a^{m/n})^n$ representaria o produto de n fatôres, todos menores que 1, tendo portanto, valor inferior a 1. Contràriamente porém, a^m é o produto de m fatôres, todos maiores que 1, sendo, assim, maior que 1.

2.* Provar que se $f(x)$ é contínua para $a \leqq x \leqq b$, para cada $\epsilon > 0$ existe uma função poligonal $\varphi(x)$ (isto é, uma função contínua cujo gráfico consiste em um número finito de segmentos retilíneos, que se encontram nos vértices) tal que $|f(x) - \varphi(x)| < \epsilon$ para qualquer valor de x, contido no intervalo (¹).

3. Mostrar que qualquer função poligonal $\varphi(x)$ pode ser representada pela soma $\varphi(x) = a + bx + \Sigma c_i |x - x_i|$, onde x_i são as abscissas dos vértices.

Determinar uma fórmula dêsse tipo para a função $f(x)$ definida pelas equações:

$$f(x) = 2x - 1 \ (0 \leqq x \leqq 2).$$
$$f(x) = 5 - x \ (2 \leqq x \leqq 3).$$
$$f(x) = x - 1 \ (3 \leqq x \leqq 5).$$
$$f(x) = 4 \ (5 \leqq x \leqq 7).$$

4. Determinar um $\delta(\epsilon)$, tal que $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$ desde que $|x_1 - x_2| < \delta(\epsilon)$, para as funções seguintes, empregando as deduções do § 1, N.º 2, pág. 65:

(a) $f(x) = 2x^3, -1 \leqq x \leqq 1.$

(b) $f(x) = x^n, -a \leqq x \leqq a.$

*(c) $f(x) = \sqrt[3]{1 - x^2}, -1 \leqq x \leqq 1.$

5.* A função $y = \operatorname{sen} 1/x$ não tem descontinuidade no intervalo $0 < x < 1$. Provar que ela *não é* uniformemente contínua neste intervalo aberto.

6. Uma função $f(x)$ é definida por todos os valores de x da seguinte maneira:

$$f(x) = 0 \text{ para todos os valores irracionais de } x;$$
$$f(x) = 1/q \text{ para } x \text{ racional e igual a } p/q,$$

sendo p/q uma fração irredutível (assim, para $x = 16/29$, $f(x) = 1/29$).

Demonstrar que $f(x)$ é contínua para todos os valores irracionais de x e descontínua para todos os valores racionais de x.

APÊNDICE II AO CAPÍTULO I

1. Coordenadas polares

No capítulo I estabelecemos o conceito de função e representamola, geomètricamente, por meio de curvas. Entretanto, convém recordar que a geometria analítica segue processo inverso, iniciando

(¹) Ver também pág. 16.

com a curva definida por alguma propriedade geométrica e representando-a por uma função, por exemplo, por uma função que exprima a dependência de uma das coordenadas de um ponto da curva em relação à outra. Êste ponto de vista nos leva naturalmente a considerar, além das coordenadas retangulares, às quais nos restringimos no capítulo I, outros sistemas de coordenadas que sejam mais adequados para representar as curvas dadas geomètricamente. O exemplo mais importante é o das *coordenadas polares* r, θ, que se relacionam com as coordenadas retangulares x, y de um ponto P pelas equações

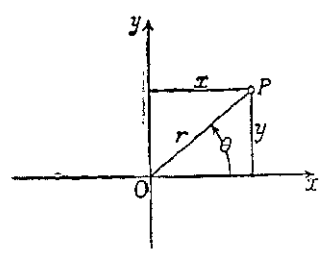


Fig. 25.—Coordenadas polares

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\operatorname{sen}\theta, \quad r^2 = x^2 + y^2, \quad \operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x},$$

e cuja interpretação geométrica é explicada na figura 25.

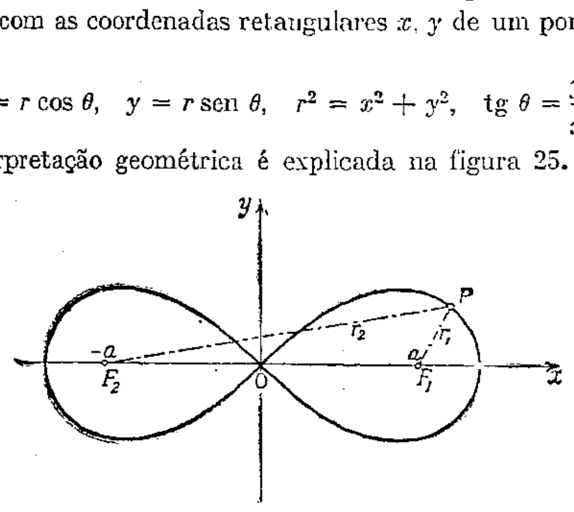


Fig. 26.—Lemniscata

Consideremos, por exemplo, a *lemniscata*. Esta curva é definida, geomètricamente, como o lugar de todos os pontos P para os quais o produto das distâncias r_1 e r_2 a dois pontos fixos F_1 e F_2, de coordenadas retangulares $x = a$, $y = 0$ e $x = -a$, $y = 0$, respectivamente, tem o valor constante a^2 (fig. 26). Como

$$r_1{}^2 = (x-a)^2 + y^2, \quad r_2{}^2 = (x = a)^2 + y^2,$$

um cálculo simples proporciona a equação da lemniscata sob a forma

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y)^2 = 0.$$

Se, agora, introduzirmos as coordenadas polares, obteremos

$$r^4 - 2a^2r^2(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) = 0;$$

e, se dividirmos tudo por r^2 e usarmos uma fórmula trigonométrica simples, virá

$$r^2 = 2a^2 \cos 2\theta.$$

Vemos, assim, que a equação da lemniscata é mais simples em coordenadas polares do que em retangulares.

2. Observações sôbre os números complexos

As considerações que faremos a seguir serão baseadas, principalmente, sôbre a classe dos números reais. Não obstante, tendo em conta as discussões dos capítulos VIII, IX e XI, lembraremos ao leitor que os problemas algébricos conduziram a uma extensão ainda mais ampla do conceito de número, exigindo a introdução dos *números complexos*. A passagem dos números naturais para a classe de todos os números reais surgiu do desejo de eliminar fenômenos excepcionais e tornar certas operações, como a subtração, a divisão e a correspondência entre pontos e números, sempre possível. Da mesma forma fomos compelidos, pela exigência de que tôda a equação do segundo grau e, na realidade, tôda equação algébrica, tenha solução, a introduzir os números complexos. Se, por exemplo, quisermos que a equação

$$x^2 + 1 = 0$$

tenha raízes, seremos obrigados a introduzir os novos símbolos i e $-i$ como raízes desta equação. (Como é demonstrado na álgebra, êste fato é suficiente para assegurar que *tôda* equação algébrica tem uma solução.) [1]

Se a e b forem dois números reais ordinários, o *número* complexo $c = a + ib$ designa um par de números (a, b), cujos cálculos são efetuados de acôrdo com a seguinte regra geral: somam-se, multiplicam-se e dividem-se números complexos (entre os quais estão incluídos os números reais como casos especiais, em que $b = 0$), considerando o símbolo i como quantidade indeterminada, simplificando tôdas as expressões com o emprêgo da equação $i^2 = -1$ para eliminar as potências de i superiores à primeira, e obtendo-se uma expressão final da forma $a + ib$.

Admitimos que o leitor possui certo grau de familiaridade com os números complexos. Todavia, salientaremos uma relação particular-

(1) O teorema fundamental da álgebra afirma que tôda equação algébrica possui raízes reais ou complexas.

mente importante que desenvolveremos juntamente com a representação geométrica ou trigonométrica dos números complexos. Se $c = x + iy$ fôr um número de tal espécie, representá-lo-emos, em um sistema de coordenadas retangulares, pelo ponto P, cujas coordenadas são x e y. Introduzimos, então, as coordenadas polares, r e θ, por meio das equações $x = r\cos\theta$ e $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$ (pág. 72), em lugar das retangulares, x e y. Então, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ é a distância do ponto P à origem, e θ o ângulo formado pelo segmento positivo do eixo dos x e o segmento OP. O número complexo c será, então, representado sob a forma

$$c = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta).$$

O ângulo θ é o *argumento* do número complexo c, a quantidade r é o seu *valor absoluto* ou *módulo*, que ainda pode ser representado por $|c|$. Ao número complexo "conjugado" $\bar{c} = x - iy$ corresponde, naturalmente, o mesmo valor absoluto, porém (exceto no caso de valores reais e negativos de c), o ângulo $-\theta$. Assim

$$r^2 = |c|^2 = c\bar{c} = x^2 + y^2.$$

Empregando-se esta representação trigonométrica, a multiplicação dos complexos assume forma particularmente simples. Então,

$$\begin{aligned} c.c' &= r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)\,.\,r'(\cos\theta' + i\,\mathrm{sen}\,\theta') \\ &= rr'(\cos\theta\cos\theta' - \mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\theta') \\ &\quad + i(\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta' + \mathrm{sen}\,\theta\cos\theta'). \end{aligned}$$

Se recordarmos os teoremas da adição das funções trigonométricas, virá

$$c.c' = rr'[\cos(\theta + \theta') + i\,\mathrm{sen}\,(\theta + \theta')].$$

Portanto, para se multiplicarem números complexos, multiplicam-se os seus valores absolutos e somam-se seus argumentos. A fórmula notável

$$(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)(\cos\theta' + i\,\mathrm{sen}\,\theta') = (\cos\theta + \theta') + i\,\mathrm{sen}(\theta + \theta')$$

é usualmente denominada *teorema de De Moivre*. Ela nos leva, imediatamente, à relação

$$(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)^n = \cos n\theta + i\,\mathrm{sen}\,n\theta,$$

que permite a resolução da equação $x^n = 1$ para n inteiro e positivo cujas raízes (denominadas raízes da unidade) são

$$\epsilon_1 = \epsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{n}, \quad \epsilon_2 = \epsilon^2 = \cos\frac{4\pi}{n} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{4\pi}{n}, \quad \ldots,$$

$$\epsilon_{n-1} = \epsilon^{n-1} = \cos\frac{(n-1)\pi}{n} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{(n-1)\pi}{n}, \quad \epsilon_n = \epsilon^n = 1.$$

Além disso, se imaginarmos a expressão do primeiro membro da equação $(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)^n = \cos n\theta + i\,\mathrm{sen}\,n\theta$ desenvolvido segundo o teorema do binômio, basta separar os têrmos reais dos imaginários para obtermos expressões para $\cos n\theta$ e $\mathrm{sen}\,n\theta$ em função de potências e de produtos de potências de $\mathrm{sen}\,\theta$ e $\cos\theta$.

Exemplos

1. Construir os gráficos das seguintes funções:

$r = \mathrm{sen}\,\varphi.$ $\qquad r = \cos 5\varphi.$

$r = \varphi.$ $\qquad r = \dfrac{1}{\cos(\varphi - \alpha)}$, α constante.

$r = \mathrm{sen}\,6\varphi.$

2. Determinar a equação polar:

(*a*) do círculo de raio a, com o centro na origem;
(*b*) do círculo de raio a, com o centro (a, φ_0);
(*c*) da linha reta (caso geral).

3. Exprimir $\cos 2\theta$ e $\mathrm{sen}\,2\theta$ em função de $\mathrm{sen}\,\theta$ e $\cos\theta$, aplicando o teorema de De Moivre. Operar anàlogamente para $\cos 3\theta$, $\mathrm{sen}\,3\theta$, $\cos 5\theta$, $\mathrm{sen}\,5\theta$.

Demonstrar que $\cos n\theta$ é um polimônio em $\cos\theta$, e também que, se n fôr ímpar, $\mathrm{sen}\,n\theta$ é um polinômio em $\mathrm{sen}\,\theta$.

4. Efetuar as seguintes operações, determinando o módulo e o argumento das quantidades dadas e das próprias respostas.

(*a*) $-3.2i$. (*f*) $i^{1/2}$.
(*b*) $(4 + 4i)(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{3i})$. (*g*) $(1 + i)^{1/2}$.
(*c*) $(1 + i)(1 - i)$. (*h*) $(3 - 3i)^{2/3}$.
(*d*) $(\sqrt{3} - i)^2$. (*k*) $1^{1/3}$.
(*e*) $1^{1/2}$. (*l*) $(16i)^{1/4}$.

5.* Demonstrar que, se $\epsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{n}$, onde n é inteiro e maior do que 1

$$\epsilon^{\nu} + \epsilon^{2\nu} + \epsilon^{3\nu} + \ldots + \epsilon^{n\nu} = \begin{cases} 0 \text{ se } n \text{ não fôr fator de } \nu, \\ n \text{ se } n \text{ fôr fator de } \nu. \end{cases}$$

Capítulo II

IDÉIAS FUNDAMENTAIS SÔBRE O CÁLCULO INTEGRAL E DIFERENCIAL

A análise matemática emprega, entre outros, dois processos de limite que desempenham papel de importância, não só porque são constantemente utilizados em muitas relações diferentes, mas, principalmente, devido à interdependência que existe entre êles. Desde os tempos clássicos são conhecidos exemplos isolados do emprêgo dêstes dois métodos, *derivação* e *integração*. O comêço, porém, do cálculo diferencial e integral, estudado de maneira metódica, foi possível sòmente depois que o reconhecimento da natureza complementar dêstes processos permitiu considerável desenvolvimento e o estabelecimento de um novo método matemático, devidamente sistematizado. Dois grandes gênios do século XVII, Newton e Leibnitz, iniciaram êste desenvolvimento, fazendo suas descobertas independentemente um do outro. Conquanto Newton, nas suas investigações, possa ter enunciado seus conceitos de forma mais clara, a notação e os métodos de cálculo de Leibnitz foram desenvolvidos de modo mais perfeito constituindo, ainda hoje, elementos indispensáveis na teoria.

1. Integral definida

Encontramos, primeiramente, a integral no problema da medição da área de uma região plana, limitada por linhas curvas. Considerações mais elevadas permitem separarmos a noção de integral da idéia intuitiva de área e exprimi-la, analìticamente, em têrmos numéricos. Tal definição analítica da integral é, como veremos, dotada de grande significação, não sòmente porque permite esclarecer completamente nossos conceitos, mas, também, porque suas aplicações vão muito além do simples cálculo das áreas.

Iniciamos considerando a questão intuitivamente.

1. A integral como área.

Suponhamos que nos fôsse dada uma função $f(x)$, contínua e positiva num intervalo, e que a e b ($a < b$) sejam dois valores dêsse intervalo. Imaginaremos a função representada por uma curva e consideraremos a área da região limitada em cima pela curva, nos lados pelas retas $x = a$ e $x = b$, e, embaixo, pela porção do eixo dos x compreendida entre os pontos a e b (fig. 1).

Estabelecemos expressamente como hipótese que há um sentido definido em nos referirmos à área desta região, o que decorre da intui-

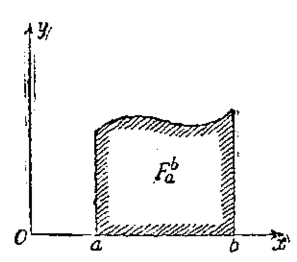


Fig. 1

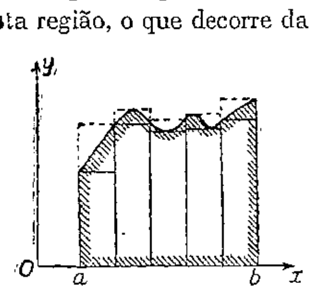


Fig. 2.—Somas superior e inferior

ção. Designaremos esta área, F_a^b, a *integral definida da função* f(x) *entre os limites* a *e* b. Quando procuramos atribuir um valor numérico a esta área, verificamos que, em geral, somos incapazes de medir áreas limitadas por curvas. Podemos medir polígonos de lados retos, dividindo-os em retângulos e triângulos. Mas esta subdivisão, no caso da área considerada, é usualmente impossível. Contudo, para concebermos a área como o valor limite de uma soma de áreas retangulares há apenas um pequeno passo a dar, da seguinte maneira. Dividiremos o eixo dos x, compreendido entre a e b, em n partes iguais e em cada ponto da divisão elevaremos uma ordenada até à curva; a área fica, assim, dividida em n faixas. Não podemos, porém, calcular a área das diversas faixas, assim como não podíamos calcular a área da superfície inicial. Se, porém, como está indicado na figura 2, determinarmos, primeiro, o menor e o maior valor da função $f(x)$ em cada intervalo e, depois, substituirmos a faixa correspondente: (1) por um retângulo cuja altura seja igual ao menor valor da função; (2) por um retângulo cuja altura seja igual ao maior valor da mesma função, obteremos duas figuras em forma de escada. (Na figura 2 a primeira

está desenhada com linhas cheias, enquanto a segunda é indicada por meio de linhas pontilhadas.) A primeira figura, i. é, a limitada pelos degraus inferiores, tem uma área que, no máximo, será igual à área F_a^b que estamos tentando determinar. A segunda tem uma área, no mínimo, tão grande quanto F_a^b. Se designarmos a soma das áreas do primeiro conjunto de retângulos por $\underline{F_n}$ (soma inferior), e a soma das áreas do segundo conjunto por $\overline{F_n}$ (soma superior), teremos a relação

$$\underline{F_n} \leqq F_a^b \leqq \overline{F_n}.$$

Se fizermos as subdivisões cada vez menores, i. é., se n crescer sem limite, a intuição diz-nos que as quantidades $\overline{F_n}$ e $\underline{F_n}$ aproximar-se-ão cada vez mais, tendendo para o mesmo limite F_a^b. Podemos, portanto, considerar a integral como o valor limite

$$F_a^b = \lim_{n\to\infty} \underline{F_n} = \lim_{n\to\infty} \overline{F_n}.$$

A intuição também nos mostra a possibilidade de uma generalização imediata. Não será preciso que os n intervalos tenham todos o mesmo comprimento. Êles podem, ao contrário, apresentar extensões diferentes desde que, à medida que n cresça, o comprimento do maior intervalo tenda para zero.

2. Definição analítica de integral.

No capítulo anterior consideramos a integral definida como um número correspondente a uma área e, portanto, de certa extensão prèviamente conhecida, e subseqüentemente o representamos como um valor limite. Vamos agora inverter o processo. Não adotaremos a possibilidade, indicada pela intuição, de atribuir uma área à região sob uma curva contínua, nem sequer verificaremos se isso é viável. Partiremos, ao contrário, de somas formadas analìticamente, semelhantes às somas superiores e inferiores, já definidas, e provaremos que tais somas tendem para um limite determinado. Adotaremos êste valor limite como *definição* da integral e da área. Somos levados, naturalmente, a adotar os símbolos clássicos que são usados no cálculo integral desde o tempo de Leibnitz.

Seja $f(x)$ uma função positiva e contínua no intervalo $a \leqq x \leqq b$ (de extensão $b - a$). Imaginaremos o intervalo dividido por $(n-1)$

pontos $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$, em n partes iguais ou desiguais, e faremos $x_0 = a$, $x_n = b$. Em cada intervalo escolheremos um ponto arbitrário, ξ_1 no primeiro, ξ_2 no segundo..., ξ_n no último, ponto êste que pode estar situado no interior ou mesmo num extremo do intervalo. Em vez da função contínua $f(x)$, consideremos, agora, as funções descontínuas (*step-functions*) $f(\xi_1)$ na primeira divisão, $f(\xi_2)$ na segunda,..., $f(\xi_n)$ na última, as quais adquirem valores constantes em cada intervalo. Como mostra a figura 3, o gráfico destas funções descontínuas define

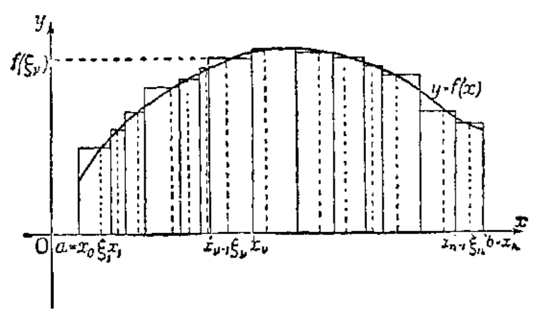


Fig. 3.—Ilustração da definição analítica de integral

uma série de retângulos cuja soma das áreas é dada pela expressão

$$F_n = (x_1 - x_0)f(\xi_1) + (x_2 - x_1)f(\xi_2) + \ldots + (x_n - x_{n-1})f(\xi_n).$$

Esta expressão é usualmente abreviada pelo emprêgo do sinal somatório ou de somação Σ:

$$F_n = \sum_{\nu=1}^{n} (x_\nu - x_{\nu-1})f(\xi_\nu);$$

a introdução do símbolo

$$\Delta x_\nu = x_\nu - x_{\nu-1}$$

simplifica ainda mais a expressão:

$$F_n = \sum_{\nu=1}^{n} f(\xi_\nu)\,\Delta x_\nu.$$

(O símbolo Δ *não é* um fator, indicando uma "diferença". O símbolo total Δx_ν, inseparável, significa, por definição, o comprimento do in-

tervalo). Podemos, agora, enunciar a nossa afirmação básica, da seguinte maneira:

Se o número de pontos de divisão crescer sem limite e se, ao mesmo tempo, o comprimento do maior intervalo tender para zero, a soma anterior tende para um limite. Êste limite é independente da maneira particular pela qual os pontos de divisão $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ *e os pontos intermediários* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ *foram escolhidos.*

O valor limite é denominado *integral definida* da função $f(x)$ que, por sua vez, é dita *integrada* entre os limite a e b. Como já frisamos, consideramos esta afirmação como *definição* (1) da área limitada pela curva $y = f(x)$, para $a \leqq x \leqq b$. É possível, agora, reenunciarmos a asserção básica: Se $f(x)$ fôr contínua entre $a \leqq x \leqq b$, possuirá integral definida entre os limites a e b.

Êste teorema, referente à existência da integral definida de uma função contínua, pode ser demonstrado por processo puramente analítico, sem apêlo à intuição. Não o faremos, contudo, agora, pois voltaremos a tratar dêste assunto no apêndice dêste capítulo (pág. 131), depois que o uso do conceito de integral tiver despertado o interêsse do leitor para estabelecer uma base firme para o mesmo. Contentamo-nos, por ora, com o fato de que as considerações intuitivas das págs. 77-78 tenham feito o teorema apresentar-se sob forma extremamente plausível.

3. Extensões. Notação. Regras fundamentais.

A definição de integral, como limite de uma soma, levou Leibnitz a exprimi-la pelo símbolo:

$$\int_a^b f(x)\, dx.$$

O sinal de integral é uma modificação do sinal somatório e tem a forma de um S alongado. A passagem ao limite das divisões finitas Δx, do intervalo é indicada pela letra d em vez de Δ. Devemos, entretanto, pôr-nos em guarda contra o pensamento de que dx represente uma "quantidade infinitamente pequena" ou "infinitesimal", ou que a integral signifique a soma de um número infinito de quantidades

(1) A área, como é natural, pode ser definida de maneira geométrica, demonstrando-se, então, que tal definição é equivalente à definição limite dada acima (Cap. V, § 2, N.º 1, pág. 268).

"infinitamente pequenas". Tal concepção seria destituída de qualquer significado claro; sòmente teria o efeito de obscurecer o que já definimos com precisão.

Nas figuras anteriores, admitimos (1) que a função $f(x)$ é positiva em todo o intervalo, e (2) que $b > a$. A fórmula que define a integral como o limite de uma soma é, contudo, independente de tais hipóteses. Se $f(x)$ fôr negativa em todo ou sòmente em parte do intervalo considerado, a única conseqüência será tornar negativos os fatôres $f(\xi_\nu)$ da soma acima, em vez de positivos. À área limitada pela curva abaixo do eixo dos x, atribuiremos, naturalmente, o sinal negativo, o que está de acôrdo com a convenção de sinais familiar da geometria analítica. A área total limitada por uma curva será assim, em geral, a soma de têrmos positivos e negativos, correspondentes, respectivamente, às porções da curva situadas acima e abaixo do eixo dos x (1).

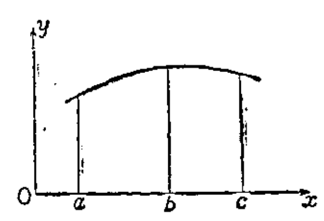


Fig. 4

Se supusermos que $a < b$, invertendo a condição $a > b$, ainda podemos conservar a definição aritmética de integral já estabelecida; a única mudança é que, quando percorrermos o intervalo de a para b, as diferenças Δx_ν serão negativas. Teremos, então, a relação

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx,$$

que tem lugar para todos os valores de a e b ($a \neq b$), o que permite definir $\int_a^a f(x)dx$ como sendo igual a zero.

Esta definição dá, imediatamente, a relação fundamental (fig. 4):

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

para $a < b < c$. Pelas expressões anteriores verificamos que esta equação se verifica para qualquer posição dos pontos a, b, c, uns em relação aos outros.

Uma regra fundamental simples, porém importante, é obtida con-

(1) Para áreas limitadas por curvas fechadas arbitrárias, ver Cap. V, § 2, pág. 269.

siderando-se a função $cf(x)$, onde c representa uma constante. Da própria definição de integral, obtemos

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx.$$

Em seguida, estabelecemos a seguinte regra de adição: Se

$$f(x) = \phi(x) + \psi(x),$$

segue-se

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \phi(x)\,dx + \int_a^b \psi(x)\,dx.$$

cuja demonstração é muito fácil.

Finalmente, faremos, sôbre a "variável de integração", uma observação que, apesar de óbvia, é muito importante nas aplicações. Escrevemos a integral proposta sob a forma $\int_a^b f(x)\,dx$. Para a sua avaliação não importa empregarmos a letra x ou qualquer outra, para designar as abscissas do sistema de coordenadas, isto é, a variável independente. O símbolo particular que usarmos para a variável de integração é, portanto, completamente indiferente; em vez de $\int_a^b f(x)\,dx$ poderíamos, igualmente, escrever, $\int_a^b f(t)\,dt$ ou $\int_a^b f(u)\,du$ ou qualquer outra expressão análoga.

2. Exemplos

Estamos, agora, habilitados a empregar o processo-limite estabelecido pela definição de integral, calculando as áreas em numerosos casos especiais. Realizá-lo-emos em uma série de exemplos em que (com exceção do N.º 5, pág. 86) empregaremos sòmente as somas superiores e inferiores [1].

1. Integração de funções lineares.

Inicialmente, consideremos a função $f(x) = x^n$, onde n é um inteiro maior do que ou igual a zero. Para $n = 0$, isto é, para $f(x) = 1$, o resultado é tão evidente que apenas escreveremos:

$$\int_a^b 1\,dx = \int_a^b dx = b - a.$$

Para a função $f(x) = x$, a integração é novamente banal, do ponto de vista geométrico. A integral da função $f(x) = x$,

$$\int_a^b x\,dx,$$

[1] Deixamos ao leitor, como exercício útil, demonstrar que chegaremos ao mesmo resultado, nos exemplos seguintes, quer empregando as somas superiores, quer as inferiores.

é a área do trapézio representado na fig. 5, a qual, por uma fórmula elementar, vale

$$\tfrac{1}{2}(b-a)(b+a) = \tfrac{1}{2}(b^2-a^2).$$

Verificaremos, agora, que o processo-limite conduz exatamente ao mesmo resultado. Como já estabelecemos, no cálculo do limite, podemos restringir a discussão, operando com as somas superiores ou com as inferiores. Subdividimos o intervalo ab em n partes iguais, por meio dos pontos

$$a+h,\ a+2h,\ \ldots,\ a+(n-1)h,$$

onde $h = (b-a)/n$. A integral será, então, o limite da soma seguinte, que representará uma soma superior se $b < a$, e uma soma inferior se $b > a$:

$$\begin{aligned} &h[a + (a+h) + (a+2h) + \ldots + (a+\overline{n-1}h)] \\ &= h[na + h + 2h + \ldots + (n-1)h]. \end{aligned}$$

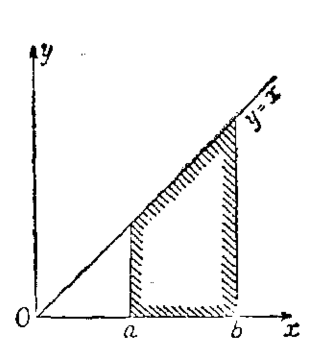


Fig. 5

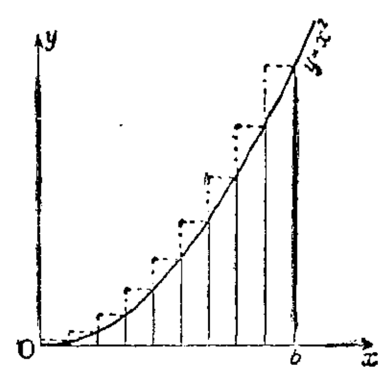


Fig. 6

Sabemos, por uma fórmula elementar, que

$$1 + 2 + \ldots + (n-1) = \tfrac{1}{2}n(n-1),$$

o que permite escrever a expressão acima sob a forma

$$nh\left(a + h\frac{n-1}{2}\right) = (b-a)\left(a + \frac{b-a}{2}\,\frac{n-1}{n}\right).$$

À medida que n cresce, o segundo membro tende para o limite

$$(b-a)\left[a + \tfrac{1}{2}(b-a)\right] = \tfrac{1}{2}(b^2-a^2),$$

como queríamos demonstrar.

2. Integração de x^2.

A integração da função $f(x) = x^2$, que em linguagem geométrica pode ser enunciada como a determinação de superfície da uma área limitada por um segmento de parábola, uma parte do eixo dos x e duas ordenadas, já não é um problema tão simples como o primeiro. Consideremos, por exemplo, a integral

$$\int_0^b x^2\,dx,$$

onde $b \geqq 0$ (fig. 6) e dividamos o intervalo $0 \leqq x \leqq b$ em n partes iguais, de com-

primento $h = b/n$; a área que desejamos determinar será, então, o limite da seguinte expressão (soma superior):

$$\begin{aligned} h(h^2 + 2^2h^2 + 3^2h^2 + \ldots + n^2h^2) &= h^3(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) \\ &= b^3(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2)/n^3. \end{aligned}$$

A soma dos têrmos contidos no parêntese, entretanto, já foi determinada (ver nota da pág. 27):

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

Substituindo esta expressão e escrevendo o resultado sob forma um pouco diferente, a soma em estudo transforma-se em

$$\frac{b^3}{6}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right).$$

Desde que n cresça além de qualquer valor, a soma tende para o limite $\frac{1}{3}b^3$, que nos dá a fórmula da integral procurada

$$\int_0^b x^2\,dx = \tfrac{1}{3}b^3.$$

Empregando as relações gerais dadas acima, estabelecemos a fórmula geral

$$\int_a^b x^2\,dx = \int_0^b x^2\,dx - \int_0^a x^2\,dx = \tfrac{1}{3}(b^3 - a^3).$$

3. Integração de x^α, sendo α inteiro e positivo.

Como terceiro exemplo, integremos a função

$$y = f(x) = x^\alpha,$$

sendo α uma quantidade inteira e positiva. Para o cálculo da integral

$$\int_a^b x^\alpha\,dx$$

(onde admitimos $0 < \alpha < b$), seria inconveniente dividirmos o intervalo em n partes iguais (1). A passagem ao limite pode, entretanto, ser efetuada fàcilmente, desde que a subdivisão seja feita obedecendo a uma "progressão geométrica", da maneira seguinte. Faremos $\sqrt[n]{b/a} = q$ e subdividiremos o intervalo por meio dos pontos

$$a,\ aq,\ aq^2,\ \ldots,\ aq^{n-1},\ aq^n = b.$$

(1) Neste caso, seríamos obrigados a basear a avaliação da integral sôbre o limite de $\frac{1}{n^{\alpha+1}}(1^\alpha + 2^\alpha + \ldots + n^\alpha)$, para $n \to \infty$; o leitor, contudo, pode efetuar êste cálculo, sòzinho, baseando-se na nota do pé da pág. 27.

A integral procurada é, pois, o limite da soma

$$\begin{aligned} &a^{\alpha}(aq-a)+(aq)^{\alpha}(aq^2-aq)+(aq^2)^{\alpha}(aq^3-aq^2)+\dots \\ &\qquad +(aq^{n-1})^{\alpha}(aq^n-aq^{n-1}) \\ &=a^{\alpha+1}(q-1)\,[1+q^{\alpha+1}+q^{2(\alpha+1)}+q^{3(\alpha+1)}+\dots+q^{(n-1)(\alpha+1)}]. \end{aligned}$$

Os têrmos da chave formam uma progressão geométrica, cuja razão é $q^{\alpha+1} \neq 1$. A soma da progressão fornece a expressão

$$a^{\alpha+1}(q-1)\frac{q^{n(\alpha+1)}-1}{q^{\alpha+1}-1}.$$

Substituindo q pelo seu valor $(b/a)^{1/n}$, a relação acima transforma-se em

$$(b^{\alpha+1}-a^{\alpha+1})\frac{q-1}{q^{\alpha+1}-1}.$$

Se, agora, n crescer sem limite, o primeiro fator permanece invariável. Sendo $q \neq 1$, empregaremos a fórmula da soma das progressões geométricas e escreveremos o segundo fator sob a forma

$$\frac{1}{q^{\alpha}+q^{\alpha-1}+\dots+1};$$

e, como a equação $q = (b/a)^{1/n}$ indica que q tende para 1 à medida que $n \to 0$, o segundo fator terá o limite $1/(\alpha+1)$. Finalmente, o valor da integral é dado pela expressão

$$\int_a^b x^{\alpha}\,dx + \frac{1}{\alpha+1}(b^{\alpha+1}-a^{\alpha+1}).$$

O cálculo acima é simples, em princípio, mas algo complicado nos pormenores. Veremos, posteriormente, que êle pode ser pôsto inteiramente de lado, uma vez que estejamos mais familiarizados com a teoria da integração.

4. Integração de x^{α}, sendo α um número racional qualquer, diferente de -1.

O resultado que obtivemos acima pode ser consideràvelmente generalizado, sem complicação essencial do método. Seja $\alpha = r/s$ um número racional positivo, sendo r e s inteiros e positivos. Na avaliação da integral considerada não haverá alteração, salvo na determinação do limite $\dfrac{q-1}{q^{\alpha+1}-1}$ à medida que q se aproxima de 1.

Tal expressão transforma-se, então, em $\dfrac{q-1}{q^{(r+s)/s}-1}$. Seja $q^{1/s} = \tau(\tau \neq 1)$. Quando q tender para 1, τ também aproximar-se-á de 1. Temos, portanto, que achar o valor limite de $\dfrac{\tau^s-1}{\tau^{r+s}-1}$ quando τ se aproxima de 1. Se dividirmos tanto o numerador como o denominador da fração por $\tau-1$ e os transformarmos como antes, o limite torna-se, simplesmente,

$$\lim_{\tau\to 1}\frac{\tau^{s-1}+\tau^{s-2}+\dots+1}{\tau^{r+s-1}+\tau^{r+s-2}+\dots+1}.$$

Sendo, tanto o numerador como o denominador, contínuos em τ, o limite pode ser imediatamente determinado, fazendo-se $\tau = 1$. Obtemos, assim, o limite $\frac{s}{r+s} = \frac{1}{\alpha+1}$; e, para qualquer valor racional e positivo de α, teremos a fórmula integral

$$\int_a^b x^\alpha \, dx = \frac{1}{\alpha+1}(b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}).$$

Esta expressão é verificada para os valores racionais negativos de α, desde que excluamos o valor $\alpha = -1$, para o qual a equação da soma da progressão geométrica não tem significado algum. Vamos, agora, determinar o limite de $\frac{q-1}{q^{\alpha+1}-1}$ para os valores negativos de α, digamos, $\alpha = -r/s$. Para tal, façamos $q^{-1/s} = \tau$, o que nos dá

$$q = \tau^{-s}, \; q^{\alpha+1} = q^{-(r-s)/s} = \tau^{r-s}.$$

Conseqüentemente, procuraremos o limite de

$$\frac{\tau^{-s} - 1}{\tau^{r-s} - 1} = \frac{1 - \tau^s}{\tau^r - \tau^s}.$$

Deixaremos ao leitor demonstrar que tal limite é, novamente, igual a $\frac{1}{\alpha+1}$, isto é, obtemos, de novo, a fórmula de integração

$$\int_a^b x^\alpha \, dx = \frac{1}{\alpha+1}(b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1})$$

para o caso geral dos valores racionais de α, positivos ou negativos, com exceção de $\alpha = -1$.

Observando a equação anterior, vemos que ela não se verifica para $\alpha = -1$ porque, neste caso, tanto o numerador como o denominador se anulam.

É natural, também, supor que a validade desta última fórmula se estenda aos valores irracionais de α. Tal extensão será efetivamente estabelecida, por uma simples passagem ao limite, no § 7 (pág. 129).

5. Integração de sen x e cos x.

Como último exemplo, consideremos a função $f(x) = \text{sen } x$, a qual será tratada por meio de um artifício especial. Definiremos a integral

$$\int_a^b \text{sen } x \, dx$$

como sendo o limite da soma

$$S_h = h[\text{sen}(a+h) + \text{sen}(a+2h) + \ldots + \text{sen}(a+nh)],$$

onde $h = \frac{b-a}{n}$. Multipliquemos o parêntese do segundo membro por $2 \text{ sen } \frac{h}{2}$ e

apliquemos a conhecida fórmula trigonométrica

$$2 \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v = \cos(u - v) - \cos(u + v);$$

desde que h não seja múltiplo de 2π, chegaremos à expressão

$$S_h = \frac{h}{2 \operatorname{sen} \frac{h}{2}} \left[\cos\left(a + \frac{h}{2}\right) - \cos\left(a + \frac{3}{2}h\right) + \cos\left(a + \frac{3}{2}h\right) - \cos\left(a + \frac{5}{2}h\right) \right.$$
$$\left. + \ldots + \cos\left(a + \frac{2n-1}{2}h\right) - \cos\left(a + \frac{2n+1}{2}h\right) \right]$$
$$\frac{h}{2 \operatorname{sen} \frac{h}{2}} \left[\cos\left(a + \frac{h}{2}\right) - \cos\left(a + \frac{2n+1}{2}h\right) \right].$$

Visto que $a + nh = b$, a integral torna-se o limite de

$$\frac{h}{2 \operatorname{sen} \frac{h}{2}} \left[\cos\left(a + \frac{h}{2}\right) - \cos\left(b + \frac{h}{2}\right) \right] \text{ quando } h \to 0.$$

Pôsto isto, sabemos, do capítulo I (pág. 47), que, quando h tende para 0, a expressão $\frac{h}{2} / \operatorname{sen} \frac{h}{2}$ aproxima-se do limite 1. O limite procurado será, pois, simplesmente, $\cos a - \cos b$, o que permite escrevermos a fórmula de integração

$$\int_a^b \operatorname{sen} x \, dx = -(\cos b - \cos a).$$

Do mesmo modo, como o leitor poderá verificar por si mesmo, obtemos a expressão

$$\int_a^b \cos x \, dx = \operatorname{sen} b - \operatorname{sen} a.$$

Quase todos os exemplos apresentados foram tratados por métodos especiais ou por artifícios particulares. O ponto essencial, porém, do cálculo integral e diferencial, quando encarado de maneira sistemática, consiste no emprêgo de considerações de caráter geral, que conduzem diretamente ao resultado desejado, em lugar dos artifícios que possam ser utilizados. Para chegarmos a tais considerações, devemos volver nossa atenção para outro conceito fundamental da análise superior, a *derivada*.

Exemplos

1. Determinar a área limitada pela parábola $y = 2x^2 + x + 1$, pelas ordenadas $x = 1$ e $x = 3$, e pelo eixo dos x.

2. Achar a área compreendida entre a parábola $y = \frac{1}{2}x^2 + 1$ e a linha reta $y = 3 + x$.

3. Determinar a área limitada pela parábola $y^2 = 5x$ e pela linha reta $y = 1+x$.

4. Achar a área compreendida entre a parábola $y = x^2$ e a linha reta $y = ax+b$.

5. Empregando os métodos do texto, calcular as integrais

$$(a) \int_a^b (x+1)^{\alpha}\, dx, \quad (b) \int_a^b \operatorname{sen} \alpha x\, dx, \quad (c) \int_a^b \cos \alpha x\, dx,$$

sendo α um inteiro arbitrário.

6. Com as fórmulas do exemplo 5, juntamente com as identidades $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$, $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$, demonstrar que

$$\int_a^b \cos^2 x\, dx = \frac{b-a}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2b - \operatorname{sen} 2a}{4};$$

$$\int_a^b \operatorname{sen}^2 x\, dx = \frac{b-a}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2b - \operatorname{sen} 2a}{4}.$$

7. Utilizando o exemplo 1 da pág. 28, calcular $\int_a^b x^3\, dx$, fazendo a divisão em subintervalos iguais.

8. Calcular o valor de $\int_0^1 (1-x)^n dx$ (sendo n inteiro), pelo desenvolvimento do parêntese.

3. DERIVADA

O conceito de derivada, como o de integral, é de origem intuitiva. Suas fontes são (1) o problema da construção da *tangente* a uma curva dada num ponto determinado, e (2), a pesquisa de uma definição precisa, para a velocidade, num movimento arbitrário.

1. A derivada e a tangente.

Consideremos, em primeiro lugar, o problema da tangente. Seja P um ponto sôbre uma curva dada (fig. 7). Definiremos a tangente à curva no ponto P, de acôrdo com a intuição comum, por meio do seguinte processo de limite. Marquemos, além de P, um segundo ponto, P_1, sôbre a curva. Façamos passar uma reta pelos dois pontos, reta esta secante à curva. Se o ponto P_1 se mover sôbre a curva, dirigindo-se para P, a secante tenderá para uma posição limite, a qual é independente do lado pelo qual P_1 se aproxima de P. A posição-limite da

secante é a tangente, e a afirmação de que tal posição-limite existe equivale à hipótese de que a curva possui tangente definida ou direção definida no ponto P. (Empregamos a palavra "hipótese" porque, efetivamente, fizemos uma. A hipótese da existência da tangente verifica-se nas curvas mais simples, mas, de forma alguma, pode ser generalizada para tôdas as curvas, ou mesmo para tôdas as curvas contínuas).

Uma vez que representamos a curva considerada por meio de uma função $y = f(x)$, surge o problema de representar anàliticamente o processo geométrico de limite, utilizando a função $f(x)$. Imaginemos o ângulo que uma linha reta l faz com o eixo dos x, como sendo aquêle de que a parte positiva do eixo deve girar, na direção positiva da rotação [1], a fim de ficar paralelo, pela primeira vez, à reta l. Seja α_1 o ângulo que a secante PP_1 faz com a parte positiva do eixo dos x (fig. 7) e α o ângulo que a tangente forma com o mesmo eixo. Se pusermos de lado o caso da tangente perpendicular, temos

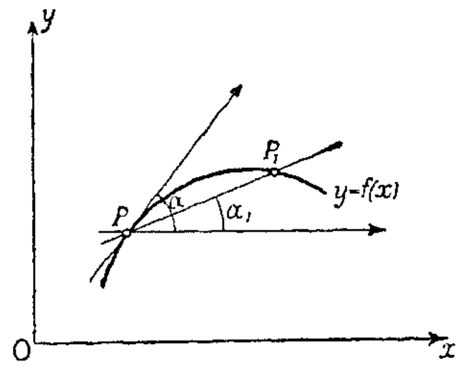


Fig 7.—.Corda e tangente

$$\lim_{P_1 \to P} \alpha_1 = \alpha,$$

onde o significado dos símbolos é perfeitamente compreensível. Se x, y $[= f(x)]$ e x_1, y_1 $[= f(x_1)]$ forem coordenadas dos pontos P e P_1, respectivamente, temos imediatamente [2]

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x};$$

e, assim, o processo-limite estudado será representado pela equação

$$\lim_{x_1 \to x} \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = \operatorname{tg} \alpha.$$

(1) Isto é, numa direção tal que uma rotação de $\pi/2$ o obrigue a coincidir com o eixo dos y positivos; ou, em outras palavras, no sentido contrário ao do movimento dos ponteiros de um relógio.

(2) A fim de que esta equação tenha significado, devemos admitir $0 < |x - x_1| < \delta$, sendo δ escolhido suficientemente pequeno. Nos processos-limite que seguem, muitas vêzes faremos, tàcitamente, hipóteses correspondentes.

A expressão

$$\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

será denominada *quociente das diferenças* da função $y = f(x)$, visto que os símbolos Δy e Δx designam as diferenças das funções $y = f(x)$ e da variável independente x. (Do mesmo modo que na pág. 79, o símbolo Δ indica uma abreviação da diferença, e *não* um fator.) A tangente de α, ângulo de direção da curva (1), é, portanto, igual ao limite para o qual tende o quociente das diferenças da função considerada, quando x_1 tende para x.

Chamaremos êste limite a *derivada* (2) da função $y = f(x)$ no ponto x e, de acôrdo com a notação de Lagrange, empregaremos para representá-la o símbolo $y' = f'(x)$ ou $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df(x)}{dx}$ ou $\frac{d}{dx}f(x)$, de conformidade com Leibnitz. Na pág. 100, discutiremos detalhadamente o significado da notação de Leibnitz. No momento, limitar-nos-emos a assinalar que $f'(x)$ indica que *a derivada é, ela própria, uma função de* x, visto ter ela um valor definido para cada valor atribuído a x, no intervalo em estudo. Tal fato é, por vêzes, salientado pelo emprêgo das expressões *função derivada* ou *curva derivada* (pág. 99).

Apresentamos, novamente, a definição da derivada.

$$f'(x) = \lim_{x_1 \to x} \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x},$$

ou

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = f'(x) = \lim_{x_1 \to x} \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h},$$

onde, na última expressão, substituímos x_1 por $x + h$.

É impossível achar a derivada, fazendo apenas $x_1 = x$ na expressão do quociente das diferenças porque, então, tanto o numerador como o denominador anular-se-iam, resultando a expressão 0/0, sem

(1) A Inclinação ou gradiente da curva é dada por $\operatorname{tg}\alpha$, daí empregar-se algumas vêzes a palavra *gradiente* para a derivada da função representada pela curva.

(2) O têrmo *coeficiente diferencial* é também usado, principalmente em textos antigos.

(3) A notação de Cauchy, $Df(x)$, encontra-se ocasionalmente na bibliografia.

significado. Ao contrário, a passagem ao limite, em cada caso particular, depende de certas operações preliminares (transformação do quociente das diferenças).

Por exemplo, para a função $f(x) = x^2$, temos [1]

$$\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = \frac{x_1^2 - x^2}{x_1 - x} = x_1 + x.$$

A função $x_1 + x$ não é a mesma função $\frac{x_1^2 - x^2}{x_1 - x}$, pois $x_1 + x$ é definida em um ponto em que o quociente $\frac{x_1^2 - x^2}{x_1 - x}$ não o é, a saber, no ponto $x_1 = x$. Para todos os outros valores de x_1, as duas funções são iguais entre si; logo, na passagem ao limite acima indicada onde exigimos, explìcitamente, que $x_1 \neq x$, obteremos o mesmo valor tanto para $\lim\limits_{x_1 \to x} \frac{x_1^2 - x^2}{x_1 - x}$ como para $\lim\limits_{x_1 \to x} (x_1 + x)$. Como a função $x_1 + x$ é definida e contínua no ponto $x_1 = x$, podemos fazer com ela o que não seria certo se fizéssemos com o quociente, isto é, passar ao limite, fazendo simplesmente $x_1 = x$. Obtemos, então, a seguinte expressão para a derivada

$$f'(x) = \frac{d(x^2)}{dx} = 2x.$$

Levar a cabo tal operação, isto é, formar a derivada, denomina-se *derivar* a função $f(x)$. Veremos, mais adiante, como êsse processo de derivação pode, efetivamente, ser aplicado a todos os casos importantes.

A significação definida do problema da derivação de uma função dada, independentemente da intuição geométrica da tangente, é da maior importância. O leitor se lembrará de que, no caso da integral, nos libertamos da concepção geométrica de área e, ao contrário, baseamos a noção de área sôbre a própria definição de integral. Aqui, devemos definir a derivada da função $y = f(x)$ como sendo uma nova função $y' = f'(x)$ dada pela equação acima, independentemente da representação geométrica de $y = f(x)$ por meio de uma curva, desde que exista, em todos os casos, limite para o quociente das diferenças. Se tal limite existir, dizemos que a função $f(x)$ é *derivável.* Doravante, suporemos sempre que as funções com que operamos são deriváveis, salvo menção expressa em contrário [1]. Devemos observar que, se a função $f(x)$ fôr derivável no ponto x, quando h tende para 0, deve

(1) Ver pág. 89, segunda nota.

existir limite do quociente $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$, seja com valor positivo, seja com valor negativo, *independente da maneira pela qual* h *tende para* 0, isto *é*, sem qualquer restrição relativa ao sinal.

Uma vez achada a derivada $f'(x)$, tomaremos a direção que faz um ângulo α com o eixo dos x positivos, dada pela equação $\operatorname{tg}\alpha = f'(x)$, como sendo a direção da tangente à curva, no ponto (x, y). Evitamos, assim, as dificuldades provenientes da indefinibilidade sob o ponto de

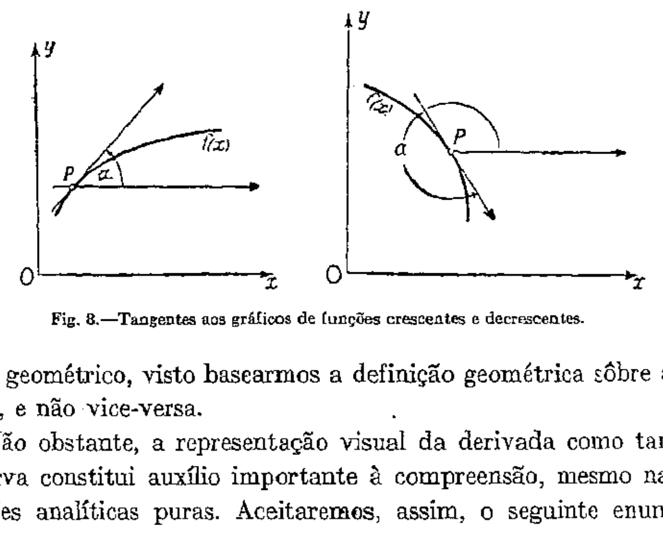


Fig. 8.—Tangentes aos gráficos de funções crescentes e decrescentes.

vista geométrico, visto basearmos a definição geométrica sôbre a analítica, e não vice-versa.

Não obstante, a representação visual da derivada como tangente à curva constitui auxílio importante à compreensão, mesmo nas discussões analíticas puras. Aceitaremos, assim, o seguinte enunciado, baseado na intuição geométrica:

Se f′(x) *fôr positiva e a curva fôr percorrida no sentido dos* x *crescentes, a tangente inclina-se para cima e, portanto, no ponto em questão, a curva sobe à medida que* x *cresce*; *se, por outro lado,* f′(x) *fôr negativa, a tangente inclina-se para baixo e a curva cai, quando* x *cresce* (fig. 8). Analìticamente, esta propriedade é deduzida da observação de que o limite de $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ não pode ser positivo, a menos que a função seja crescente no ponto x. Com isto significamos que para todos os valores de h suficientemente próximos de 0 o valor de $f(x+h)$ será maior ou

(1) Exemplos de casos em que esta condição não é satisfeita serão apresentados oportunamente (pág. 97).

menor do que $f(x)$, conforme h fôr positivo ou negativo. Podemos, naturalmente, estabelecer um enunciado correspondente para o caso em que $f'(x)$ é negativa.

2. A derivada como velocidade.

Do mesmo modo que a intuição comum nos conduz à noção de direção da tangente à curva, ela nos leva a atribuir *velocidade* ao *movimento*. E, mais uma vez, a definição de velocidade conduz-nos ao mesmo processo-limite que chamamos derivação.

Consideremos, por exemplo, o movimento de um ponto sôbre uma linha reta, cuja posição seja determinada por uma única coordenada y. Esta coordenada y representará a distância do ponto móvel considerado, com o sinal correspondente, a um ponto fixo sôbre a linha. O movimento será conhecido se tivermos y como função do tempo t, $y = f(t)$. Se esta função fôr linear $f(t) = ct + b$, haverá *movimento uniforme com velocidade* c e, para cada par de valores t e t_1 diferentes entre si, podemos escrever

$$c = \frac{f(t_1) - f(t)}{t_1 - t}.$$

A velocidade é, portanto, o quociente das diferenças da função $ct + b$, e êste quociente é independente do par de instantes particulares que fixarmos. Mas, o que devemos entender por velocidade do movimento no instante t, se o movimento não fôr uniforme?

A fim de estabelecermos esta definição, consideremos o quociente das diferenças $\frac{f(t_1) - f(t)}{t_1 - t}$, que designaremos velocidade média no intervalo de tempo entre t_1 e t. Se tal velocidade média tende para um limite definido, à medida que t_1 se aproxima cada vez mais de t, definiremos, naturalmente, êste limite como sendo a velocidade no instante t. Em outras palavras: *a velocidade no instante* t *é representada pela derivada*

$$f'(t) = \lim_{t_1 \to t} \frac{f(t_1) - f(t)}{t_1 - t}.$$

Dêste novo significado de derivada, que em si mesmo nada tem a ver com o problema das tangentes, vemos que é realmente apropriado

para definir o processo-limite da derivação como operação puramente analítica, independentemente de intuições geométricas. Neste caso, também, sempre faremos, tàcitamente, a hipótese da derivabilidade da função-posição, o que efetivamente é necessário, para que a noção de velocidade tenha sentido.

Como exemplo simples da relação entre o movimento e a velocidade, consideremos um corpo que cai livremente. Começaremos com a lei, estabelecida experimentalmente, de que a distância percorrida por um corpo em queda livre, no tempo t, é proporcional a t^2 e, portanto, pode ser representada por uma função da forma

$$y = f(t) = at^2.$$

Como na pág. 91, achamos imediatamente que a velocidade é dada pela expressão $f'(t) = 2at$, a qual mostra que a velocidade de um corpo que cai livremente cresce proporcionalmente ao tempo.

3. Exemplos.

Passaremos, agora, a apresentar um certo número de exemplos de derivação efetiva de funções. Iniciaremos com a função $y = f(x) = c$, onde c é uma constante. É sempre certo que $f(x + h) - f(x) = c - c = 0$, de tal modo que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = 0$; isto é, *a derivada de uma constante é nula.*

Para a função linear $y = f(x) = cx + b$, achamos que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{ch}{h} = c.$$

Derivemos ainda a função

$$y = f(x) = x^\alpha,$$

admitindo inicialmente que α seja inteiro e positivo. Desde que $x_1 \neq x$, temos

$$\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x} = \frac{x_1^\alpha - x^\alpha}{x_1 - x};$$

o segundo membro desta equação é igual a $x_1^{\alpha-1} + x_1^{\alpha-2}x + \ldots + x^{\alpha-1}$, como verificamos, seja pela divisão direta, seja pelo emprêgo da fórmula da soma das progressões geométricas. Esta nova expressão do segundo membro da equação é uma função contínua, e, assim, podemos efetuar a passagem ao limite $(x_1 \to x)$ pela simples substituição de x_1 por x. Cada têrmo torna-se, então, igual a $x^{\alpha-1}$ e, como o seu número é α, obteremos

$$y' = f'(x) = \frac{d(x^\alpha)}{dx} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Chegaríamos ao mesmo resultado se α fôsse um inteiro negativo $-\beta$; devemos, entretanto, admitir que x não seja nulo. Teremos então

$$\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}=\frac{\dfrac{1}{x_1^{\beta}}-\dfrac{1}{x^{\beta}}}{x_1-x}=-\frac{x^{\beta}-x_1^{\beta}}{x-x_1}\cdot\frac{1}{x^{\beta}x_1^{\beta}}$$

$$=-\frac{x^{\beta-1}+x^{\beta-2}x_1+\ldots+x_1^{\beta-1}}{x_1^{\beta}x^{\beta}}.$$

Mais uma vez podemos efetuar a passagem ao limite pela simples substituição de x_1 por x. Então, do mesmo modo que anteriormente, obteremos, para *limite*, a expressão

$$y'=-\beta\frac{x^{\beta-1}}{x^{2\beta}}=-\beta x^{-\beta-1}.$$

Portanto, para valores de α, inteiros e *negativos*, a derivada é novamente

$$y'=\alpha x^{\alpha-1}.$$

Finalmente, chegaremos à mesma fórmula quando x fôr positivo e α um número racional qualquer. Suporemos que $\alpha=p/q$, sendo p e q ambos inteiros e positivos. (Se um dêles fôr negativo, não haveria mudança essencial na demonstração; se $\alpha=0$ já conhecemos o resultado, visto que x^{α} é, então, constante.) Temos, então,

$$\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}=\frac{x_1^{p/q}-x^{p/q}}{x_1-x}.$$

Se fizermos $x^{1/q}=\xi$ e $x_1^{1/q}=\xi_1$, obteremos

$$\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}=\frac{\xi_1^{p}-\xi^{p}}{\xi_1^{q}-\xi^{q}}=\frac{\xi_1^{p-1}+\xi_1^{p-2}\xi+\ldots+\xi^{p-1}}{\xi_1^{q-1}+\xi_1^{q-2}\xi+\ldots+\xi^{q-1}}.$$

Após esta última transformação, podemos realizar imediatamente a passagem ao limite ($x_1\to x$ ou, o que dá no mesmo, $\xi_1\to\xi$), vindo a seguinte expressão para valor-limite

$$y'=\frac{p}{q}\,\frac{\xi^{p-1}}{\xi^{q-1}}=\frac{p}{q}\,\xi^{p-q}=\frac{p}{q}\,x^{(p-q)/q}=\frac{p}{q}\,x^{p/q-1},$$

ou, finalmente,

$$f'(x)=y'=\alpha x^{\alpha-1},$$

que representa o mesmo resultado obtido anteriormente. Deixamos ao leitor demonstrar que a mesma fórmula de derivação é aplicável, também, para expoentes racionais negativos. Voltaremos à derivação das potências logo que tivermos desenvolvido a teoria de maneira mais completa (pág. 130).

Como último exemplo, consideremos a derivação das funções trigonométricas $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$. Empreguemos a fórmula trigonométrica elementar

$$\frac{\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen} x}{h}=\frac{\operatorname{sen} x \cos h+\cos x \operatorname{sen} h-\operatorname{sen} x}{h}$$

$$=\operatorname{sen} x \frac{\cos h-1}{h}+\cos x \frac{\operatorname{sen} h}{h}.$$

Vimos, no Cap. I, § 7, págs. 47-48, que

$$\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen} h}{h}=1, \quad \lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}=0.$$

Obtemos, então, imediatamente, para a derivada procurada

$$y'=\frac{d(\operatorname{sen} x)}{dx}=\cos x.$$

A função $y=\cos x$ pode ser derivada de forma análoga. Partindo de

$$\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}=\cos x\frac{\cos h-1}{h}-\operatorname{sen} x\frac{\operatorname{sen} h}{h},$$

e, tomando o limite quando $h\to 0$, temos a derivada

$$y'=\frac{d(\cos x)}{dx}=-\operatorname{sen} x.$$

4. Algumas regras fundamentais para derivação.

Como no caso da integração, algumas regras simples, porém fundamentais para a formação das derivadas, são conseqüência imediata da definição. Se $\phi(x)=f(x)+g(x)$, resulta $\phi'(x)=f'(x)+g'(x)$; se $\psi(x)=cf(x)$ (sendo c uma constante), teremos $\psi'(x)=cf'(x)$. Sabemos que

$$\frac{\phi(x+h)-\phi(x)}{h}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

e

$$\frac{\psi(x+h)-\psi(x)}{h}=c\frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

e o enunciado decorre diretamente, pela passagem ao limite.

De acôrdo com estas regras, por exemplo, a derivada da função $\phi(x)=f(x)+ax+b$ (onde a e b são constantes) é fornecida pela equação

$$\phi'(x)=f'(x)+a.$$

5. Derivabilidade e continuidade das funções.

Convém sabermos que, se uma função é derivável, não há necessidade de demonstração especial da sua continuidade.

Se uma função é derivável, ela é necessàriamente contínua.

Com efeito, quando o quociente da diferença $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ se aproxima de um limite definido, à medida que h tende para zero, o numerador da fração, isto é, $f(x+h)-f(x)$ deve, também, convergir para zero com h; e êste fato exprime a continuidade da função $f(x)$ no ponto x.

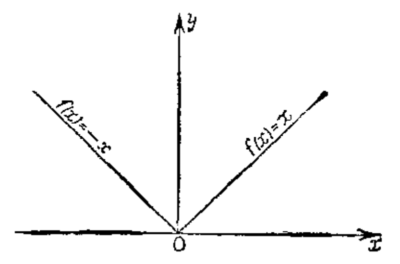


Fig. 9. — $f(x) = |x|$

A recíproca desta proposição, entretanto, é inteiramente falsa. *Não é verdade* que tôda função contínua admita derivada em qualquer dos seus pontos. O exemplo mais simples para refutar a hipótese é a função $f(x) = |x|$, isto é, $f(x) = -x$ para $x \leqq 0$ e $f(x) = x$ para $x \geqq 0$, cujo gráfico está representado na figura 9. No ponto $x = 0$ a função é contínua, mas não tem derivada. O limite de $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ é igual a 1 se h tende para 0 por valores positivos e igual a -1 se h se aproximar de 0 por valores negativos. Se não fixarmos o sinal de h, não existirá limite. A função apresentará, então, *derivadas diferentes à direita e à esquerda* do ponto x, e devemos entender por *derivada à direita* e *derivada à esquerda*, respectivamente, os valores limites de $\frac{f(x)+h-f(x)}{h}$, quando h se aproximar de 0 admitindo sòmente valores positivos ou negativos. A *derivabilidade* da função exige, assim, não apenas a existência das derivadas à direita e à esquerda, mas ainda que elas sejam iguais. A desigualdade das duas derivadas significa, geomètricamente, que a curva tem um ponto anguloso.

Como exemplos de pontos em que uma função contínua não é derivável, consideraremos aquêles onde a derivada se torna infinita, isto é, nos quais não existe derivada nem à direita nem à esquerda, crescen-

do o quociente da diferença $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ além de qualquer limite, quando $h \to 0$. Por exemplo, a função $y = f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{1/3}$ é definida e contínua para todos os valores de x. Para todos os valores de x diferentes de zero sua derivada é dada (pág. 95) pela fórmula $y' = \frac{1}{3}x^{-2/3}$. No ponto $x = 0$ teremos $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \dfrac{h^{1/3}}{h} = h^{-2/3}$, e constatamos logo que à medida que $h \to 0$ a expressão não admite valor limite, mas, ao contrário, tende para o ∞. Tal estado de coisas pode ser resumido, dizendo-se que a função possui derivada infinita (ou derivada ∞), no ponto considerado. Lembraremos, entretanto, que isto significa,

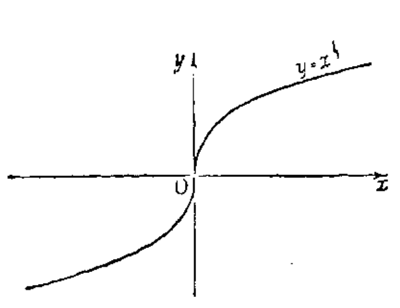


Fig. 10

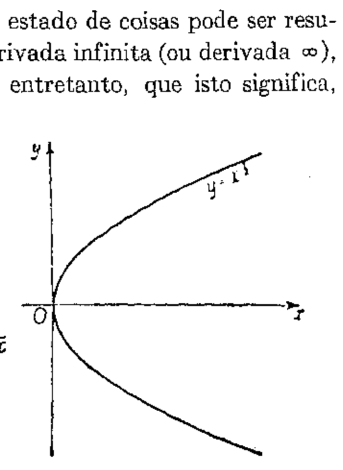


Fig. 11

apenas, que, quando h tende para 0, o quociente da diferença cresce além de qualquer valor, e que a derivada, no sentido em que a definimos, realmente não existe. A representação geométrica de uma derivada infinita é uma tangente vertical à curva (fig. 10).

A função $y = f(x) = \sqrt{x}$, definida e contínua para $x \geqq 0$, também não é derivável no ponto $x = 0$. Como y não é definida para os valores negativos de x, considera-se sòmente a derivada à direita. A equação $\dfrac{f(h)-f(0)}{h} = \dfrac{1}{\sqrt{h}}$ mostra que a derivada é infinita e que a curva toca o eixo dos y na origem (fig. 11).

Finalmente, na função $y = \sqrt[3]{x^2} = x^{2/3}$ temos um caso em que a derivada à direita no ponto $x = 0$ é positiva e infinita, enquanto a

derivada à esquerda é negativa e infinita, como se deduz da relação

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{1}{\sqrt[3]{h}}.$$

Efetivamente, a curva contínua $y = x^{2/3}$, também chamada *parábola semicúbica* ou *parábola de Neil*, tem um ponto anguloso na origem, sendo simétrica em relação ao eixo dos x.

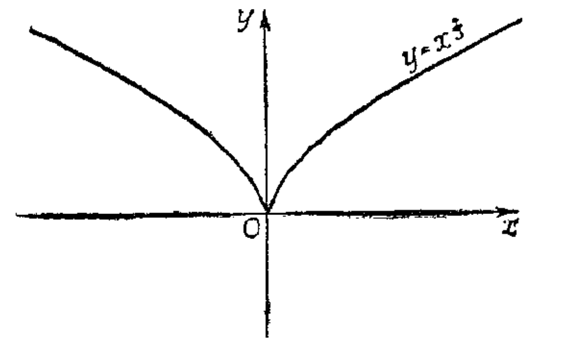


Fig. 12.—Ponto duplo

6. Derivadas de ordem superior e seu significado.

A derivada $f'(x)$ de uma função é, ela própria, uma função de x, cujo gráfico será denominado *curva derivada* da curva considerada. Por exemplo, a curva derivada da parábola $y = x^2$ é uma linha reta,

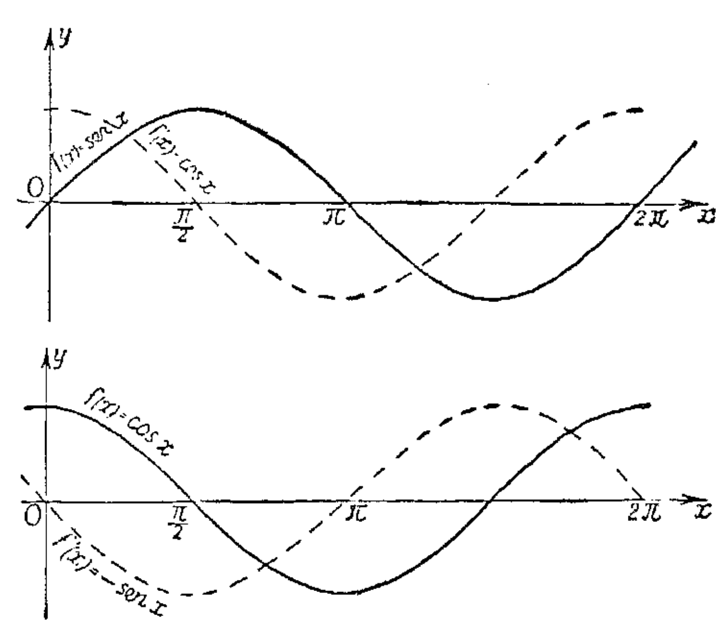


Fig. 13.—Curvas derivadas de sen x e cos x

representada pela função $y = 2x$. A curva derivada da senóide $y = \text{sen}\, x$ é a co-senóide $y = \cos x$, assim como a derivada de $y = \cos x$ é a curva $y = -\text{sen}\, x$. (Qualquer uma destas últimas curvas pode ser obtida das outras, por uma translação conveniente na direção do eixo dos x, como está indicado na figura 13.)

Como seqüência natural, agora podemos tratar das curvas derivadas, isto é, da formação da derivada da função $f'(x) = \phi(x)$. Tal derivada

$$\phi'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h},$$

desde que exista realmente, será denominada *derivada segunda* da função $f(x)$, e a designaremos por $f''(x)$.

Da mesma forma podemos procurar obter a derivada de $f''(x)$, a chamada *derivada de terceira ordem* de $f(x)$, a qual será representada por $f'''(x)$. O processo pode ser repetido quantas vêzes desejarmos, na maior parte das funções importantes, chegando-se, assim, à *derivada de ordem n*, ou à *enegésima derivada* $f^{(n)}(x)$ da função primitiva. Em certas ocasiões convém chamar $f(x)$ sua própria derivada de ordem 0 [1].

Se considerarmos o tempo t como variável independente e se representarmos o movimento de um ponto pela função $f(t)$, a segunda derivada será *fìsicamente* interpretada como sendo a velocidade com que a velocidade varia $f'(t)$ ou, como usualmente se chama, a *aceleração*. Mais tarde (págs. 158-159) discutiremos a interpretação geométrica da derivada de segunda ordem em seus pormenores. Notemos, porém, desde já, os seguintes fatos: no ponto em que $f''(x)$ é positiva, $f'(x)$ cresce juntamente com x; se, por outro lado, $f''(x)$ fôr negativa, $f'(x)$ decresce à medida que x cresce.

7. A derivada e o quociente da diferença.

O fato da diferença Δx, no processo de limite que define a derivada, tender para 0, é expresso, algumas vêzes, dizendo-se que a quantidade *Δx se torna infinitamente pequena*. Tal maneira de dizer significa que a passagem ao limite é considerada como um processo durante o qual a quantidade Δx pode-se aproximar de zero tanto quanto quisermos, sem igualá-lo jamais. Na notação de Leibnitz, a passagem ao limite, no processo de derivação, é expressa, simbòlicamente, pela substituição do símbolo Δ por d, de modo que podemos traduzir o símbolo de Leibnitz, para a derivada, pela equação

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

[1] Os têrmos *segundo, terceiro, . . ., n-gésimo coeficiente diferencial* são também empregados. Ver a segunda nota da pág. 90.

Se, entretanto, quisermos ter uma concepção clara do significado do cálculo diferencial, devemo-nos guardar de considerar as derivadas como quocientes de duas quantidades efetivamente "infinitamente pequenas". O quociente das diferenças $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ deve ser formado com as diferenças Δx, as quais não são iguais a 0. *Após* a formação dêste quociente das diferenças devemos imaginar a passagem ao limite, efetuada por transformação ou por meio de outro artifício qualquer. Não temos o direito de supor que, *primeiramente*, Δx varie, por meio de algo parecido com um processo de limite até atingir um valor infinitamente pequeno, mas não pròpriamente 0, de modo que Δx e Δy possam ser substituídos por quantidades "infinitamente pequenas" ou "infinitesimais" dx e dy, para então ser formado o quociente. Tal concepção de derivada é incompatível com a clareza de idéias exigida pela matemática e, na realidade, destituída de qualquer significação. Para um grande número de espíritos simples, indubitàvelmente, há certo encanto em admitir esta concepção, o encanto do mistério que está sempre associado à palavra "infinito" e, na própria gênese do cálculo diferencial, Leibnitz misturou essas idéias místicas e vagas, com a compreensão clara do processo de limite. É verdade que a obscuridade que circundou os fundamentos da nova Ciência não impediu que Leibnitz e seus grandes sucessores achassem o caminho da verdade. Mas isto não nos liberta do dever de evitar qualquer idéia confusa na construção do cálculo diferencial e integral.

A notação de Leibnitz, entretanto, não é apenas atraente em si mesma, porém de grande flexibilidade e da maior utilidade. A razão é que em muitos cálculos e transformações podemos lidar com *os símbolos* dy *e* dx *da mesma maneira que com os números comuns*, permitindo dar expressões mais perfeitas a muitos cálculos que, sem o seu emprêgo, não poderiam ser realizados. Nas páginas seguintes, veremos êste fato repetidamente verificado e, assim, desde que não esqueçamos o caráter simbólico dos sinais dy e dx, teremos justificação para o seu uso livre e continuado.

Para as derivadas de segunda ordem e de ordens superiores, Leibnitz entreviu notação muito sugestiva e de grande utilidade prática. Imaginou a derivada de segunda ordem como o limite do "quociente das segundas diferenças", da forma seguinte. Além da variável x, con-

sideraremos $x_1 = x + h$ e $x_2 = x + 2h$. Tomamos, então, o quociente das segundas diferenças como sendo o quociente das primeiras diferenças do quociente das primeiras diferenças, isto é, a expressão

$$\frac{1}{h}\left(\frac{y_2 - y_1}{h} - \frac{y_1 - y}{h}\right) = \frac{1}{h^2}(y_2 - 2y_1 + y),$$

onde $y = f(x)$, $y_1 = f(x_1)$, e $y_2 = f(x_2)$. Se escrevermos, também, $h = \Delta x$ e $y_2 - y_1 = \Delta y_1$, $y_1 - y = \Delta y$, podemos, apropriadamente, chamar a expressão contida no último parêntese a diferença da diferença de y ou a *segunda diferença de* y e escrever, simbòlicamente, (1)

$$y_2 - 2y_1 + y = \Delta y_1 - \Delta y = \Delta(\Delta y) = \Delta^2 y.$$

Nesta notação, o quociente das segundas diferenças será $\frac{\Delta^2 y}{(\Delta x)^2}$, onde o denominador é, realmente, o quadrado de Δx, enquanto, no numerador, o número 2 indica, simbòlicamente, a repetição do processo-diferença. Tal representação para o quociente das diferenças (2) levou Leibnitz a introduzir a notação

$$y'' = f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2},\ y''' = f'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3},\ \text{etc.},$$

para as derivadas segunda e de ordem superior e veremos na continuação que ela é satisfatória e prática.

8. Teorema do valor médio.

A relação simples que existe entre a derivada $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ e o quociente da diferença é importante para muitos fins. Tal relação é conhe-

(1) $\Delta\Delta = \Delta^2$ não representa um quadrado, porém, apenas, um símbolo para a "diferença da diferença" ou "diferença de segunda ordem".

(2) Devemos salientar que a afirmação de que a derivada de segunda ordem pode ser representada como o limite do quociente das diferenças de segunda ordem requer demonstração, visto têrmos definido a derivada de segunda ordem, não dêste modo, mas como o limite do primeiro quociente da diferença das derivadas de primeira ordem. No caso atual, porém, as duas definições são equivalentes desde que a derivada segunda seja contínua. A demonstração não será apresentada, por ora visto não têrmos, aqui, necessidade particular da mesma.

cida como o *teorema do valor médio*, e é obtida do modo seguinte. Consideremos o quociente das diferenças

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

de uma função $f(x)$, e admitamos que a derivada exista em todos os pontos do intervalo $x_1 \leqq x \leqq x_2$, de modo que o gráfico da curva possua tangente em qualquer ponto. O quociente das diferenças será representado pela direção da secante (fig. 14); êle é, efetivamente, a tangente do ângulo α, desenhado na figura. Imaginemos esta secante deslocada paralelamente a si mesma. Pelo menos uma vez ela tangenciará a curva, num ponto entre x_1 e x_2, isto é, no ponto mais afastado da secante. Logo, haverá um ponto intermediário ξ tal, que

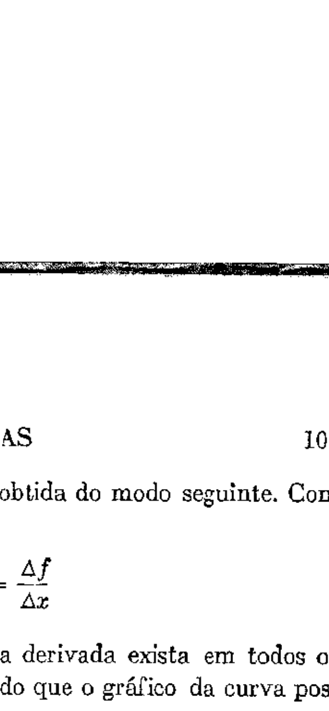


Fig. 14.—Ilustração do teorema do valor médio

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = f'(\xi).$$

Êste enunciado se denomina *teorema do valor médio do cálculo diferencial*. Podemos ainda exprimi-lo de forma algo diferente, observando que o número ξ pode ser escrito sob a forma

$$\xi = x_1 + \theta(x_2 - x_1),$$

onde θ representa um certo número, entre 0 e 1. Nas aplicações do teorema do valor médio acharemos, muitas vêzes, que θ não pode ser determinado com aproximação maior que esta, mas reconheceremos que, usualmente, não há necessidade de valores mais precisos. O teorema do valor médio, enunciado de forma rigorosa, se exprime do modo seguinte:

Se $f(x)$ *fôr contínua no intervalo fechado* $x_1 \leqq x \leqq x_2$ *e derivável em todos os pontos do intervalo aberto* $x_1 < x < x_2$, *existirá pelo menos um valor* θ, *sendo* $0 < \theta < 1$, *tal que,*

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'[(x_1 + \theta(x_2 - x_1)].$$

Substituindo-se x_1 por x e x_2 por $x + h$, será possível exprimir o teorema do valor médio pela fórmula

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(\xi) = f'(x + h\theta), \ x < \xi < x + h.$$

Desejamos salientar que, embora seja essencial a continuidade de $f(x)$ em todos os pontos do intervalo, inclusive nos extremos, não há necessidade de se admitir a existência de derivadas nos pontos extremos. Esta observação, aparentemente trivial, é efetivamente útil em muitas aplicações.

Se, em qualquer ponto do intervalo, a derivada deixar de existir, o teorema do valor médio não é mais necessàriamente verdadeiro. Vejamos o exemplo $f(x) = |x|$ (pág. 97).

Podemos completar o raciocínio intuitivo com as considerações seguintes. Há, no mínimo, um ponto P da curva que tem a distância máxima da corda que une os pontos de abscissas x_1 e x_2 (fig. 15). Êste ponto da curva tem, por hipótese, tangente definida. Provaremos, então, que esta tangente deve ser paralela à corda. Por definição, a tangente é a posição limite da secante, sendo obtida pela união do ponto P a um ponto Q da curva, enquanto Q move-se na direção de P. Visto que, por hipótese, Q não está mais longe da corda do que P, a linha PQ, traçada de P para Q, ou corta a corda ou se mantém paralela à mesma; e isto deve-se verificar, independentemente do lado em que esteja situado Q, em relação a P. A afirmação, porém, sòmente é possível se a posição limite fôr paralela à corda. Se designarmos a abscissa de P por ξ, a inclinação $f(\xi)$ da tangente em P é igual à inclinação da corda, $\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$. Daí podermos tomar, simplesmente, a abscissa de P para valor de ξ no teorema.

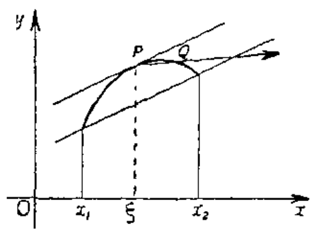


Fig. 15.—Ilustração do teorema do valor médio

A demonstração *rigorosa* do teorema do valor médio é, usualmente, desenvolvida do modo seguinte. Primeiramente estabelecemos o teorema de Rolle, que é um caso especial do teorema do valor médio:

Se a função $\phi(x)$ *fôr contínua no intervalo fechado* $x_1 \leqq x \leqq x_2$ *e de-*

rivável no intervalo aberto $x_1 < x < x_2$, *e se, além disso,* $\phi(x_1) = 0$ *e* $\phi(x_2) = 0$, *existirá no mínimo um ponto* ξ, *no intervalo, para o qual* $\phi'(\xi) = 0$.

Efetivamente, há pelo menos um ponto ξ no intervalo, onde a função $\phi(x)$ admite o seu valor máximo ou mínimo (Cap. I, Apêndice I, § 2, pág. 63). Para concretizar, admitamos que ξ seja um ponto em que $\phi(\xi)$ tem um máximo, de modo que para cada x do intervalo, $\phi(x) \leqq \phi(\xi)$. Então, para cada número h cujo valor absoluto, $|h|$, fôr suficientemente pequeno, será verdade que $\phi(\xi) - \phi(\xi + h) \geqq 0$. Se h fôr positivo

$$\frac{\phi(\xi + h) - \phi(\xi)}{h} \leqq 0;$$

se h tender para 0, através de valores positivos, obteremos $\phi'(\xi) \leqq 0$. Se, por outro lado, h fôr negativo, $\dfrac{\phi(\xi + h) - \phi(\xi)}{h} \geqq 0$ e, então, se h tender para 0 através de valores negativos, obteremos $\phi'(\xi) \geqq 0$. Comparando as duas desigualdades, constatamos que $\phi'(\xi) = 0$, o que prova o teorema.

Apliquemos o teorema de Rolle à função [1]

$$\phi(x) = f(x) - f(x_1) - \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} [f(x_2) - f(x_1)].$$

Esta função satisfaz, sem dúvida, à condição $\phi(x_1) = \phi(x_2) = 0$, sendo da forma $\phi(x) = f(x) + ax + b$, com os coeficientes constantes $a = -\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ e b. Sabemos (pág. 99) que

$$\phi'(x) = f'(x) + a,$$

e, pelo teorema de Rolle, teremos

$$0 = \phi'(\xi) = f'(\xi) + a$$

para um valor intermediário de ξ, convenientemente determinado. Daí tiramos

$$f'(\xi) = -a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

ficando demonstrado o teorema do valor médio.

(1) Esta função, pondo de parte o fator independente de x, representa a distância do ponto $(x, f(x))$ da curva, à secante. O leitor poderá verificá-lo sòzinho, muito fàcilmente.

Como primeira das muitas aplicações do teorema do valor médio, demonstraremos o seguinte. *Seja a função* f(x) *contínua no intervalo fechado* $a \leqq x \leqq b$, *com derivada* f'(x) *em todos os pontos do intervalo aberto* $a < x < b$. *Se* f'(x) *fôr positiva em qualquer ponto de* $a < x < b$, *a função* f'(x) *é monótona crescente no intervalo* $a \leqq x \leqq b$. *Anàlogamente, se* f'(x) *fôr negativa em* $a < x < b$, f(x) *será monótona decrescente.*

Demonstraremos sòmente a primeira parte da tese, visto que a segunda pode ser feita de modo semelhante. Suponhamos que $f'(x) > 0$, e que x_1 e $x_2 > x_1$ sejam dois valores quaisquer de x no intervalo fechado. O teorema do valor médio permite escrever

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(\xi),$$

onde $x_1 < \xi < x_2$. Como ambos os fatôres da direita são positivos, segue-se que $f(x_2) > f(x_1)$ e, portanto, $f(x)$ é monótona crescente.

9. Representação aproximada de funções arbitrárias por funções lineares. Diferenciais.

A equação $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$ que define a derivada, é equivalente às equações

$$f(x) + h - f(x) = hf'(x) + \epsilon h$$

ou
$$y + \Delta y = f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + \epsilon \Delta x,$$

nas quais ϵ é uma quantidade que tende para zero com $h = \Delta x$. Se imaginarmos, por enquanto, o ponto x fixo e o acréscimo Δx variável por essa fórmula, o acréscimo da função, isto é, a quantidade Δy consistirá de dois têrmos, a saber, uma parte $hf'(x)$, proporcional a h, e um êrro que pode ser diminuído quanto quisermos, relativamente a h, tomando-se o próprio h suficientemente pequeno. Assim, quanto menor fôr o intervalo, em tôrno do ponto x, que estivermos considerando, tanto mais precisamente a função $f(x + h)$ (que é função de h) será representada pela sua parte linear $f(x) + hf'(x)$. A representação aproximada de $f(x + h)$ por uma função linear de h é expressa geomètricamente pela substituição da curva pela tangente no ponto x. Mais tarde (Cap. VII), estudaremos a aplicação prática destas idéias à realização de cálculos aproximados.

Por ora, observaremos de passagem que é possível empregar-se a representação aproximada do acréscimo Δy pela expressão linear $hf'(x)$, para estabelecermos uma definição lògicamente satisfatória da noção de "diferencial", o que foi feito, em particular, por Cauchy.

Enquanto que a idéia de diferencial, considerada como quantidade infinitamente pequena, não tem significado, sendo, conseqüentemente, fútil definir a derivada como o quociente de duas quantidades tais, podemos, ainda, experimentar atribuir um sentido tal à equação $f'(x) = dy/dx$, que a expressão dy/dx não precise ser imaginada como puramente simbólica, mas como o quociente efetivo das duas quantidades dy e dx. Para isto, definiremos primeiramente a derivada $f'(x)$ por meio do processo-limite, e, depois, consideraremos x fixo, tomando o acréscimo $h = \Delta x$ como variável independente. Esta quantidade h será *denominada* a *diferencial* de x e representada por $h = dx$. A expressão $dy = y'\,dx = hf'(x)$ será, então, definida como a *diferencial da função y*. Como vemos, dy é um número que nada tem a ver com quantidades infinitamente pequenas. A derivada $y' = f'(x)$ é, pois, realmente, *o quociente das diferenciais* dy *e* dx. Êste enunciado, porém, nada tem de notável; êle é, de fato, mera tautologia, um reenunciado da definição verbal. A diferencial dy é, conseqüentemente, a parte linear do acréscimo Δy (fig. 16).

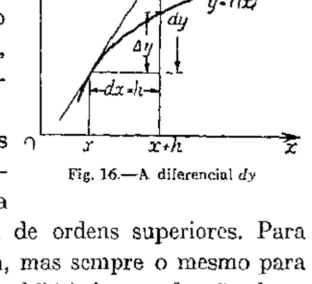


Fig. 16.—A diferencial dy

Não empregaremos, de imediato, estas diferenciais. Notaremos, todavia, para sermos completos, que também é possível a formação de diferenciais de segunda ou de ordens superiores. Para tanto, escolhamos h de qualquer maneira, mas sempre o mesmo para cada valor de x. Teremos, então que $dy = hf'(x)$ é uma função de x, da qual podemos formar nova diferencial. O resultado será a diferencial de segunda ordem de y, que é representada pelo símbolo $d^2y = d^2f(x)$. O acréscimo de $hf'(x)$ sendo $[f'(h + x) - f'(x)]$, a diferencial de segunda ordem é obtida substituindo-se a quantidade entre colchêtes pela sua parte linear $hf''(x)$, obtendo-se $d^2y = h^2f''(x)$. Podemos, naturalmente, prosseguir do mesmo modo, obtendo as diferenciais de terceira, quarta, ...ordens, de y, as quais podem ser representadas por $h^3f'''(x)$, $h^4f^{iv}(x)$ e assim sucessivamente.

10. Observações sôbre aplicações às ciências naturais.

Nas aplicações da matemática aos fenômenos naturais, jamais lidamos com quantidades definidas com precisão. Se um comprimento

mede, *exatamente*, um metro, é questão que não pode ser decidida por simples experiência e que, conseqüentemente, não tem "significado físico". Também não há significado físico imediato no dizermos que o comprimento de uma barra material é racional ou irracional; poderemos sempre medi-la, com qualquer grau de precisão desejada, e o que realmente interessa é saber se é possível efetuar a medida empregando apenas números racionais com denominadores relativamente pequenos. Assim como o problema da racionalidade ou irracionalidade no sentido rigoroso da "matemática exata", não tem significado físico, também a realização efetiva dos processos-limite, nas aplicações, não passa de uma idealização matemática.

O resultado prático de tais abstrações repousa, principalmente, no fato de que o seu emprêgo torna as expressões analíticas mais simples e manejáveis. Por exemplo, é, indiscutìvelmente, mais simples e conveniente operar com a noção de velocidade instantânea, que é função de *um único* instante de tempo, bem definido, do que com a de velocidade média entre dois instantes diferentes. Sem tais idealizações, qualquer investigação racional da natureza estaria condenada a complicações insanáveis, caindo no seu próprio início.

Não é nosso intuito, entretanto, entrar na discussão das relações existentes entre a matemática e a realidade. Queremos apenas salientar, visando melhor compreensão da teoria, que podemos substituir a derivada pelo quociente das diferenças, nas aplicações, e vice-versa, desde que as diferenças sejam suficientemente pequenas para garantir uma aproximação bastante exata. Tanto o físico, como o biologista, o engenheiro ou qualquer outro que tenha que lidar com tais idéias na prática, tem o direito de identificar o quociente das diferenças com a derivada, dentro dos seus limites de precisão. Quanto menor fôr o incremento $h = dx$ da variável independente, tanto mais precisamente êle poderá representar o acréscimo $\Delta y = f(x + h) - f(x)$, pela diferencial $dy = hf'(x)$. Dentro dos limites de exatidão requerida pelo problema, costuma-se denominar as quantidades $dx = h$ e $dy = hf'(x)$ por "infinitesimais". Tais quantidades "fìsicamente infinitesimais" têm significado preciso. Elas são quantidades finitas, diferentes de zero, escolhidas suficientemente pequenas para a investigação considerada, por exemplo, menores do que a parte fracionária de um comprimento de onda ou menores do que a distância entre dois iônios de um átomo.

De uma maneira geral, tais quantidades são menores do que o grau de precisão desejado.

Exemplos

1.* Substituir o enunciado: "No ponto $x = \xi$ a função $f(x)$ não é derivável" por outro equivalente, sem empregar a palavra "derivável".

2. Derivar as funções seguintes diretamente, utilizando a definição de derivada:

(*a*) $\dfrac{1}{x+1}$. (*b*) $\dfrac{1}{x^2+2}$. (*c*) $\dfrac{1}{2x^2+1}$. (*d*) $\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$.

(*e*) $\operatorname{sen} 3x$. (*f*) $\cos ax$. (*g*) $\operatorname{sen}^2 x$. (*h*) $\cos^2 x$.

3. Determinar o valor intermediário ξ do teorema do valor médio para as funções seguintes, traçando o gráfico de cada caso:

(*a*) $2x$. (*b*) x^2. (*c*) $5x^3 + 2x$. (*d*) $1/(x^2+1)$. (*e*) $x^{1/3}$.

4. Demonstrar que o teorema do valor médio não se aplica às funções seguintes, quando os dois pontos têm sinais opostos, por exemplo, $x_1 = -1$, $x_2 = 1$:

(*a*) $1/x$. (*b*) $|x|$. (*c*) $x^{2/3}$.

Ilustrar gràficamente e comparar com o exercício anterior.

4. Integral indefinida, função primitiva e teoremas fundamentais do cálculo diferencial e integral.

Como já frisamos anteriormente, a conexão existente entre os problemas da integração e da diferenciação é a pedra angular do cálculo diferencial e integral. Tal relação será, agora, o objeto dos nossos estudos.

1. A integral como função do limite superior.

O valor da integral definida da função $f(x)$ depende da escolha dos limites a e b da integração. Tanto pode ser função do limite inferior a, como do superior b. A fim de estudar esta dependência de modo mais preciso, imaginemos o limite inferior a como um número fixo, designemos a variável de integração não mais por x, mas por u (pág. 82), e indiquemos o limite superior por x em vez de b, para sugerir que de-

vemos considerar a variação do limite superior, pesquisando o valor da integral como função dêste limite. Assim, escreveremos

$$\int_a^x f(u)\,du = \Phi(x).$$

Chamaremos à função $\Phi(x)$ uma *integral indefinida* da função $f(x)$. Quando nos referirmos a *uma* e não *à* integral indefinida, queremos frisar que poderíamos ter escolhido qualquer outro limite inferior em vez de a, o que, ordinàriamente, dá um valor diferente à integral. Geomètricamente, a integral indefinida para cada valor de x é dada pela área sob a curva $y = f(u)$ (tracejada na fig. 17) e limitada pelas ordenadas $u = a$ e $u = x$, com o sinal determinado de acôrdo com as regras já estabelecidas (pág. 81).

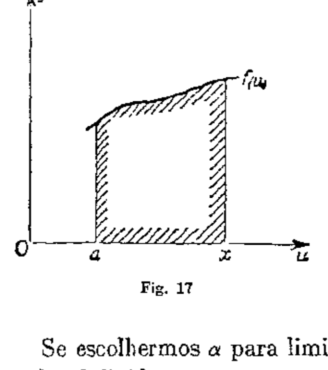


Fig. 17

Se escolhermos α para limite inferior em vez de a, teremos a integral indefinida

$$\Psi(x) = \int_\alpha^x f(u)\,du.$$

A diferença $\Psi(x) - \Phi(x)$ será dada por

$$\int_\alpha^a f(u)\,du,$$

que é constante, visto a e α terem sido ambos considerados números fixos. Portanto

$$\Psi(x) = \Phi(x) + \text{const.};$$

As integrais indefinidas da mesma função diferem ùnicamente por uma constante aditiva.

Podemos, da mesma forma, considerar a integral como função do limite inferior e introduzir a função

$$\phi(x) = \int_x^b f(u)\,du,$$

na qual b é uma quantidade fixa. Novamente, teremos duas integrais

com limites superiores diferentes, b e β, divergindo sòmente por uma constante aditiva $\int_b^\beta f(u)\,du$.

2. Derivadas das integrais indefinidas.

A derivação da integral indefinida $\Phi(x)$, em relação à variável x, nos conduz ao teorema seguinte:

A integral indefinida

$$\Phi(x) = \int_a^x f(u)\,du$$

de uma função contínua f(x) *possui sempre derivada* Φ' (x), *e, além disso,*

$$\Phi'(x) = f(x);$$

isto é, a derivação da integral indefinida de uma função contínua dá-nos, novamente, a mesma função.

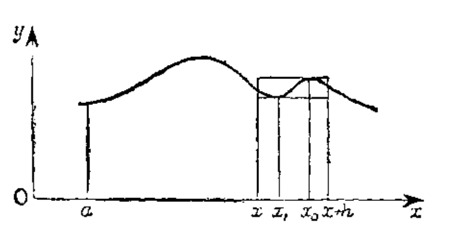


Fig. 18.—Derivação da integral indefinida

Esta é a idéia fundamental de todo o cálculo diferencial e integral. A demonstração, extremamente simples, decorre da interpretação da integral como área. Formemos o quociente das diferenças

$$\frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h},$$

e observemos que o numerador

$$\Phi(x+h) - \Phi(x) = \int_a^{x+h} f(u)\,du - \int_a^x f(u)\,du = \int_x^{x+h} f(u)\,du$$

representa a área limitada pelas ordenadas correspondentes a x e $x+h$.

Seja x_0 um ponto entre x e $x+h$, no qual a função $f(x)$ admite o valor máximo, e x_1 um ponto no qual a função assume o valor mínimo, dentro do intervalo considerado (fig. 18). A área em questão ficará

contida entre os valores de $hf(x_0)$ e $hf(x_1)$, que representam as áreas dos retângulos com o intervalo entre x e $x+h$ como base e $f(x_0)$ e $f(x_1)$, respectivamente, como alturas. Analìticamente,

$$f(x_0) \geqq \frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} \geqq f(x_1).$$

A demonstração pode ser feita diretamente, partindo da definição de integral, sem apêlo à interpretação geométrica [1]. Para tal, escrevamos

$$\int_x^{x+h} f(u)\,du = \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{n} f(u_\nu)\,\Delta u_\nu,$$

onde $u_0 = x$, u_1, u_2, $\ldots$, $n_n = x + h$, são pontos de divisão do intervalo entre x e $x+h$. Além disso, o maior dos valores absolutos das diferenças $\Delta u_\nu = u_\nu - u_{\nu-1}$ tende para zero à mediada que n cresce. Desta maneira, $\Delta u_\nu/h$ será certamente positivo, quer h seja positivo, quer negativo. Como $f(x_0) \geqq f(u_\nu) \geqq f(x_1)$, e visto a soma das quantidades Δu_ν ser igual a h, segue-se que

$$f(x_0) \geqq \frac{1}{h} \Sigma f(u_\nu)\,\Delta u_\nu \geqq f(x_1);$$

se n tender para o infinito, obteremos as desigualdades enunciadas acima, pois

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(u)\,du \text{ ou } \frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h}.$$

Se h tender, então, para zero, $f(x_0)$ e $f(x_1)$ tenderão, ambos, para o limite $f(x)$, dada a continuidade da função. Vemos, pois, imediatamente, que

$$\Phi'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} = f(x),$$

como asseverava o teorema.

Devido à derivabilidade de $\Phi(x)$ resulta (§ 3, N. 5, pág. 97) o seguinte teorema:

A integral de uma função contínua f(x) *é uma função contínua do limite superior.*

(1) Ver, também, a discussão posterior, na pág. 127.

Para completar, diremos que se considerarmos a integral definida, não como uma função do seu limite superior, mas sim do inferior, a derivada não será igual a $f(x)$, mas sim a $-f(x)$. Escreveremos

$$\phi(x) = \int_x^b f(u)\,du,$$

e então

$$\phi'(x) = -f(x)$$

A demonstração decorre imediatamente da observação de que

$$\int_x^b f(u)\,du = -\int_b^x f(u)\,du.$$

3. Função primitiva; definição geral da integral indefinida.

O teorema que acabamos de demonstrar estabelece que a integral indefinida $\Phi(x)$ dá solução imediata ao problema seguinte: *dada uma função* f(x), *determinar outra* F(x), *tal que*

$$F'(x) = f(x).$$

Êste problema requer a *inversão do processo de derivação*. É um exemplo típico de solução inversa, tal como ocorre em muitas partes da matemática e que já verificamos ser um método matemático muito profícuo para a geração de novas funções. (Por exemplo, a primeira extensão da idéia dos números naturais foi obtida graças à necessidade de se inverterem certos processos elementares de cálculo. A formação das funções inversas levou-nos, por sua vez, a novas espécies de funções).

Uma função $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$, é denominada *função primitiva de $f(x)$* ou, simplesmente, *primitiva de $f(x)$*. Esta designação sugere que a função $f(x)$ se origina de $F(x)$ por derivação.

O problema da inversão da derivação ou da determinação da função primitiva é, à primeira vista, de caráter completamente diverso da integração. Entretanto, sabemos da pág. 111, que:

Tôda integral indefinida $\Phi(x)$ *da função* f(x) *é função primitiva de* f(x).

Contudo, tal resultado não resolve inteiramente o problema da determinação das funções primitivas, visto não sabermos se achamos *tôdas* as suas soluções. A questão referente ao grupo formado por tôdas as funções primitivas é satisfeita pelo teorema seguinte, às vêzes mencionado como fundamental do cálculo diferencial e integral:

A diferença entre duas primitivas $F_1(x)$ *e* $F_2(x)$ *da mesma função* $f(x)$ *é sempre uma constante:*

$$F_1(x) - F_2(x) = c.$$

Assim, de qualquer função primitiva $F(x)$ *podem-se obter tôdas as outras sob a forma*

$$F(x) + c$$

mediante escolha conveniente da constante c. *Inversamente, a expressão* $F_1(x) = F(x) + c$ *representa uma função primitiva de* $f(x)$, *para cada valor da constante* c.

É claro que para qualquer valor da constante c, a função $F(x) = c$ é uma primitiva, desde que $F(x)$ o seja. Temos (pág. 96)

$$\frac{[F(x+h)+c]-[F(x)+c]}{h} = \frac{F(x+h)-F(x)}{h},$$

e como, por hipótese, o primeiro membro tende para $f(x)$ quando $h \to 0$, o mesmo deve acontecer ao segundo membro, e, portanto

$$\frac{d}{dx}[F(x)+c] = f(x) = F'(x).$$

Para concluir a demonstração do teorema, resta mostrar que a diferença das funções primitivas é, sempre, uma constante. Seja a diferença

$$F_1(x) - F_2(x) = G(x)$$

da qual formamos a derivada

$$G'(x) = \lim_{h\to 0}\left[\frac{F_1(x+h)-F_1(x)}{h} - \frac{F_2(x+h)-F_2(x)}{h}\right].$$

Ambas as expressões do segundo membro, por hipótese, têm o mesmo limite $f(x)$, quando $h \to 0$; logo, $G'(x) = 0$, para todos os valores de x. Entretanto, uma função cuja derivada é nula em tôda a parte deve ter um gráfico cuja tangente é sempre paralela ao eixo dos x, isto é, deve ser constante. Teremos, então, $G(x) = c$, como tínhamos enunciado. Êste último fato pode ser verificado por meio do teorema do

valor médio, sem recorrermos à intuição. Aplicando o teorema do valor médio a $G(x)$, teremos, com efeito:

$$G(x_2) - G(x_1) = (x_2 - x_1)G'(\xi); \quad x_1 < \xi < x_2.$$

Já sabemos, porém, que a derivada $G'(x)$ é nula para todos os valores de x, e, portanto, em particular, para ξ. Deduz-se imediatamente que $G(x_1) = G(x_2)$. Desde que x_1 e x_2 sejam valores arbitrários de x no intervalo considerado, $G(x)$ deve ser constante.

Combinando o teorema que acabamos de provar com o resultado do n.º 2 (pág. 111), podemos enunciar o seguinte:

Qualquer função primitiva F(x) *de uma função dada* f(x) *pode ser representada por*

$$F(x) = c + \Phi(x) = c + \int_a^x f(u)\, du,$$

onde c *e* a *são constantes, e, recìprocamente, para quaisquer valores constantes de* a *e de* c, *escolhidos arbitràriamente, tal expressão sempre representará a função primitiva.*

Podemos supor fàcilmente que a constante c pode, em geral, ser omitida, porque, mudando-se o limite inferior a, altera-se a função primitiva por uma constante aditiva. Em muitos casos, contudo, não se obtêm *tôdas* as funções primitivas se omitirmos c, como mostra, por exemplo, $f(x) = 0$. Para esta função a integral definida do N.º 1 (pág. 110) é sempre nula, independentemente do limite inferior; entretanto, qualquer constante arbitrária é função primitiva de $f(x) = 0$. A função $f(x) = \sqrt{x}$, proporciona um segundo exemplo. Esta função é definida sòmente para os valores não-negativos de x e a sua integral indefinida é

$$\Phi(x) = \tfrac{2}{3}x^{3/2} - \tfrac{2}{3}a^{3/2},$$

e verificamos que, qualquer que seja a forma pela qual escolhermos o limite inferior a, a integral indefinida $\Phi(x)$ é sempre obtida de $\frac{2}{3}(x)^{3/2}$ pela adição de uma constante menor ou igual a zero, a saber, a constante $-\frac{2}{3}(x)^{3/2}$. Entretanto, $\frac{2}{3}x^{3/2} + 1$ é também uma função primitiva de $\sqrt{x}$. Assim, na expressão geral da função primitiva não podemos dispensar a função aditiva. A relação achada permite darmos uma extensão à idéia de integral indefinida. Chamaremos, daqui para diante, qualquer expressão da forma $c + \Phi(x) = c + \int^x f(u)\, du$, uma

integral indefinida de $f(x)$. Em outras palavras, *não faremos distinção entre função primitiva e integral indefinida*. Não obstante, para que o leitor tenha uma concepção clara sôbre as relações existentes entre êstes conceitos, é absolutamente necessário que, antes de tudo, grave bem no espírito que integração e inversão de derivação são duas coisas completamente diferentes, e que só o conhecimento do parentesco entre as mesmas nos autoriza a aplicar o têrmo "integral indefinida" também à função primitiva.

A integral indefinida é usualmente representada por uma notação que é, talvez, um pouco obscura. Escrevemos

$$F(x) = c + \int_a^x f(u)\,du = \int f(x)\,dx;$$

isto é, omitimos tanto o limite superior x como o inferior a e a constante c, além de empregarmos a letra x para a variável de integração. Seria melhor, na realidade, evitar esta última troca, para evitar possíveis confusões com o limite superior x que é a variável independente de $F(x)$. Usando a notação $\int f(x)dx$ não devemos perder de vista a indeterminação contida na mesma, isto é, êste símbolo representa, sempre, sòmente *uma* integral indefinida.

4. Emprêgo das funções primitivas na avaliação das integrais definidas.

Suponhamos conhecida uma função primitiva qualquer $F(x) = \int f(x)\,dx$ da função $f(x)$ e que buscamos o valor da integral definida $\int_a^b f(u)\,du$. Sabemos que a integral definida

$$\Phi(x) = \int_a^x f(u)\,du,$$

sendo, também, uma função primitiva de $f(x)$, pode diferir de $F(x)$ sòmente pela constante de sua adição. Conseqüentemente

$$\Phi(x) = F(x) + c,$$

ficando imediatamente determinada a constante de adição c, se lembrarmos que a integral indefinida $\Phi x = \int_a^x f(u)du$ se anula para $x = a$.

Obteremos, então, $0 = \Phi(a) = F(a) + c$, donde $c = -F(a)$ e $\Phi(x) = F(x) - F(a)$. Em particular, para $x = b$, teremos:

$$\int_a^b f(u)du = F(b) - F(a),$$

que nos dá a seguinte importante regra:

Se F(x) *fôr uma função primitiva qualquer de* f(x), *a integral definida de* f(x) *entre os limites* a *e* b *é igual à diferença* F(b) − F(a).

Se usarmos a relação $F'(x) = f(x)$, podemos escrevê-la sob a forma

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)\,dx = \int_a^b \frac{dF(x)}{dx}dx.$$

Esta fórmula pode ser compreendida diretamente e demonstrada com facilidade. Dividamos o intervalo $a \leqq x \leqq b$ em subintervalos $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ e consideremos a soma $\Sigma \dfrac{\Delta F}{\Delta x_\nu} \Delta x_\nu$. Por um lado, esta soma é simplesmente $\Sigma \Delta F = F(b) - F(a)$, independente de subdivisão particular; daí seu limite $F(b) - F(a)$. Por outro lado, porém, o seu limite é, ainda, igual a $\int_a^b F'(x)\,dx$, como se deduz do teorema do valor médio. Temos, então, $\Delta F/\Delta x_\nu = F'(\xi_\nu)$, onde ξ_ν representa um ponto intermediário entre os extremos $x_{\nu-1}$ e x_ν no intervalo Δx_ν. A soma será, pois, igual a $\Sigma \Delta x_\nu F'(\xi_\nu)$ e, pela definição de integral, esta expressão tende para o limite $\int_a^b F'(x)dx$, à medida que as subdivisões se vão tornando cada vez mais delgadas, como estabelece a fórmula.

Nas aplicações da regra, usamos seguidamente o símbolo | para representar a diferença $F(b) - F(a)$, isto é, escrevemos assim

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b,$$

indicando o traço vertical que, na expressão precedente, devemos substituir x, primeiro por b, e, depois, por a, formando, então, a diferença entre as quantidades resultantes.

5. Exemplos.

Estamos agora em condições de ilustrar, com alguns exemplos simples, as relações existentes entre a integral definida, a integral indefinida e a derivada, as quais acabamos de estudar. Cada fórmula de

integração, demonstrada diretamente no § 2 (pág. 82), permite, em face do teorema da pág. 111, a dedução de uma fórmula de derivação.

A fórmula de integração

$$\int_a^b x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha + 1}(b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1})$$

para qualquer quantidade racional $\alpha \neq 1$ e para todos os valores positivos de a e b, obtida na pág. 86, nos dá

$$\int_a^x u^\alpha\, du = \frac{1}{\alpha + 1}(x^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}),$$

se substituirmos a variável de integração por u e o limite superior por x. Do teorema fundamental decorre que o segundo membro desta expressão é uma função primitiva do integrando, isto é, a fórmula de derivação

$$\frac{d}{dx} x^{\alpha+1} = (\alpha + 1)x^\alpha$$

será válida para todos os valores racionais de $\alpha \neq -1$ e para todos os valores positivos de x. Por substituição direta, verificamos que esta *última* expressão também se verifica para $\alpha = -1$, se $x > 0$. O resultado coincide com o que achamos pela derivação direta (pág. 95). Assim, empregando o teorema fundamental, depois de efetuada a integração, pode-se evitar o incômodo da derivação.

A fórmula de integração (pág. 87)

$$\int_a^x \cos u\, du = \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a$$

conduz a $\dfrac{d}{dx}\operatorname{sen} x = \cos x$, em coincidência com o resultado encontrado na pág. 96.

Reciprocamente, podemos considerar cada fórmula de derivação, diretamente demonstrada, $F'(x) = f(x)$, como decorrente da relação que existe entre a função primitiva $F(x)$ e a função derivada $f(x)$, isto é, podemos encará-la como fórmula para a integração indefinida e, depois, obter da mesma a integral definida de $f(x)$, como fizemos na pág. 117. Êste método é empregado com freqüência, como veremos no Cap. IV (pág. 205). Em particular, pode-se partir dos resultados obtidos no § 3 (pág. 94), obtendo-se as fórmulas relativas às integrais do § 2 (pág. 82), em face do teorema fundamental. Por exemplo, sabemos que $\dfrac{d}{dx} x^{\alpha+1} = (\alpha + 1)x^\alpha$ (pág. 95). Logo, $\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha + 1}$ é uma função primitiva ou integral indefinida de x^α, desde que $\alpha \neq -1$, e chegamos novamente à fórmula relativa à integral acima, pela página 117.

Exemplos

1. Deduzir as integrais correspondentes às derivadas dos Exemplos 2 e 3 da pág. 109.

2. Avaliar (*a*) $\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)^2}$. (*b*) $\int_0^1 \frac{2x\,dx}{(x^2+1)^2}$.

3. Com os dados do exemplo 2, e partindo da definição de integral definida, demonstrar que

$$(a)\ \lim_{n\to\infty} n\left[\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\ldots+\frac{1}{(2n)^2}\right]=\frac{1}{2}.$$

$$(b)\ \lim_{n\to\infty} n^2\left[\frac{2}{(n^2+1)^2}+\frac{2}{(n^2+2^2)^2}+\ldots+\frac{n}{(n^2+n^2)^2}\right]=\frac{1}{4}.$$

5. Métodos simples de integração gráfica

Uma integral definida ou função primitiva de $f(x)$ é uma função $y = F(x)$ que pode ser considerada, não sòmente como área, mas, como qualquer outra função, pode, também, ser representada gràficamente por uma curva. A definição sugere a possibilidade imediata de se construir tal curva aproximadamente, obtendo-se, assim, o gráfico da função integral. De início, lembraremos que tal curva não é única, visto que a constante aditiva faz com que ela se desloque, paralelamente a si mesma, na direção do eixo dos y. Podemos, pois, estabelecer que a curva integral passa por um ponto arbitràriamente escolhido, por exemplo, pelo ponto de coordenadas $x=1$, $y = 0$, se $x = 1$ pertencer ao intervalo para o qual $f(x)$ é definida. A curva fica, pois, determinada, pela exigência de que, para cada valor de x, a sua direção seja dada pelo valor correspondente de $f(x)$. Para se obter uma construção aproximada que satisfaça tais condições, procuraremos desenhar, não pròpriamente a curva $y = F(x)$, mas sim um contôrno poligonal (linha quebrada), cujos vértices estejam, verticalmente, em correspondência com os pontos de divisão do eixo dos x, prèviamente escolhidos, e cujos lados tenham, aproximadamente, a mesma direção que o segmento da curva integral, situado entre os mesmos pontos de divisão. Para isto, dividamos o intervalo considerado do eixo dos x

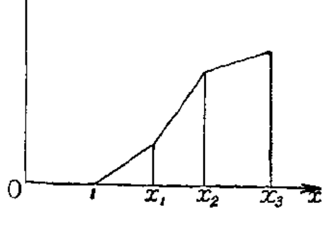


Fig. 19.—Integração gráfica

por meio dos pontos $x = 1$, x_1, x_2, ... em certo número de partes, não necessàriamente tôdas iguais, e, pelos pontos de divisão, elevemos

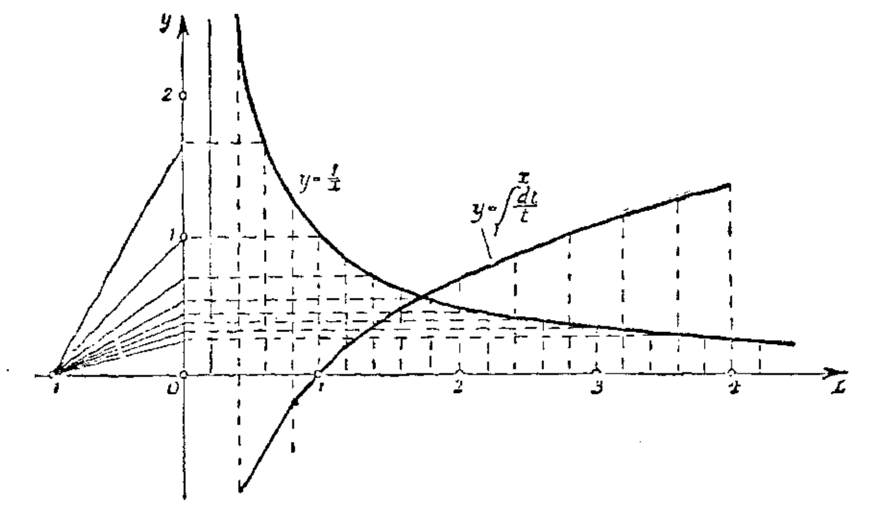


Fig. 20.—Integração gráfica de $1/x$

paralelas ao eixo dos y. Tracemos, então, pelo ponto $x = 1$, $y = 0$ (fig. 19), a linha reta, cuja inclinação é igual a $f(1)$; pela interseção desta com a linha $x = x_1$ traçaremos outra linha com a inclinação $f(x_1)$; pela interseção desta com a linha $x = x_2$ traçaremos a reta com a inclinação $f(x_2)$, e assim sucessivamente. Na prática, eleva-se a ordenada relativa à curva $y = f(x)$, em cada ponto de divisão, projetando-a sôbre uma paralela qualquer ao eixo dos y. Para fixar idéias, suponhamos que as ordenadas foram projetadas sôbre o próprio eixo dos y. Obteremos, então, a direção da curva integral, unindo o ponto de

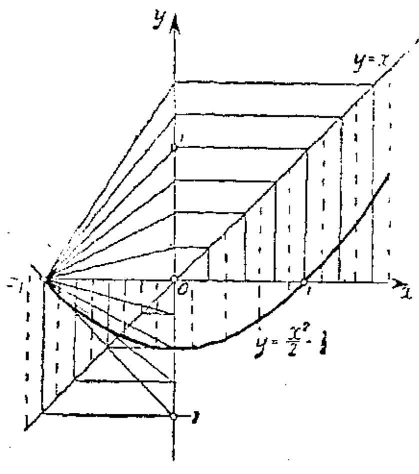


Fig. 21.—Integração gráfica de x

coordenada $x = 0$ e $y = f(x)$ ao ponto $x = -1$, $y = 0$. Transportando essas direções paralelamente a si mesmas, obteremos o contôrno poligonal cujos vértices estão situados, verticalmente, em correspondência com os pontos de divisão do eixo dos x, e cujas direções coin-

cidem com as da curva integral, no início de cada intervalo. A poligonal pode representar a curva integral com o grau de aproximação desejado, tornando-se a subdivisão do intervalo suficientemente grande. A precisão do traçado pode ser comprovada escolhendo-se, não a direção de cada segmento do polígono no ponto inicial, mas sim a do ponto médio do intervalo correspondente (figs. 20 e 21) [1].

A construção descrita, aplicada à função $f(x) = x$, foi efetuada na figura 21. Ela nos dá, pela integração gráfica, uma aproximação da curva integral, que é a paralela $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$. Além disso, a figura 20 apresenta uma aproximação da curva integral da função $f(x) = 1/x$. Esta integral, que nos fornecerá a função logarítmica, será estudada, posteriormente, com grande minúcia. Finalmente, lembramos ao leitor a conveniência de resolver, por si mesmo, alguns outros exemplos, como, v. g., integrar, gràficamente, sen x e cos x.

Exemplo

1. Construir as seguintes curvas integrais, por integração gráfica, com intervalos $h = 1/10$:

(a) $\displaystyle\int_0^x x^2\,dx\ (0 \leqq x \leqq 2)$. (b) $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{x^2}\,dx\ (1 \leqq x \leqq 2)$.

(c) $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+x^2}\,dx\ (0 \leqq x \leqq 1)$.

Avaliar, em particular, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$.

6. Observações sôbre as relações existentes entre integral e derivada

Antes de estudarmos, sistemàticamente, as relações deduzidas no § 4 (pág. 109), considerá-las-emos sob outro ponto de vista, estritamente relacionado com a concepção intuitiva de densidade e outros conceitos físicos.

(1) Mencionaremos, de passagem, que a integração gráfica (isto é, a determinação do gráfico de $F(x)$, função primitiva de $f(x)$ que também é dada por um gráfico) pode ser realizada por meio de um aparelho mecânico, o intégrafo. Um ponteiro percorre a curva enquanto uma pena traça, automàticamente, uma das curvas $y = F(x)$, para a qual $F'(x) = f(x)$. A indeterminação da constante de integração é traduzida por certa arbitrariedade na posição inicial do aparelho. Artifícios gerais de cálculo, relativos à integração, encontram-se nas obras: *Cálculo Integral*, págs. 214-217, de B. Williamson (Ed. Longmans); *Dictionary of Applied Physics*, vol. III, págs. 450-457 (Ed. Macmillan, 1923).

1. Distribuição de massa e densidade. Quantidade total e quantidade específica.

Suporemos que uma massa qualquer é distribuída ao longo de uma linha reta, o eixo dos x, de uma maneira contínua, porém, não obrigatòriamente uniforme. Imaginemos, por exemplo, uma coluna vertical de ar sôbre a superfície de área 1. Tomaremos para eixo dos x uma linha vertical e, para origem, o ponto da vertical situado na superfície da Terra. A massa total, localizada entre duas abscissas x_1 e x_2, é determinada por meio da chamada função-soma $F(x)$, da seguinte maneira. Medem-se as distâncias a partir do ponto inicial de distribuição de massa, $x = 0$, sôbre a vertical, e representa-se a massa total, compreendida entre as abscissas 0 e x, por $F(x)$. O incremento sofrido pela massa, entre as abscissas x_1 e x_2, é dado, então, pela fórmula

$$F(x_2) - F(x_1);$$

assim, o incremento recebe um sinal que mudará se x_1 e x_2 forem trocados um pelo outro.

A massa média, por unidade de comprimento, entre x_1 e x_2 será

$$\frac{F(x_2) - F(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Se admitirmos que a função $F(x)$ é derivável, quando $x_2 \to x_1$ êste valor tende para a derivada $F'(x_1)$. Tal quantidade é, precisamente, o que denominamos usualmente *massa específica* ou *densidade* de distribuição no ponto x_1, dependendo o seu valor, naturalmente, do ponto particular escolhido. Entre a densidade $f(x)$ e a função-soma $F(x)$ existe, portanto, a relação

$$F(x) = \int_0^x f(u)du; \; f(x) = F'(x).$$

A função-soma é uma função primitiva da densidade, ou, o que vem a dar no mesmo, *a massa é a integral da densidade* e, reciprocamente, *a densidade é a derivada da função-soma*.

Esta mesma função é encontrada, com muita freqüência, na física. Por exemplo, se designarmos por $Q(t)$ a quantidade total de calor necessária para elevar a unidade de massa de uma substância, da

temperatura t_0 à temperatura t, a quantidade de calor necessária para elevar a temperatura de t_1 a t_2 será igual a

$$Q(t_2) - Q(t_1).$$

Entre t_1 e t_2 a quantidade média de calor consumida por unidade de acréscimo de temperatura é

$$\frac{Q(t_2) - Q(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

Se admitirmos, novamente, que a função $Q(t)$ é derivável, no limite obteremos a função

$$q(t) = \lim_{t_1 \to t} \frac{Q(t) - Q(t_1)}{t - t_1},$$

que denominaremos *calor específico* da substância. Êste calor específico deve, em geral, ser considerado como função da temperatura.

Entre o calor específico e a quantidade total de calor surge, novamente, a relação característica de integral e derivada,

$$\int_a^b q(t)\, dt = Q(b) - Q(a).$$

Encontraremos a mesma relação sempre que as quantidades total e específica forem consideradas. Por exemplo, carga elétrica e densidade de carga, ou fôrça total sôbre uma superfície, comparada com a densidade de fôrça, isto é, pressão.

Na natureza, acontece que geralmente conhecemos diretamente, não a densidade, ou quantidade específica, mas sim a quantidade total. Assim, é a integral que é primitiva (como sugere o nome "primitiva"), obtendo-se a quantidade específica sòmente depois de aplicar-se um processo-limite, isto é, a derivação.

Incidentalmente, notemos que se as massas consideradas são positivas por sua natureza, a função-soma $F(x)$ será, forçosamente, função monótona crescente de x e, conseqüentemente, a quantidade específica, a densidade $f(x)$, deve ser positiva (não negativa). Nada impede, porém, de considerarmos também quantidades negativas (por exemplo, eletricidade negativa). Em tal caso, as funções-soma consideradas $F(x)$ não precisam mais ser monótonas.

2. **Aplicações.**

A relação entre a função-soma primitiva e a densidade de distribuição talvez se torne mais clara quando verificarmos que, do ponto de vista dos fatos físicos, os processos-limite de integração e derivação representam, apenas, uma idealização abstrata, não exprimindo algo palpável na natureza. Ao contrário, no reino da objetivação física podemos formar, em lugar da integral, sòmente uma soma de quantidades muito pequenas e, em lugar da derivada, o quociente de quantidades igualmente muito pequenas. As quantidades Δx se mantêm diferentes de 0, sendo a passagem ao limite $\Delta x \to 0$ apenas uma simplificação matemática que não prejudica, essencialmente, a precisão da representação simbólica dos fatos reais.

Como exemplo, retomemos a coluna vertical de ar. De acôrdo com a teoria atômica, sabemos que não podemos idealizar a massa distribuída segundo uma função contínua de x. Pelo contrário, somos levados a admitir (e isto representa, também, uma hipótese simplificadora) que a massa se distribui ao longo do eixo dos x sob a forma de grande número de pontos moleculares situados muito próximos uns dos outros. A função-soma $F(x)$ não será, então, uma função contínua, mas terá um valor constante no intervalo entre duas moléculas, dando um salto desde que x atinja o ponto ocupado por uma molécula. O valor dêste salto será igual à massa da molécula, sendo a distância média entre moléculas, de acôrdo com os resultados estabelecidos pela teoria atômica, da ordem 10^{-8} cm. Se tivermos que realizar qualquer medida na coluna de ar de que nos estamos ocupando, sendo consideradas desprezíveis massas moleculares da ordem 10^{-4}, a função dada não poderá ser distinguida de uma função contínua. Efetivamente, se escolhermos dois valores x e $x + \Delta x$, cuja diferença Δx seja menor do que 10^{-4} cm, a diferença entre $F(x)$ e $F(x + \Delta x)$ será igual à massa das moléculas do intervalo. Como o número destas moléculas é de ordem 10^4, os valores de $F(x)$ e de $F(x + \Delta x)$ serão, em tudo que disser respeito à nossa experiência, iguais. Assim, consideraremos como densidade de distribuição, simplesmente o quociente $\frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}$. Constitui, com efeito, hipótese física importante o fato de não obtermos valores mensuráveis diferentes para êste quo-

ciente, quando Δx variar entre certos limites, por exemplo, entre 10^{-4} e 10^{-5} cm. Imaginemos, agora, que $F(x)$ seja calculada e determinada para um grande número de pontos em tôrno de 10^{-4} cm, e que os pontos assim achados sejam ligados por linhas retas; obter-se-á um polígono que, pelo arredondamento dos vértices, proporcionará uma curva dotada de tangente, variável contìnuamente. Esta curva será o gráfico de uma função, digamos, de $F_1(x)$. Tal função, $F_1(x)$, não pode, dentro dos limites da precisão experimental, ser diferençada de $F(x)$, e suas derivadas, dentro dos mesmos limites, serão iguais a $\Delta F/\Delta x$. Achamos, assim, uma função contínua, derivável, que, para as finalidades físicas, *é* a função $F(x)$.

Talvez seja conveniente discutirmos ainda um outro exemplo dos conceitos de função-soma e densidade de distribuição. Na estatística, por exemplo, na teoria cinética da matéria ou na biologia estatística, êstes conceitos ocorrem freqüentemente, sob uma forma na qual a natureza da idealização matemática é particularmente clara. Imaginemos, por exemplo, as moléculas de um gás contido em um recipiente e observemos as suas velocidades num dado instante. Seja N o número de moléculas e $N\Phi(x)$ o número daquelas cuja velocidade é menor do que x. A relação entre o número de moléculas que se movem com velocidade entre 0 e x e o número total de moléculas será, então, $\Phi(x)$. Esta função-soma não é contínua, mas sim secionalmente constante [1] e, sùbitamente, cresce de $1/N$ quando x, no seu crescimento, atinge valor igual à velocidade de alguma molécula.

A idealização que devemos fazer consiste em imaginar o número N como capaz de crescer além de qualquer limite. Admitamos, então, que na passagem ao limite, $N \to \infty$, a função-soma $\Phi(x)$ tende para uma função-limite, $F(x)$, contínua e definida. Que êste seja realmente o caso (isto é, que possamos substituir $\Phi(x)$, com suficiente precisão), representa, sem dúvida, uma importante hipótese física. Outra hipótese, do mesmo tipo, é supormos que a função $F(x)$ possui derivada $F'(x) = f(x)$, à qual chamaremos a densidade de distribuição. A função-soma é relacionada com a densidade de distribuição pelas equações

$$F(x) = \int_0^x f(u)du; \quad F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

(1) Em alemão: *stuckweise*; cap. IX, § 3.

A densidade de distribuição é, às vêzes, considerada como a *probabilidade específica* de que uma molécula possua a velocidade x. A idealização que acabamos de expor exerce papel preponderante na teoria cinética dos gases, criada por Maxwell, e, sob o mesmo aspecto matemático, aparece em muitos problemas atinentes à estatística matemática.

7. AVALIAÇÃO DE INTEGRAIS E TEOREMA DO VALOR MÉDIO DO CÁLCULO INTEGRAL

Finalizaremos êste capítulo com algumas considerações sôbre matéria de interêsse geral, cuja importância poderá ser aquilatada mais tarde. Trata-se da avaliação das integrais.

1. Teorema do valor médio do cálculo integral.

A primeira e mais simples regra para calcular as integrais pode ser enunciada do modo seguinte: se num intervalo $a \leqq x \leqq b$ a função contínua $f(x)$ fôr sempre não-negativa (isto é, positiva ou zero), a integral definida

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

será, também, sempre não-negativa. Da mesma forma, a integral não será positiva se a função não fôr positiva em todo o intervalo. A demonstração do teorema decorre imediatamente da definição da integral.

O teorema seguinte deduz-se do precedente: se

$$f(x) \geqq g(x)$$

em todos os pontos do intervalo $a \leqq x \leqq b$ teremos, também,

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqq \int_a^b g(x)\,dx$$

Devido à primeira observação, a integral da diferença $f(x) - g(x)$ é não-negativa, e, pela regra da adição (pág. 82),

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx.$$

Seja M o maior e m o menor valor da função $f(x)$ no intervalo ab. A função $M - f(x)$ é não-negativa no intervalo, o mesmo sendo ver-

dade para $f(x) - m$. Destas observações obtemos imediatamente a dupla desigualdade

$$\int_a^b m\,dx \leqq \int_a^b f(x)\,dx \leqq \int_a^b M\,dx.$$

Mas, $\int_a^b m\,dx = m\int_a^b dx = m(b-a)$ e, de modo semelhante, $\int_a^b M\,dx = M(b-a)$, donde tiramos $m(b-a) \leqq \int_a^b x)\,dx \leqq M(b-a)$. A integral que nos ocupa pode, pois, ser representada pelo produto de $(b-a)$ por uma quantidade μ situada entre m e M:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mu(b-a), \quad m \leqq \mu \leqq M.$$

Em geral, não há necessidade de se conhecer o valor exato da média μ. Podemos, entretanto, dizer que êle será atingido pela função ao menos num ponto ξ do intervalo $a \leqq \xi \leqq b$, visto que uma função contínua, no intervalo em que está definida, assume todos os valores compreendidos entre o mínimo e o máximo correspondentes. Como no caso do teorema do valor médio do cálculo diferencial, a determinação do valor exato de ξ é, em muitos casos, sem importância. Podemos, pois, fazer $\mu = f(\xi)$, onde ξ representa um valor intermediário de x, vindo então,

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(\xi), \quad a \leqq \xi \leqq b.$$

Esta última expressão é o *teorema do valor médio do cálculo integral.*

O teorema ficará mais generalizado se substituirmos o integrando $f(x)$ por outro da forma $f(x)\,p(x)$, no qual $p(x)$ *e uma função qualquer, arbitrária, não-negativa, que será suposta contínua, como já o foi* f(x). Desde que $mp(x) \leqq f(x)\,p(x) \leqq Mp(x)$, obteremos, imediatamente

$$m\int_a^b p(x)\,dx \leqq \int_a^b f(x)p(x)\,dx \leqq M\int_a^b p(x)\,dx,$$

ou, em uma única equação,

$$\int_a^b f(x)p(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b p(x)dx,$$

onde ξ *é, novamente, um número entre* a *e* b.

Demonstramos, assim, o teorema:

Se f(x) *e* p(x) *forem funções contínuas no intervalo* $a \leqq x \leqq b$, *e se* $p(x) \geqq 0$, *verifica-se*

$$\int_a^b f(x)p(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b p(x)\,dx,$$

sendo $a \leqq \xi \leqq b$.

2. Aplicações. Integração de x^α para qualquer valor irracional de α.

O teorema do valor médio e a equivalente avaliação das integrais facultam, imediatamente, ampla visão sôbre o seguinte fato intuitivo e fàcilmente compreensível: o valor da integral sofre alteração muito pequena quando a própria função variar, em cada ponto, muito pouco. Em linguagem precisa: se em todo o intervalo $a \leqq x \leqq b$ o valor absoluto da diferença de duas funções $f(x)$ e $g(x)$ fôr menor do que a quantidade ϵ, a diferença de suas integrais será, em valor absoluto, menor do que $\epsilon(b-a)$. Em símbolos, representaremos êste enunciado da seguinte maneira: se tivermos $|f(x) - g(x)| < \epsilon$, em todo o intervalo $a \leqq x \leqq b$, virá

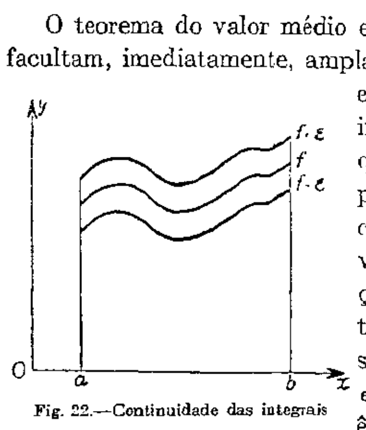


Fig. 22.—Continuidade das integrais

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx \right| < \epsilon(b-a)$$

ou, expresso de outro modo,

$$-\epsilon(b-a) + \int_a^b g(x)\,dx < \int_a^b f(x)\,dx < \int_a^b g(x)\,dx + \epsilon(b-a).$$

A figura 22 ilustra o teorema com muita clareza. Para a curva $y = f(x)$ traçamos as "curvas paralelas" $y = f(x) + \epsilon$ e $y = f(x) - \epsilon$. Por hipótese, a função $g(x)$ fica dentro da faixa limitada por tais "curvas paralelas". É claro que as áreas limitadas pelas curvas $f(x)$ e $g(x)$ diferem entre si por quantidade menor do que a metade da área da faixa, área esta que vale

$$\int_a^b [f(x) + \epsilon]\, dx - \int_a^b [f(x) - \epsilon]\, dx = 2\epsilon(b - a).$$

Não necessitaremos apelar para a intuição. Visto que

$$-\epsilon + g(x) < f(x) < \epsilon + g(x);$$

podemos deduzir, empregando considerações análogas às da pág. 126,

$$\int_a^b [-\epsilon + g(x)]\, dx < \int_a^b f(x)\, dx < \int_a^b [g(x) + \epsilon]\, dx,$$

que, como resultado das regras fundamentais da integração, assume a forma

$$-\epsilon(b - a) + \int_a^b g(x) dx < \int_a^b f(x)\, dx < \int_a^b g(x)\, dx + \epsilon(b - a);$$

devemos notar que, apenas, substituímos a integral de uma soma pela correspondente soma de integrais, observando que

$$\int_a^b \epsilon\, dx = \epsilon(b - a).$$

Como demonstração da importância dêste teorema, mostraremos que, com o seu auxílio, poderemos integrar a função x^α para qualquer valor irracional de α, ou, mais exatamente, que poderemos calcular a integral indefinida $\int_a^b x^\alpha\, dx$. Suporemos que $0 < a < b$.

Representemos o expoente α como o limite de uma seqüência de números racionais $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$, de maneira que $\alpha = \lim_{n\to\infty} \alpha_n$. Neste caso podemos admitir que nenhum dos valores de α_n seja igual a -1, desde que o próprio α seja diferente de -1. Para a potência x^α, usaremos, pois, a definição

$$x^\alpha = \lim_{n\to\infty} x^{\alpha_n}$$

notando que, por menor que seja o número positivo ϵ escolhido, será sempre possível determinarmos um n suficientemente grande para têrmos $| x^\alpha - x^{\alpha_n} | < \epsilon$, no intervalo total (1).

(1) Tal fato pode ser demonstrado, de maneira muito simples, como segue (Apêndice, I § 3, pág. 69). Lembrando que x^α é uma função monótona e fazendo $\delta_n = \alpha_n - \alpha$, teremos

$$| x^\alpha - x^{\alpha_n} | = x^\alpha | 1 - x^{\delta_n} | \leqq (a^\alpha + b^\alpha) (| 1 - a^{\delta_n} | + 1 - b^{\delta_n} |);$$

como x^α está situado entre a^α e b^α, de modo que $x^\alpha \leqq a^\alpha + b^\alpha$, teremos, da mesma forma, que $1 - x^{\delta_n}$ e estará situado entre $1 - a^{\delta_n}$ e $1 - b^{\delta_n}$ e, portanto, $| 1 - x^{\delta_n} | \leqq (| 1 - a^{\delta_n} | + | 1 - b^{\delta_n} |)$. De $\lim_{n\to\infty} a^{\delta_n} = \lim_{n\to\infty} b^{\delta_n} = 1$, deduz-se que

$$\lim_{n\to\infty} | 1 - a^{\delta_n} | = \lim_{n\to\infty} | 1 - b^{\delta_n} | = 0;$$

Se n fôr escolhido suficientemente grande, o segundo membro da desigualdade será menor do que ϵ. Teremos, então, $| x^{\alpha_n} - x^\alpha | < \epsilon$ simultâneamente para todos os valores de x no intervalo $a \leqq x \leqq b$.

Precisamos, agora, sòmente, aplicar a relação acima mencionada às funções $f(x) = x^{\alpha}$ e $g(x) = x^{\alpha_n}$, obtendo

$$-\epsilon(b-a) + \int_a^b x^{\alpha_n}\,dx < \int_a^b x^{\alpha}\,dx < \int_a^b x^{\alpha_n}\,dx + \epsilon(b-a).$$

As integrais de ambos os membros, porém, podem ser calculadas de acôrdo com o que foi exposto na pág. 85, dando

$$-\epsilon(b-a) + \frac{1}{\alpha_n+1}(b^{\alpha_n+1} - a^{\alpha_n+1})$$
$$< \int_a^b x^{\alpha}\,dx < \frac{1}{\alpha_n+1}(b^{\alpha_n+1} - a^{\alpha_n+1}) + \epsilon(b-a).$$

Se, agora, fizermos o número ϵ decrescer continuamente, tendendo para 0, os calores correspondentes de n ultrapassarão quaisquer limites. As quantidades α_n, a^{α_n} e b^{α_n}, convergirão, então, para α, a^{α} e b^{α}, respectivamente, dando o resultado imediato

$$\int_a^b x^{\alpha}\,dx = \frac{1}{\alpha+1}(b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}).$$

Em outras palavras, a fórmula de integração que tem lugar para os valores racionais de α verifica-se, também, para os valores irracionais do expoente.

Segue-se daí, em virtude do teorema fundamental da pág. 111, que, para valores positivos de x, a fórmula de derivação

$$\frac{d}{dx}x^{\alpha+1} = (\alpha+1)x^{\alpha}$$

já verificada para os valores racionais de α, é igualmente válida para os irracionais.

EXEMPLOS

1. Achar o valor intermediário ξ do teorema do valor médio do cálculo integral, para as expressões seguintes, e interpretá-los geomètricamente:

(a) $\int_a^b 1\,dx$. (b) $\int_a^b x\,dx$.

(c) $\int_a^b x^n\,dx$. (d) $\int_a^b \frac{dx}{x^2}$

2. Suponhamos que $f(x)$ é contínua. Demonstrar, partindo do teorema do valor médio do cálculo integral, que a derivada da integral indefinida de $f(x)$ é igual à própria $f(x)$.

3. (a) Calcular $I_n = \int_0^a x^{1/n}\,dx$. O que é $\lim_{n\to\infty} I_n$? Interpretar geomètricamente êste significado. (b) Fazer o mesmo para $I_n = \int_0^a x^n\,dx$.

4.° Seja a função $f(\xi)$ contínua para qualquer valor de ξ, e $F(x)$ definida pela equação

$$F(x) = \frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{\delta} f(x+t)\,dt,$$

onde δ é um número positivo, arbitrário. Demonstrar que:

(a) a função $F(x)$ possui derivada contínua para todos os valores de x;

(b) em qualquer intervalo fixado, $a \leqq x \leqq b$, podemos fazer $|F(x) - f(x)| < \epsilon$, sendo ϵ uma quantidade arbitrária, positiva, prefixada, mediante escolha de δ suficientemente pequeno.

5.° *Desigualdades de Schwarz para as integrais.*

Demonstrar que para tôdas as funções contínuas $f(x)$, $g(x)$

$$\int_a^b [f(x)]^2\,dx \int_a^b [g(x)]^2\,dx \geqq \left[\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right]^2.$$

APÊNDICE AO CAPÍTULO II

1. Existência da integral definida de uma função contínua

Apresentaremos, ainda, uma prova de que tôda função contínua, entre os limites a e b $(a < b)$, possui, sempre, integral definida. Para tal, retomaremos a notação do § 1 (pág. 79) e consideraremos a soma

$$F_n = \sum_{\nu=1}^{n} f(\xi_\nu)\,\Delta x_\nu.$$

Certamente, é verdade que

$$\underline{F_n} = \sum_{\nu=1}^{n} f(v_\nu)\,\Delta x_\nu \leqq F_n \leqq \sum_{\nu=1}^{n} f(u_\nu)\,\Delta x_\nu = \overline{F_n},$$

onde $f(v_\nu)$ representa o mínimo e $f(u_\nu)$ o valor máximo da função no subintervalo ν. O problema consiste em provar que F_n converge para um limite definido, independentemente da maneira particular de subdivisão e da escolha das quantidades ξ_ν, desde que, à medida que n cresce, o comprimento do maior subintervalo tende para zero. Para demonstrá-lo, é necessário e suficiente provar que $\underline{F_n}$ e $\overline{F_n}$ convergem para um único e mesmo limite.

Sabemos, dada a continuidade uniforme de $f(x)$, que, em cada intervalo suficientemente pequeno, a "oscilação" $|f(u_\nu) - f(v_\nu)|$ é menor do que qualquer número positivo ϵ, por menor que êle seja. Desta sorte, quando a subdivisão atingir um certo grau, teremos, com certeza

$$0 \leqq \overline{F_n} - \underline{F_n} = \sum_{\nu=1}^{n} \Delta x_\nu \, [f(u_\nu) - f(v_\nu)] < \epsilon(b-a).$$

Vemos, pois, que, à medida que n crescer, a diferença deve convergir para zero, podendo, portanto, contentarmo-nos em demonstrar que uma das somas, digamos, $\overline{F_n}$, converge. A convergência será verificada desde que mostremos que $|\overline{F_n} - \overline{F_m}|$ pode tornar-se tão pequena quanto quisermos com a condição de que as subdivisões correspondentes (às quais nos referimos como "subdivisão n" e "subdivisão m", respectivamente), ultrapassem determinado grau de pequenez. Êste grau de pequenez é caracterizado pelo fato de que, para ambas as subdivisões, a oscilação da função em cada subintervalo é menor do que $\epsilon (\epsilon > 0)$. Passemos a uma terceira subdivisão, cujos pontos de divisão contenham todos os pontos n e m, tomados conjuntamente. Esta nova subdivisão, que tem, digamos, l pontos de divisão, será representada pelo índice l e a soma superior correspondente por $\overline{F_l}$. Estamos, agora, aptos a calcular o valor de $|\overline{F_n} - \overline{F_m}|$, determinando, primeiramente, o valor das expressões $|\overline{F_n} - \overline{F_l}|$ e $|\overline{F_m} - \overline{F_l}|$. Afirmamos que as duas relações seguintes são verificadas

$$\underline{F_n} \leqq \overline{F_l} \leqq \overline{F_n} \quad \text{e} \quad \underline{F_m} \leqq \overline{F_l} \leqq \overline{F_m}.$$

A demonstração decorre, imediatamente, do significado das expressões consideradas. Seja, digamos, o subintervalo de ordem ν da subdivisão n. Êste intervalo abrangerá um ou vários subintervalos da subdivisão l; os têrmos correspondentes a êstes intervalos consistirão, cada um, de dois fatôres, um dos quais será a diferença Δx, enquanto o outro, por certo, não excederá $f(u_\nu)$, nem atingirá $f(v_\nu)$. A soma dos comprimentos Δx dos intervalos da subdivisão l, que se encontram no subintervalo de ordem ν da subdivisão mais grosseira n, será, pois, exatamente Δx_ν. Vemos, assim, que o valor correspondente à soma $\overline{F_l}$ deve estar contido entre os limites $f(u_\nu)\Delta x_\nu$ e $f(v_\nu)\Delta x_\nu$. Se estendermos a soma a todos os n subintervalos, obteremos a primeira das desigualdades acima;

a segunda será obtida de maneira inteiramente idêntica, considerando-se, apenas, a subdivisão m em lugar da n.

Já tínhamos visto que $\overline{F_n} - \underline{F_n} < \epsilon(b-a)$; também é verdade que $\overline{F_m} - \underline{F_m} < \epsilon(b-a)$. Das desigualdades deduzidas acima, para F_l, segue-se, portanto,

$$0 \leqq \overline{F_n} - \overline{F_l} < \epsilon(b-a) \text{ e } 0 \leqq \overline{F_m} - \overline{F_l} < \epsilon(b-a).$$

Assim, também, é certo que

$$|\overline{F_n} - \overline{F_m}| = |(\overline{F_n} - \overline{F_l}) - (\overline{F_m} - \overline{F_l})| < 2\epsilon(b-a).$$

Esta relação, em vista de ϵ poder ser escolhido tão pequeno quanto quisermos, mostra-nos, pelo critério de convergência de Cauchy (pág. 40), que a seqüência de números $\overline{F_n}$ converge, efetivamente. Ao mesmo tempo, o raciocínio nos leva imediatamente à constatação da independência do valor-limite relativamente à maneira pela qual foi feita a subdivisão.

Completa-se, assim, a demonstração da existência das integrais definidas das funções contínuas.

O método empregado permite novas deduções. Êle mostra que, em muitos casos, é possível efetuar-se a integração por processo-limite um pouco mais geral. Se, por exemplo, $f(x) = \phi(x)\psi(x)$ e o intervalo entre a e b fôr dividido em n partes pelos pontos de divisão x_ν, podemos empregar a soma mais geral

$$\Sigma\phi(\xi_\nu')\psi(\xi_\nu'')\Delta x_\nu,$$

em lugar da expressão $\Sigma f(\xi_\nu)\Delta x_\nu$, sendo ξ_ν' e ξ_ν'' dois pontos do intervalo de ordem ν, não necessàriamente coincidentes. A soma acima tenderá, também, para a integral

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \phi(x)\psi(x)\,dx$$

desde que n cresça, e uma vez que o comprimento do maior subintervalo tenda para zero.

Enunciados correspondentes têm lugar para tôdas as somas formadas de modo análogo; por exemplo, a soma

$$\sum_{\nu=1}^{n} \sqrt{[\phi(\xi_\nu')^2 + \psi(\xi_\nu'')^2]}\Delta x_\nu$$

tende para a integral

$$\int_a^b \sqrt{[\phi(x)^2 + \psi(x)]^3}\,dx.$$

A demonstração dêstes fatos é idêntica às anteriores, dispensando, por isso, maiores detalhes.

2. RELAÇÃO ENTRE OS TEOREMAS DO VALOR MÉDIO DO CÁLCULO DIFERENCIAL E DO CÁLCULO INTEGRAL.

Entre os teoremas do valor médio do cálculo diferencial e do cálculo integral existe uma relação simples, à qual se chega pelo teorema fundamental (pág. 111), e que apresentamos como exemplo instrutivo do emprêgo daquele teorema.

Tomemos o teorema do valor médio do cálculo integral, sob sua forma mais particularizada.

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(\xi).$$

Se fizermos $\int f(x)\,dx = F(x)$, de modo que $f(x) = F'(x)$, o teorema que acabamos de escrever assume a forma

$$F(b) - F(a) = (b-a)F'(\xi)$$

ou

$$\frac{F(b) - F(a)}{b-a} = F'(\xi).$$

Podemos, neste caso, como é claro. escolher para $F(x)$ qualquer função cuja primeira derivada $F'(x) = f(x)$ seja contínua, ficando assim demonstrado o teorema do valor médio do cálculo diferencial para tais funções.

Se considerarmos a forma mais geral do teorema do valor médio do cálculo integral,

$$\int_a^b f(x)p(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b p(x)\,dx,$$

onde $p(x)$ é uma função contínua e positiva no intervalo e $f(x)$ uma função arbitrária, contínua, seremos levados ao teorema correspondente, de forma mais geral, do valor médio do cálculo diferencial. Escreveremos

$$\int f(x)p(x)\,dx = F(x), \text{ isto é, } f(x)p(x) = F'(x),$$

e

$$\int p(x)\,dx = G(x), \text{ isto é, } p(x) = G'(x);$$

a fórmula do valor médio assume, então, a forma

$$F(b) - F(a) = [G(b) - G(a)]\, f(\xi),$$

ou, visto que $f(x) = \dfrac{F'(x)}{G'(x)}$,

$$\frac{F(b) - F(a)}{G(b) - G(a)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)},$$

onde $a \neq b$.

Esta fórmula, na qual ξ, mais uma vez, representa um número intermediário entre a e b, constitui o *teorema geral do valor médio do cálculo diferencial*. Para a sua verificação, é evidente que basta admitir que $F(x)$ e $G(x)$ são funções contínuas com derivadas de primeira ordem, também contínuas, e que, além disso, $G'(x)$ seja sempre positiva (ou sempre negativa). Em face destas considerações, o processo completo é reversível (podendo, pois, ser invertido).

Finalmente, observaremos que na presente discussão do teorema do valor médio do cálculo diferencial, fizemos hipóteses restritivas mais amplas do que as requeridas pelos próprios teoremas (§ 3, n.° 8, pág. 103 e, também, pág. 203).

Exemplo

1. Mostrar que, se $f(x)$ tiver derivada no intervalo $a \leqq x \leqq b$, a função pode ser representada pela diferença de duas funções monótonas.

Capítulo III

DERIVAÇÃO E INTEGRAÇÃO DAS FUNÇÕES ELEMENTARES

1. Regras simples para derivação e suas aplicações.

Acontece, usualmente, na análise superior, e nas suas aplicações, que os problemas de integração são mais importantes do que os referentes à derivação, mas esta última oferece menos dificuldades do que a integração. Como conseqüência, o método natural para o estudo do cálculo diferencial e integral consistirá em, primeiramente, aprender a derivar as classes mais extensas de funções e, depois, em virtude do teorema fundamental (cap. II, § 4, pág. 116), tornar os resultados obtidos aplicáveis à solução dos problemas de integração. Realizar êste programa, será a nossa tarefa nas seções seguintes. De certo modo, começaremos novamente, pois desenvolveremos as derivações e integrações mais importantes, sistemàticamente, sem apelar para os resultados obtidos no último capítulo. Nesta parte do estudo, certas regras para derivação, com as primeiras das quais já estamos familiarizados (pág. 96), serão da maior importância.

1. Regras para derivação.

Admitiremos que, no intervalo que estamos considerando, as funções $f(x)$ e $g(x)$ sejam deriváveis. As regras correspondentes enunciam-se, então, do modo seguinte:

1.ª regra. *Multiplicação por uma constante.*

Seja c uma constante e $\phi(x) = cf(x)$. Neste caso $\phi(x)$ é derivável, e

$$\phi'(x) = cf'(x).$$

Êste resultado deduz-se imediatamente da relação

$$\frac{\phi(x+h)-\phi(x)}{h} = c\,\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

se tomarmos os limites quando $h \to 0$.

2.ª regra. *Derivada de uma soma.*

$\phi(x)$ é derivável quando $\phi(x) = f(x) + g(x)$, e

$$\phi'(x) = f'(x) + g'(x);$$

isto é, os processos de derivação e de adição são permutáveis. O teorema se verifica, também, para uma soma de um número finito qualquer, (n), de parcelas

$$\phi(x) = \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(x),$$

para o qual obtemos

$$\phi'(x) = \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu'(x).$$

Deixaremos de lado a demonstração que, depois do cap. II, § 3 (pág. 88), ficou inteiramente clara.

3.ª regra. *Derivada de um produto.*

A função $\phi(x)$ será derivável quando $\phi(x) = f(x)g(x)$. Então,

$$\phi'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x).$$

A demonstração é deduzida da equação

$$\frac{\phi(x+h)-\phi(x)}{h} = \frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$

$$= \frac{f(x+h)g(x+h)-f(x+h)g(x)+f(x+h)g(x)-f(x)g(x)}{h}$$

$$= f(x+h)\,\frac{g(x+h)-g(x)}{h} + g(x)\,\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Pode-se efetivar a passagem ao limite $h \to 0$, diretamente, nesta última expressão, obtendo-se a fórmula enunciada.

A fórmula adquire aspecto mais elegante se dividirmos ambos os membros por $\phi(x) = f(x)g(x)$. Obteremos, então,

$$\frac{\phi'(x)}{\phi(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{g'(x)}{g(x)}.$$

(1) Devemos, naturalmente, admitir que $\phi(x)$ seja sempre diferente de zero.

Aplicando repetidamente a fórmula do produto, encontraremos, por indução, para a derivada de um produto de n fatôres, uma expressão contendo n têrmos, cada um dêles igual à derivada de um dos fatôres multiplicada por todos os outros fatôres do produto original. Podemos escrever:

$$\begin{aligned}\phi'(x) &= \frac{dx}{d}[f_1(x)f_2(x)\dots f_n(x)] \\ &= f_1'(x)f_2(x)\dots f_n(x) + f_1(x)f_2'(x)f_3(x)\dots f_n(x) \\ &\qquad + \dots + f_1(x)f_2(x)\dots f_n'(x) \\ &= \sum_{\nu=1}^{n} f'_\nu(x)\frac{\phi(x)}{f_\nu(x)},\end{aligned}$$

ou, dividindo [1] ambos os membros por $\phi(x) = f_1(x)f_2(x)\dots f_n(x)$

$$\frac{\phi'(x)}{\phi(x)} = \frac{f_1'(x)}{f_1(x)} + \frac{f_2'(x)}{f_2(x)} + \dots + \frac{f_n'(x)}{f_n(x)} = \sum_{\nu=1}^{n}\frac{f_\nu'(x)}{f_\nu(x)}.$$

4.ª regra. *Derivada de um quociente.*
Para o quociente

$$\phi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

verifica-se a seguinte regra: a função $\phi(x)$ é derivável em todos os pontos em que $g(x)$ não se anula, e

$$\phi'(x) = \frac{g(x)f'(x) - g'(x)f(x)}{[g(x)]^2}.$$

Se $\phi(x) \neq 0$, podemos escrever

$$\frac{\phi'(x)}{\phi(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{g'(x)}{g(x)}.$$

Se admitirmos que $\phi(x)$ é derivável, por hipótese, poderemos aplicar a regra do produto a $f(x) = \phi(x)g(x)$, e concluirmos que

$$f'(x) = \phi(x)g'(x) + g(x)\phi'(x).$$

Substituindo $\frac{f(x)}{g(x)}$ por $\phi(x)$ no segundo membro e resolvendo a equação em relação a $\phi'(x)$, obteremos a regra acima enunciada. A fim de

[1] Devemos, naturalmente, admitir que $\phi(x)$ sempre diferente de zero.

demonstrar a derivabilidade de $\phi(x)$, assim como a regra, escrevamos

$$\frac{\phi(x+h)-\phi(x)}{h}=\frac{\dfrac{f(x+h)}{g(x+h)}-\dfrac{f(x)}{g(x)}}{h}$$

$$=\frac{g(x)\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}-\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}f(x)}{g(x)g(x+h)}.$$

Se, agora, deixarmos h tender para 0, chegaremos ao resultado enunciado, visto que, por hipótese, os dois têrmos do segundo membro, resultantes da divisão têm limites definidos, isto é, $\frac{g(x)f'(x)}{[g(x)]^2}$ e $\frac{g'(x)f(x)}{[g(x)]^2}$. Isto demonstra, imediatamente, tanto a existência de limite do primeiro membro, como a fórmula de derivação.

2. Derivação de funções racionais.

De início, deduziremos novamente a fórmula de derivação

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

para n inteiro e positivo, baseando a demonstração na regra de derivação de um produto. Consideremos x^n como um produto de n fatôres, $x^n = x \ldots x$, obtendo, então

$$\frac{d}{dx}x^n = 1.x^{n-1} + 1.x^{n-1} + \ldots + 1.x^{n-1} = nx^{n-1}$$

A derivada de segunda ordem da função x^n será

$$\frac{d^2}{dx^2}x^n = n(n-1)x^{n-2},$$

se empregarmos a fórmula acima e a primeira regra de derivação.

Prosseguindo com o mesmo processo, obteremos

$$\frac{d^3}{dx^3}x^n = n(n-1)(n-2)x^{n-3}$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$\frac{d^n}{dx^n}x^n = 1.2\ldots n = n!$$

A última destas relações deixa ver claramente que a derivada de ordem $(n+1)$ de x^n se anula, em qualquer ponto.

Em virtude das duas primeiras regras, o conhecimento da derivação das potências permite, imediatamente, derivarmos qualquer polinômio

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n.$$

Teremos, simplesmente,

$$y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + na_nx^{n-1},$$

e, depois,

$$y'' = 2a_2 + 3.2a_3x + 4.3a_4x^2 + \dots + n(n-1)a_nx^{n-2},$$

e assim sucessivamente.

A derivação de qualquer função racional deduz-se, também, com o auxílio da regra do quociente. Em particular, estabeleceremos, novamente, a fórmula de derivação da função x^n, para $n = -m$, isto é, quando n fôr inteiro e negativo. A aplicação da regra do quociente, juntamente com o fato de a derivada de uma constante ser nula, dá-nos o resultado

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^m}\right) = -\frac{mx^{m-1}}{x^{2m}} = -\frac{m}{x^{m+1}}$$

ou, se fizermos $m = -n$,

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

que coincide, exatamente, com o resultado encontrado para os valores positivos de n e com outros resultados já deduzidos (pág. 95).

3. Derivação das funções trigonométricas.

Já deduzimos as fórmulas

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen} x = \cos x \quad \text{e} \quad \frac{d}{dx}\cos x = -\operatorname{sen} x,$$

para as funções trigonométricas $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ (pág. 96).

A regra do quociente permite, então, derivar as funções

$$y = \operatorname{tg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \quad \text{e} \quad y = \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}.$$

De acôrdo com a regra, a derivada da primeira destas funções é

$$y' = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x},$$

obtendo-se o resultado

$$\frac{d}{dx} \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x.$$

Da mesma forma, virá

$$\frac{d}{dx} \operatorname{cotg} x = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x = -(1 + \operatorname{cotg}^2 x).$$

2. Fórmulas correspondentes de integração

1. Regras gerais para a integração.

O teorema fundamental da pág. 116 e a definição de integral indefinida indicam a possibilidade de escrevermos, imediatamente, uma fórmula de integração correspondente a cada fómula de derivação. As regras de integração que seguem (das quais as duas primeiras já foram mencionadas na pág. 82), são inteiramente equivalentes às três primeiras regras de derivação.

Multiplicação por uma constante: Designando c uma constante, teremos

$$\int cf(x)\,dx = c \int f(x)\,dx.$$

Integração de uma soma: Verifica-se, em geral, que

$$\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx.$$

À terceira regra de derivação corresponde a regra para a *integração de um produto*, ou, como é vulgarmente denominada, a regra da *integração por partes*. A regra do produto, na integração, dá

$$\int [f(x)\,g(x)]'\,dx = \int f(x)\,g'(x)\,dx + \int g(x) f'(x)\,dx.$$

A integral indefinida do primeiro membro é, sem dúvida, $f(x)\,g(x)$ (exceto, evidentemente, uma constante aditiva), permitindo-nos escrever a regra da integração por partes do modo seguinte:

$$\int f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int g(x) f'(x)\,dx.$$

Esta última fórmula de integração, o oposto da regra para a derivação de um produto, foi apresentada aqui, ùnicamente, para completar o assunto; empregá-la-emos sòmente no próximo capítulo (pág. 218).

2. Integração das funções mais simples.

Deduziremos, a seguir, as fórmulas de integração equivalentes às fórmulas de derivação das funções especiais, que acabamos de estabelecer. À fórmula

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

corresponde a fórmula de integração

$$\int x^{n-1}\,dx = \frac{x^n}{n},\ n \neq 0.$$

Ela significa, apenas, que a derivada do segundo membro é igual à expressão sob o sinal de integral, do primeiro membro. Se substituirmos n por $n+1$, obteremos a fórmula integral

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}\,x^{n+1}, \quad n \neq -1.$$

Esta fórmula é válida para qualquer valor inteiro do expoente n (quando $n < 0$ ela se verifica sòmente se $x \neq 0$), com exceção de $n = -1$, caso em que o denominador $n+1$ se anula. Mais adiante (pág. 167), estudaremos, detalhadamente, êste caso especial.

O teorema fundamental do cálculo integral permite a utilização imediata das fórmulas de integração na determinação de áreas, isto é, no cálculo das integrais definidas. De acôrdo com a exposição da pág. 117, obteremos, desde logo,

$$\int_a^b x^n dx = \frac{1}{n+1}\,(b^{n+1} - a^{n+1}), \quad n \neq -1,$$

onde, se n fôr negativo, admitiremos que a e b têm o mesmo sinal, visto que, se não o fizermos, o integrando será descontínuo, no intervalo da integração.

Às fórmulas de diferenciação das funções sen x, cos x, tg x e cotg x, correspondem as seguintes de integração:

$$\int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x, \quad \int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x,$$
$$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \operatorname{tg} x, \quad \int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} \, dx = -\operatorname{cotg} x.$$

Destas fórmulas obtemos, pela regra fundamental do Cap. II, § 4 (pág. 117), o valor das integrais definidas entre quaisquer limites, com a única restrição que as duas últimas expressões, quando empregadas no intervalo de integração não devem conter pontos de descontinuidade no integrando. Por exemplo,

$$\int_a^b \cos x \, dx = \operatorname{sen} x \Big|_a^b = \operatorname{sen} b - \operatorname{sen} a.$$

Salientaremos, ainda que, com o auxílio das duas primeiras regras de integração, estamos em condições de integrar qualquer polinômio em x e, efetivamente, qualquer combinação linear, com coeficientes constantes arbitrários, das funções já estudadas. Finalmente, notaremos que as regras de integração e derivação devem, de acôrdo com o teorema fundamental, ser equivalentes. Assim, é possível demonstrar, primeiramente, as regras de integração que estabelecemos nesta seção e, depois, deduzir delas as de derivação da seção precedente. Será proveitoso para o leitor realizar esta sugestão.

Exemplos

1. Calcular o valor numérico de tôdas as derivadas de $x^5 - x^4$, para $x = 1$.

2. Qual será o valor numérico da décima primeira derivada de

$$317x^9 - 202x^7 + 76, \text{ sendo } x = 13\tfrac{1}{2}?$$

3. Diferenciar e estabelecer as fórmulas integrais correspondentes das seguintes expressões:

(a) $ax + b$.

(b) $25cx^7$.

(c) $a + 2bx + cx^2$.

(d) $\dfrac{ax + b}{cx + d}$.

(e) $\dfrac{ax^2 + 2bx + c}{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma}$.

(f) $\dfrac{1}{1 - x^2} - \dfrac{1}{1 + x^2}$.

(g) $\dfrac{(x^8 - \sqrt{8}\, x^4 + 4)(x^8 + \sqrt{8}\, x^4 + 4)}{x^{16} + 16}$.

4. Seja $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$.

(a) Calcular o polinômio $F(x)$, partindo da equação $F(x) - F'(x) = P(x)$.
(b)* Calcular $F(x)$, partindo de $c_0 F(x) + c_1 F'(x) + c_2 F''(x) = P(x)$.

5. Derivar as funções seguintes, estabelecendo as correspondentes fórmulas de integração:

(a) $2 \operatorname{sen} x \cos x$. (b) $\dfrac{1}{1 + \operatorname{tg} x}$ (c) $x \operatorname{tg} x$. (d) $\dfrac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x - \cos x}$. (e) $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$.

Lembrando que $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$, $\text{co-sec}\, x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$, determinar as derivadas dos exemplos 6-9.

6. $\dfrac{d^2}{dx^2} \sec x$.

7. $\dfrac{d^3}{dx^3} \sec x \operatorname{tg} x$.

8. $\dfrac{d^3}{dx^3} \text{co-sec}\, x$.

9. $\dfrac{d^4}{dx^4} \operatorname{tg} x \operatorname{sen} x$.

10. Determinar o limite quando $n \to \infty$ do valor absoluto da derivada de ordem n de $1/x$, no ponto $x = 2$.

Calcular:

11. $\displaystyle\int (ax + b)\, dx$.

12. $\displaystyle\int (ax^2 + 2bx + c)\, dx$.

13. $\displaystyle\int (9x^8 + 7x^6 + 5x^4 + 3x^2 + 1)\, dx$.

14. $\displaystyle\int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4}\right) dx$.

15. $\displaystyle\int \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) dx$.

16. $\displaystyle\int \left(\mathrm{a} \cos x + \frac{b}{\operatorname{sen}^2 x}\right) dx$.

17. $\displaystyle\int \left(3x + 7 \operatorname{sen} x + \frac{5}{x^3} - \frac{9}{\cos^2 x}\right) dx$.

18. $\displaystyle\int \sec x \operatorname{tg} x\, dx$.

3. Funções inversas e suas derivadas

1. Fórmula geral para derivação.

Vimos anteriormente (págs. 21 e 67), que uma função contínua $y = f(x)$ possui inversa contínua em todo o intervalo em que fôr monótona. Mais exatamente:

Se $\mathrm{a} \leqq \mathrm{x} \leqq \mathrm{b}$ *fôr um intervalo no qual a função contínua* $\mathrm{y} = \mathrm{f(x)}$ *fôr monótona, e se* $\mathrm{f(a)} = \alpha$ *e* $\mathrm{f(b)} = \beta$, x *será uma função de* y *que, no intervalo entre* α *e* β *é unívoca, contínua e monótona.*

Como já expusemos na pág. 92, o conceito de derivada proporciona um meio simples de reconhecer se uma função é monótona e, portanto, se possui inversa. Uma função derivável é, certamente, sempre monótona crescente, se $f'(x)$ fôr maior do que zero, em todo o

intervalo correspondente, e, semelhantemente, será monótona decrescente, se $f'(x)$ fôr menor do que zero, em todo o intervalo considerado.

Demonstraremos, agora, o seguinte teorema:

Se a função $y = f(x)$ *fôr derivável no intervalo* $a < x < b$, *e se* $f'(x) > 0$, *em todo o intervalo, a função inversa* $x = \phi(y)$ *também possuirá derivada em todos os pontos do seu intervalo de definição e, entre a derivada da função dada* $y = f(x)$ *e a da função inversa* $x = \phi(y)$ *existirá, para valores correspondentes de* x *e de* y, *a relação* $f'(x) \cdot \phi'(x) = 1$, *que também poderá ser escrita*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}.$$

Notamos, nesta fórmula, novamente, a flexibilidade da notação de Leibnitz. Ela se escreve justamente *como se* os símbolos dx e dy fôssem quantidades sôbre as quais pudéssemos operar como o fazemos com os números reais. A demonstração é bastante simples, se considerarmos a derivada como o limite do quociente das diferenças

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_1 \to x} \frac{y_1 - y}{x_1 - x},$$

onde x e $y = f(x)$, e x_1 e $y_1 = f(x_1)$ representam, respectivamente, pares de valores correspondentes. Por hipótese, o primeiro dêstes valores-limites não é igual a zero. Levando-se em conta a continuidade de $y = f(x)$ e e $x = \phi(y)$ a equação $\lim \Delta x = 0$ é equivalente a $\lim \Delta y = 0$ e, conseqüentemente, as relações $y_1 \to y$ e $x_1 \to x$ são, também, equivalentes. Em face disto, o valor-limite

$$\lim_{x_1 \to x} \frac{x_1 - x}{y_1 - y} = \lim_{y_1 \to y} \frac{x_1 - x}{y_1 - y}$$

existe e é igual a $\frac{1}{f'(x)}$. Por outro lado, o valor limite é, por definição, a derivada $\phi'(y)$, ficando, assim, demonstrada a nossa fórmula.

Esta fórmula tem interpretação geométrica muito simples, a qual é representada, com clareza, na fig. 1. A tangente à curva $y = f(x)$ ou $x = \varphi(y)$ forma o

ângulo α com o eixo dos x positivos e o ângulo β com o eixo dos y positivos. Da definição geométrica da derivada, segue-se

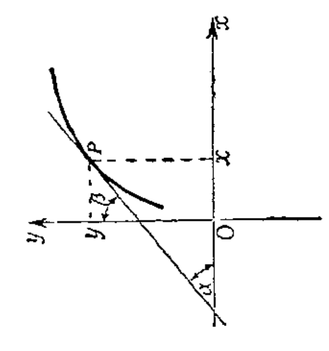


Fig. 1.—Derivação da função inversa

$$f'(x) = \operatorname{tg}\alpha, \quad \varphi'(y) = \operatorname{tg}\beta.$$

Como a soma dos ângulos α e β perfaz $\pi/2$, $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta = 1$ e esta relação corresponde exatamente à fórmula de derivação encontrada.

Admitimos, até aqui, expressamente, que ou $f'(x) > 0$ ou $f'(x) < 0$, isto é, que $f'(x)$ jamais é nula. O que aconteceria, porém, se $f'(x) = 0$? Se $f'(x) = 0$ em todo o intervalo, a função será constante e, conseqüentemente, não terá inversa, visto que o mesmo valor de y deve corresponder a todos os valores de x no intervalo. Se $f'(x) = 0$ verificar-se sòmente para certos pontos isolados, e se, por questão de simplicidade, admitirmos que a função é contínua, devemos observar, então, se ela muda ou não de sinal ao passar por êstes pontos. No primeiro caso, o ponto separa a parte monótona crescente da função, da parte monótona decrescente. Nas proximidades de tal ponto não haverá função inversa unívoca, de qualquer espécie. No segundo caso, a anulação da derivada não perturbará o caráter monótono da função $y = f(x)$, de modo que existe uma inversa unívoca. Tal função inversa, porém, não será derivável no ponto correspondente, pois, sua derivada nesta altura

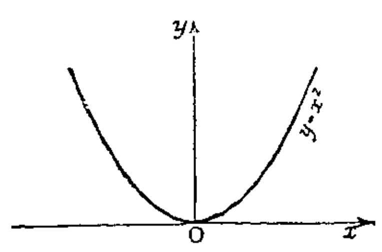


Fig. 2.—Parábola

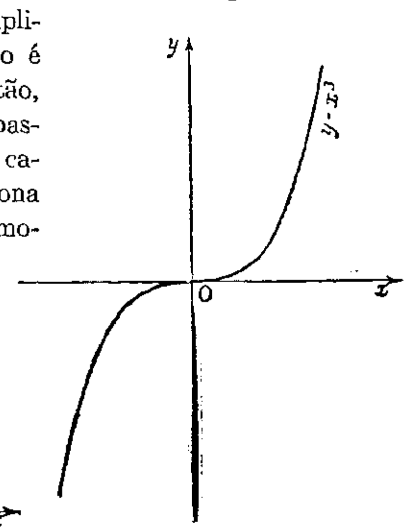


Fig. 3.—Parábola cúbica

é infinita. As funções $y = x^2$ e $y = x^3$, no ponto $x = 0$, oferecem exemplos dos dois tipos citados. As figuras 2 e 3 ilustram o comportamento destas duas funções quando passam através da origem. As figuras mostram, ainda, que $y = x^3$ tem inversa unívoca, ao passo que $y = x^2$ não a possui.

2. Função inversa da potência.

O exemplo mais simples de funções inversas é proporcionado pelas funções $y = x^n$ para valores positivos e inteiros de n e, como admitimos inicialmente, valores positivos de x. Nestas condições, y' é sempre positiva, de modo que poderemos formar uma única função inversa positiva para todos os valores positivos de y

$$x = \sqrt[n]{y} = y^{1/n}.$$

A derivada desta função inversa é obtida imediatamente, de acôrdo com a regra geral acima estabelecida, mediante as seguintes transformações:

$$\frac{d(y^{1/n})}{dy} = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\dfrac{dy}{dx}} = \frac{1}{nx^{n-1}} = \frac{1}{n}\frac{1}{y^{(n-1)/n}} = \frac{1}{n}y^{1/n-1},$$

e, se designarmos a variável independente por x, poderemos, por fim, escrever

$$\frac{d\sqrt[n]{x}}{dx} = \frac{d}{dx}(x^{1/n}) = \frac{1}{n}x^{1/n-1},$$

que coincide com o resultado obtido, diretamente, na pág. 94.

O ponto $x = 0$ requer consideração especial. Se x se aproximar de 0 através de valores positivos, $d(x^{1/n})\,dx$. onde $n > 1$, crescerá, naturalmente, além de qualquer limite. Devido a isto é que a derivada da potência n, $f(x) = x^n$, para $n > 1$, se anula na origem. Geomètricamente, quer dizer que as curvas $y = x^{1/n}$, $n > 1$, tocam o eixo dos x na origem (fig. 17, pág. 34).

Para completarmos êste estudo, notaremos que, para valores ímpares de n, a hipótese de que $x > 0$ pode ser omitida e a função $y = x^n$ pode ser considerada para todos os valores de x, sem perder o seu caráter monótono, nem a unidade da função inversa. A fórmula de derivação $\dfrac{d}{dy}(y^{1/n}) = \dfrac{1}{n}y^{1/n-1}$ tem lugar, também, para os valores negativos de y; para $x = 0$, $n > 1$, teremos $\dfrac{d(x^n)}{dx} = 0$, o que corresponde a uma derivada infinita (dx/dy) da função inversa no ponto $y = 0$.

3. Funções trigonométricas inversas.

A fim de formar as inversas das funções trigonométricas, consideraremos mais uma vez os gráficos de sen x, cos x, tg x e cotg x. Vemos, imediatamente, nas figuras 14 e 15, pág. 25, que, para estudarmos uma função inversa unívoca destas funções, é preciso escolher um intervalo definido, porque as linhas $y = c$, paralelas ao eixo dos x, cortam as curvas, em um número infinito de pontos, se as atingirem.

A derivada $y' = \cos x$ da curva $y = \operatorname{sen} x$ será, por exemplo, positiva, no intervalo $-\pi/2 < x < \pi/2$. Neste intervalo o seno, conse-

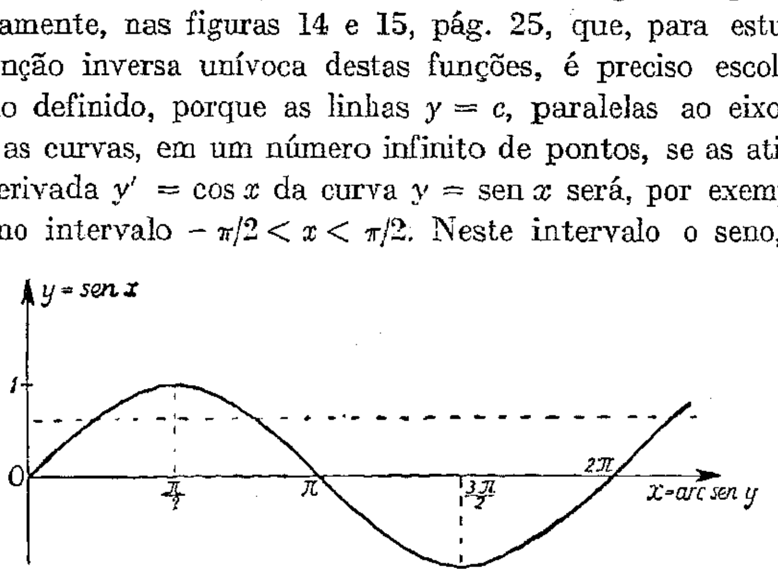


Fig. 4.—Função inversa do seno

qüentemente, tem uma função inversa. Escreveremos a função inversa do seno sob a forma (1)

$$x = \operatorname{arc\,sen} y$$

(que se lê arco-seno y e significa o ângulo cujo seno vale y). Esta função percorre o espaço de $-\pi/2$ a $+\pi/2$, monòtonamente, quando y varia no intervalo -1 a $+1$. Se quisermos salientar que estamos tratando da função inversa do seno para êste mesmo intervalo, nos referiremos ao *valor principal* do arco seno. Se formarmos a função inversa para outro intervalo qualquer, no qual sen x fôr monótona, por exemplo, o intervalo $+\pi/2 < x < 3\pi/2$, obteremos "outro ramo" do arco-seno. Sem a fixação do intervalo no qual os valores da função devem estar situados, o arco-seno é *uma função plurívoca* e, efetivamente, tem uma infinidade de valores.

Em geral, exprime-se a expressão plurívoca de arco-seno y dizendo-se que a um valor qualquer y, do seno, corresponderão, não sòmente o ângulo x, mas também o ângulo $2k\pi + x$, assim como $(2k + 1)\pi - x$, onde k representa um inteiro qualquer.

(1) Os livros inglêses empregam, também, a notação $x = \operatorname{sen}^{-1} y$.

A derivação da função $x = \text{arc sen}\, y$ é obtida com o auxílio da regra geral, mediante as seguintes rápidas transformações:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y'} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\pm\sqrt{1 - \text{sen}^2 x}} = \frac{1}{\pm\sqrt{1 - y^2}},$$

onde a raiz quadrada deve ser tomada com o sinal positivo, se nos limitarmos ao primeiro intervalo mencionado [1].

Se a variável independente fôr, afinal, novamente mudada de y para x, a fórmula de derivação da função $\text{arc sen}\, x$ será obtida da seguinte maneira:

$$\frac{d}{dx}\,\text{arc sen}\, x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

admitindo-se que o arco-seno esteja compreendido entre $-\pi/2$ e $+\pi/2$, e que a raiz quadrada tenha sido tomada com o sinal positivo.

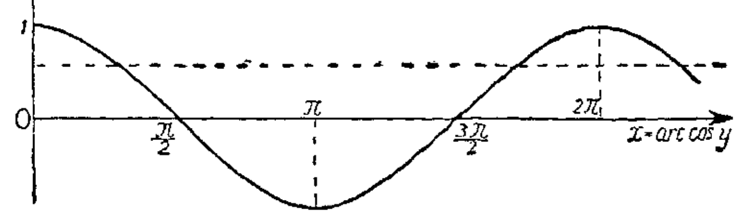


Fig. 5.—Função inversa do co-seno

Para a função inversa de $y = \cos x$, designada por $\text{arc cos}\, x$, obteremos a fórmula de derivação

$$\frac{d}{dx}\,\text{arc cos}\, x = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

de modo inteiramente análogo. Neste caso, devemos atribuir o sinal positivo à raiz sempre que o valor de $\text{arc sen}\, x$ esteja compreendido entre 0 e π (e não, como no caso do $\text{arc sen}\, x$, entre $-\pi/2$ e $+\pi/2$); (fig. 5).

Resta-nos dizer alguma coisa sôbre os pontos extremos $x = -1$ e $x = +1$. As derivadas, nas vizinhanças dêstes pontos, tornam-se infi-

(1) Se, em vez dêste, tivéssemos escolhido o intervalo $\pi/2 < x < 3\pi/2$, correspondente à substituição de $x + \pi$ por x, deveríamos empregar a raiz negativa, visto $\cos x$ ser negativo neste intervalo.

nitas, correspondendo às tangentes verticais que as curvas inversas dos senos e dos co-senos devem ter nesses pontos.

Podemos lidar com as funções inversas da tangente e da cotangente, da mesma maneira. A função $y = \operatorname{tg} x$, cuja derivada $1/\cos^2 x$, para $x \neq \pi/2 + k\pi$, é sempre positiva, tem inversa unívoca, no intervalo $-\pi/2 < x < \pi/2$. Chamaremos tal função inversa $x = \operatorname{arc\,tg} y$ ou (trocando as letra x e y), $y = \operatorname{arc\,tg} x$. Vemos, na figura 6, que a pluralidade original da função inversa, isto é, — a pluralidade que se verificaria se o intervalo da função não fôsse fixado — é traduzida pelo fato de que, para cada x poderíamos escolher, em lugar de y, qualquer um dos valores $y + k\pi$ (onde k é inteiro). A função $x = \operatorname{arc\,cotg} y$, ou (trocando as letras x e y), $y = \operatorname{arc\,cotg} x$ inversa de $y = \operatorname{cotg} x$, ficará unìvocamente determinada, se exigirmos que seu valor permaneça no intervalo entre 0 e π. As expressões multívocas de arc cotg x são, por outro lado, as mesmas que para arc tg x.

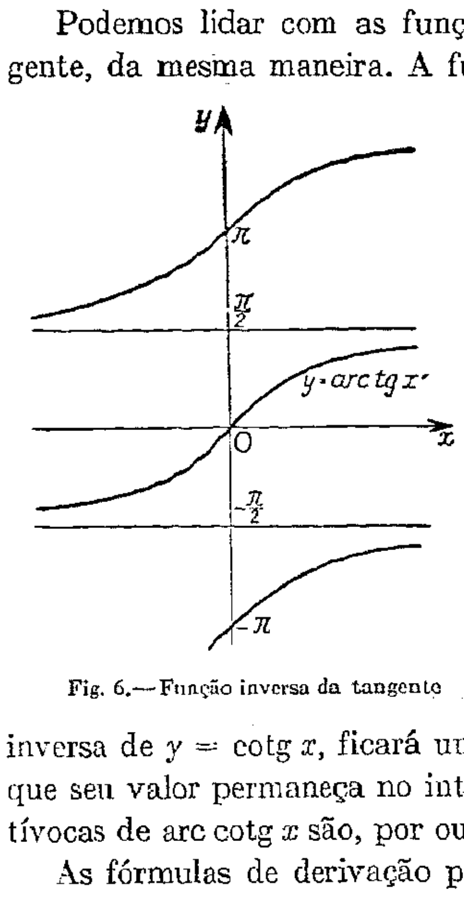


Fig. 6.—Função inversa da tangente

As fórmulas de derivação podem ser deduzidas como segue:

$$x = \operatorname{arc\,tg} y, \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\dfrac{dy}{dx}} = \cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1 + y^2};$$

$$x = \operatorname{arc\,cotg} y, \quad \frac{dx}{dy} = -\operatorname{sen}^2 x = -\frac{1}{1 + \operatorname{cotg}^2 x} = -\frac{1}{1 + y^2};$$

ou, finalmente, se designarmos a variável independente por x,

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arc\,tg} x = \frac{1}{1 + x^2},$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arc\,cotg} x = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

4. Fórmulas de integração correspondentes.

As expressões que acabamos de estabelecer serão escritas da maneira seguinte, na linguagem das integrais indefinidas:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{arc\,sen} x, \quad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\operatorname{arc\,cos} x,$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arc\,tg} x, \quad \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = -\operatorname{arc\,cotg} x.$$

Entre as duas fórmulas da esquerda e as da direita, que exprimem cada integral indefinida sob duas formas que parecem inteiramente diferentes, não há contradição alguma. Lembraremos que, no caso das integrais indefinidas, fica à nossa disposição uma constante aditiva arbitrária. Se escolhermos tais constantes de modo que divirjam de $\pi/2$ e recordarmos que $\pi/2 - \operatorname{arc\,cos} x = \operatorname{arc\,sen} x$ e, do mesmo modo, $\pi/2 - \operatorname{arc\,cotg} x = \operatorname{arc\,tg} x$, a discrepância aparente entre as fórmulas é imediatamente eliminada. A indefinibilidade é devida, simplesmente, ao fato de que a integral indefinida não é uma função *única*, determinada, mas sim uma família inteira de funções que diferem umas das outras pela adição de constantes arbitrárias. As equações das integrais indefinidas não estabelecem *o seu valor*, mas sim *um dos seus valores*. Como já observamos, seria mais correto exprimir êste fato, incluindo sempre a constante indeterminada. Não escreveríamos, então,

$$\int f(x)\,dx = F(x),$$

mas, sim,

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c.$$

Por conveniência, entretanto, evitamos usualmente esta forma mais pormenorizada. O leitor, porém, terá o cuidado de não perder de vista a ambigüidade resultante do emprêgo da fórmula abreviada (ver também pág. 116).

Das fórmulas para a integração indefinida deduzimos, imediatamente, as fórmulas seguintes para a integração definida, como já o fizemos na pág. 117. Em particular,

$$\int_a^b \frac{1+x^2}{dx} = \operatorname{arc\,tg} x \Big|_a^b = \operatorname{arc\,tg} b - \operatorname{arc\,tg} a.$$

Se fizermos $a = 0$, $b = 1$ e observarmos que $\operatorname{tg} 0 = 0$ e que $\operatorname{tg} \pi/4 = 1$, obteremos a fórmula notável

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx.$$

O número π, calculado originàriamente como função do círculo, é,

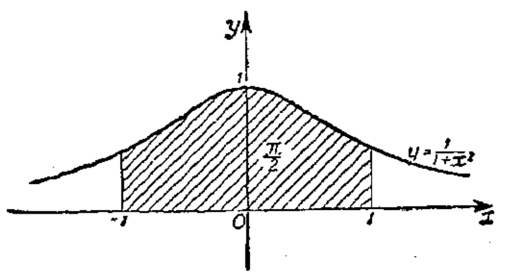


Fig. 7.—Representação de $\pi/2$ como área

por esta fórmula, deduzido de uma relação muito simples com a função racional $\frac{1}{1+x^2}$, sendo representado pela área definida indicada na fig. 7.

EXEMPLOS

1. Se $y = \frac{x^2}{4}$, $y = 16$ corresponde a $x = 8$. Calcular $\frac{dy}{dx}$ para $x = 8$; resolver $y = \frac{x^2}{4}$ em relação a x e calcular $\frac{dx}{dy}$ para $y = 16$, provando que os valores destas derivadas estão de acôrdo com a regra das funções inversas.

2. Demonstrar que (*a*) $\operatorname{arc\,sen} \alpha + \operatorname{arc\,sen} \beta = \operatorname{arc\,sen} (\alpha\sqrt{1-\beta^2} + \beta\sqrt{1-\alpha^2})$;

(*b*) $\operatorname{arc\,sen} \alpha + \operatorname{arc\,sen} \beta = \operatorname{arc\,cos}(\sqrt{1-\alpha^2}\sqrt{1-\beta^2} - \alpha\beta)$;

(*c*) $\operatorname{arc\,tg} \alpha + \operatorname{arc\,tg} \beta = \operatorname{arc\,tg} \frac{\alpha+\beta}{1-\alpha\beta}$.

Derivar as expressões dos exemplos 3-10, escrevendo as expressões das integrais correspondentes:

3. $\frac{\sqrt{x}}{1+x}$.

4. $\sqrt{x}\cos^2 x$.

5. $\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$

6. $\frac{\sqrt{x}}{1-\operatorname{tg} x}$.

7. $\operatorname{arc\,sen} x . \operatorname{arc\,cos} x$.

8. $\frac{1+\operatorname{arc\,tg} x}{1-\operatorname{arc\,tg} x}$.

9. $\frac{\operatorname{arc\,sen} x}{\operatorname{arc\,tg} x}$.

10. $5 \operatorname{arc\,cotg} x + \frac{1}{\operatorname{arc\,cos} x}$

11. Desenhar $y = \dfrac{1}{1 + x^2}$ num papel quadriculado e numa escala grande. Determinar $\int_0^1 \dfrac{1}{1 + x^2}\, dx$, contando os quadrados, e estabelecer um valor aproximado para $\pi/4$ (exemplo 1, pág. 121).

4. Derivação de uma função de função

1. Regra da cadeia.

As regras estabelecidas até aqui habilitam-nos a derivar qualquer função passível de ser representada por exprersões racionais, cujos têrmos sejam funções com derivadas conhecidas. Podemos, entretanto, dar outro passo importante para a frente, aprendendo a derivar qualquer função formada pela *composição* de funções com derivadas conhecidas. Seja $\phi(x)$ uma função qualquer, derivável no intervalo $a \leqq x \leqq b$, admitindo todos os valores do intervalo $\alpha \leqq \phi \leqq \beta$. Imaginemos, agora uma segunda função derivável $g(x)$ da variável independente ϕ, na qual ϕ percorre o intervalo de α até β. Podemos considerar a função $g(\phi) = g[\phi(x)] = f(x)$ como função de x no intervalo $a \leqq x \leqq b$. A função $f(x) = g[\phi(x)]$ será, então, denominada uma função de x, *composta* das funções g e ϕ, ou uma *função de função*.

Se, por exemplo, $\varphi(x) = 1 - x^2$ e $g(\varphi) = \sqrt{\varphi}$, a função composta será, simplesmente, $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Neste caso, fizemos o intervalo $a \leqq x \leqq b$, igual a $0 \leqq x \leqq 1$, ficando, assim, a função composta $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ definida no intervalo $0 \leqq x \leqq 1$, visto os valores de $\varphi(x)$ preencherem exatamente o intervalo $0 \leqq \varphi \leqq 1$.

Outro exemplo de composição de funções é $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$, onde o processo de composição pode ser indicado pelas equações

$$\varphi(x) = 1 + x^2, \quad g(\varphi) = \sqrt{\varphi};$$

o valor da função $\varphi(x)$ percorrendo todos os valores positivos $\geqq 1$, de modo que $f(x) = g[\varphi(x)]$ pode ser satisfeita por todos os valores de x.

Compondo funções desta maneira, devemos, naturalmente, ter cuidado em nos cingirmos aos intervalos $a \leqq x \leqq b$, para os quais a função composta é definida. Por exemplo, a função composta $\sqrt{1 - x^2}$ é definida sòmente para valores de x compreendidos na região $-1 \leqq x \leqq 1$, não o sendo para o intervalo $1 < x \leqq 2$, pois, quando x se encontrar neste último intervalo, os valores de $\varphi(x)$ consistirão de números negativos, para os quais a função não é definida.

Do mesmo modo que podemos compor as funções uma a uma, podemos a

devemos considerar funções em que o processo de composição é realizado mais de uma vez. Uma função dêste tipo é

$$\sqrt{1 + \operatorname{arc\,tg} x^2}$$

que pode ser obtida pelo seguinte processo de composição

$$\varphi(x) = x^2, \quad \psi(\varphi) = 1 + \operatorname{arc\,tg} \varphi, \quad g(\psi) = \sqrt{\psi(\varphi)} = f(x).$$

A derivação das funções compostas é baseada no teorema seguinte, denominado *regra da cadeia do cálculo diferencial:*

A função $f(x) = g[\phi(x)]$ *é derivável, sendo sua derivada fornecida pela equação*

$$f'(x) = g'(\phi) \, . \, \phi'(x),$$

ou, segundo a notação de Leibnitz,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\phi} \cdot \frac{d\phi}{dx}.$$

Em termos verbais: *a derivada de uma função composta é igual ao produto das derivadas das funções componentes.*

A demonstração do teorema é muito fácil, se recordarmos o significado de derivadas Para qualquer $\Delta x \neq 0$, arbitrário, e para os valores correspondentes de $\Delta\phi$ e Δg, existem duas quantidades ϵ e η, que tendem para 0 com Δx, tais que

$$\Delta g = g'(\phi)\Delta\phi + \epsilon\Delta\phi \text{ e } \Delta\phi = \phi'(x)\Delta x + \eta\Delta x;$$

é preciso, apenas, calcular η na segunda equação, onde $\Delta\phi \neq 0$, e tirar o valor de ϵ da primeira. Se $\Delta\phi = 0$, faremos $\epsilon = 0$. Substituindo $\Delta\phi$ na primeira equação, pelo seu valor tirado da segunda, teremos

$$\Delta g = g'(\phi)\phi'(x)\Delta x + [\eta g'(\phi) + \epsilon\phi'(x) + \epsilon\eta]\Delta x,$$

ou

$$\frac{\Delta g}{\Delta x} = g'(\phi)\phi'(x) + [\eta g'(\phi) + \epsilon\phi'(x) + \epsilon\eta].$$

Nesta equação, entretanto, podemos fazer Δx tender para 0, obtendo imediatamente o resultado enunciado, visto que a chave da direita tende para zero com Δx. Conseqüentemente, o primeiro membro da equação tem $f'(x)$ para limite, limite êste igual ao primeiro têrmo do segundo membro, como havíamos afirmado.(1)

(1) Poderíamos, também, fazer a demonstração, efetuando a passagem ao limite $\Delta x \to 0$ e, portanto, $\Delta\phi \to 0$, na equação $\frac{\Delta g}{\Delta x} = \frac{\Delta g}{\Delta\phi} \cdot \frac{\Delta\phi}{\Delta x}$. O método apresentado no texto deve, contudo, ser preferido, uma vez que evita a necessidade de considerar-se, de maneira especial, o caso em que $\phi'(x) = 0$.

Pela aplicação sucessiva da fórmula encontrada podemos, imediatamente, estendê-la às funções compostas de mais de duas funções. Se, por exemplo,

$$y = g(u), \quad u = \phi(v), \quad v = \psi(x),$$

podemos considerar $y = f(x)$ como sendo função de x; sua derivada será obtida pela regra

$$\frac{dy}{dx} = y' = g'(u)\phi'(v)\psi'(x) = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}.$$

O caso de funções compostas de um número arbitrário de funções é, essencialmente, análogo, motivo por que deixamos a demonstração a cargo do leitor.

2. Exemplos.

Como exemplo muito simples, apresentaremos a função $y = x^\alpha$, onde $\alpha = p/q$, sendo q um número inteiro e positivo, e p inteiro, positivo ou negativo, de modo que α será um número racional, positivo ou negativo. Teremos, pela regra da cadeia, sendo x positivo,

$$y = \varphi^p, \quad \varphi = x^{1/q}$$

que nos dá a fórmula

$$y' = p\varphi^{p-1}. \frac{1}{q} x^{(1-p)/q} = \frac{p}{q} x^{p/q-1},$$

a qual, para valores racionais arbitrários de α, proporciona a fórmula de derivação

$$\frac{d}{dx} x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1},$$

plenamente de acôrdo com o resultado obtido por outro método, no Cap. II, § 3 (pág. 94).

Como segundo exemplo, vejamos

$$y = \sqrt{1-x^2} \text{ ou } y = \sqrt{\varphi},$$

onde $\varphi = 1 - x^2$ e $-1 < x < 1$. A regra da cadeia permite escrever,

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{\varphi}}. (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Outros exemplos são dados pelos seguintes cálculos abreviados:

1. $y = \text{arc sen} \sqrt{1-x^2}$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)}}. \frac{d\sqrt{(1-x^2)}}{dx}$$

$$= \frac{1}{|x|}. \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = \mp \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

2. $$y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}} \cdot \frac{d\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)}{dx}$$

$$= \frac{\sqrt{1-x}}{2\sqrt{1+x}} \cdot \frac{2}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1+x)^{1/2}(1-x)^{3/2}}.$$

A regra da cadeia para a derivação pode, também, ser expressa por meio de uma fórmula de integração, em concordância com o fato de que cada fórmula de derivação tem uma de integração correspondente e equivalente. Não obstante, como não necessitamos desta fórmula imediatamente, deixaremos o seu estudo detalhado para mais tarde (cap. IV, § 2, pág. 207).

3. Observações complementares sôbre a integração e derivação de x^α, quando α é irracional.

Em face da definição elementar da potência x^α pela equação

$$x^\alpha = \lim x^{r_n},$$

em que os números r_n formam uma seqüência de números racionais com o limite α, poderíamos ser tentados a derivar x^α, efetuando a passagem direta ao limite, na fórmula de derivação

$$\frac{d}{dx} x^{r_n} = r_n x^{r_n - 1}.$$

Não podemos fazê-lo, entretanto, a menos que a expressão $x^{r_n} \to x^\alpha$ permita a relação $\frac{d}{dx} x^{r_n} \to \frac{d}{dx} x^\alpha$. Há, contudo, uma objeção muito séria contra tal passagem ao limite. Na vizinhança de uma curva, vizinhança esta arbitràriamente pequena, podemos traçar outras curvas cujas direções, em pontos escolhidos à vontade, difiram da direção da curva original de uma quantidade qualquer; por exemplo, podemo-nos aproximar de uma linha reta por uma onda, situada arbitràriamente perto dela, cujo ângulo, formado pela onda e pela linha, atinja até 45° (fig. 8). Em outras palavras, o exemplo acima ilustra que *não podemos concluir, imediatamente, que duas derivadas sejam aproximadamente iguais, em tôda a parte, desde que as*

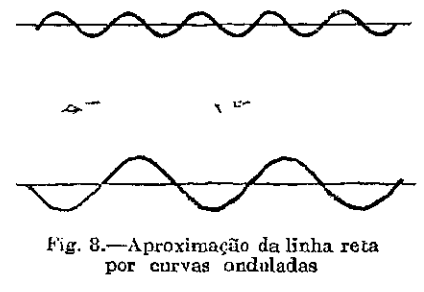


Fig. 8.—Aproximação da linha reta por curvas onduladas

suas funções difiram muito pouco. Tal objeção impede de efetuarmos a passagem ao limite, aparentemente óbvia, na falta de justificação posterior.

A êste respeito, entretanto, a integral comporta-se de modo diferente da derivada. Já observamos, na pág. 128, que se duas funções diferirem entre si menos do que ϵ, no intervalo entre a e b, suas integrais diferirão, por sua vez, de quantidade menor do que $\epsilon(b-a)$. Empregamos êste resultado para estabelecermos a validade da fórmula de derivação

$$\frac{1}{\alpha+1}\frac{d}{dx}x^{\alpha+1} = x^{\alpha},$$

ou, substituindo $\alpha + 1$ por α,

$$\frac{d}{dx}x^{\alpha} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Por êste processo indireto, portanto, verifica-se a validade da relação $\frac{d}{dx}x^{r_n} \to \frac{d}{dx}x^{\alpha}$, acima citada.

A discussão que acabamos de efetuar é um exemplo característico das relações existentes entre o cálculo diferencial e o cálculo integral. Contudo, em princípio, é preferível substituir a definição elementar de x^{α} por uma outra (como o faremos na pág. 173 e seguintes), essencialmente mais simples e que possa conduzir, mais uma vez, ao mesmo resultado, porém, desta feita, diretamente.

Exemplos

Derivar as seguintes funções:

1. $(x+1)^3$.
2. $(3x+5)^2$.
3. $(x^9 - 3x^6 - x^3)^8$.
4. $\dfrac{1}{1+x}$.
5. $\dfrac{1}{1-x^2}$.
6. $(ax+b)^n$ (n inteiro).
7. $\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}$.
8. $\sqrt{\dfrac{ax^2+bx+c}{lx^2+mx+n}}$
9. $[\sqrt{(1-x)^{2/3}}]^5$.
10. $\operatorname{sen}^2 x$.
11. $\operatorname{sen}(x^2)$.
12. $\sqrt{1+\operatorname{sen}^2 x}$.
13. $x^2 \operatorname{sen}\dfrac{1}{x^2}$
14. $\operatorname{tg}\dfrac{1+x}{1-x}$.
15. $\operatorname{sen}(x^2+3x+2)$.
16. $\operatorname{arc\,sen}(3+x^3)$.
17. $\operatorname{arc\,sen}(\cos x)$.
18. $\operatorname{sen}(\operatorname{arc\,cos}\sqrt{1-x^2})$.
19. $x^{\sqrt{2}} - x^{-\sqrt{2}}$.
20. $[\operatorname{sen}(x+7)]^{\sqrt[3]{5}}$.
21. $[\operatorname{arc\,sen}(a\cos x+b)]^{\alpha}$.

5. MÁXIMOS E MÍNIMOS

Tendo adquirido certo domínio sôbre a derivação das funções elementares e das funções compostas com elas, estamos em condições de fazer uma grande variedade de aplicações. Inicialmente, estudaremos a mais simples destas aplicações, a teoria dos máximos e mínimos de uma função, juntamente com a discussão geométrica das derivadas de segunda ordem e, na próxima seção, retomaremos o fio da teoria geral.

1. Convexidade ou concavidade das curvas.

Por definição, a derivada $\frac{d}{dx}f(x)$ da função $f(x)$ dá a inclinação da curva $y = f(x)$. Esta inclinação pode, por sua vez, ser representada

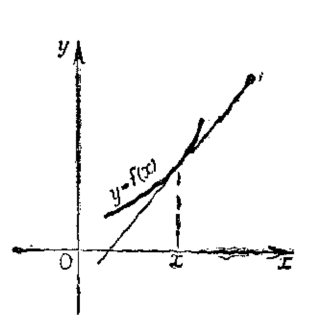


Fig. 9a.—$f''(x) > 0$

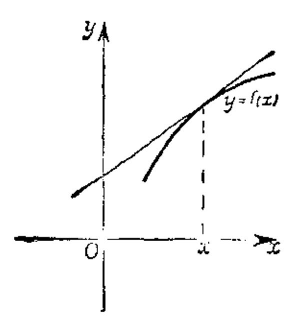


Fig. 9b.—$f''(x) < 0$

pela curva $y' = \frac{d}{dx}f(x) = f'(x)$, ou seja, a *curva derivada* da curva original. A inclinação da curva derivada é fornecida por $\frac{d}{dx}f'(x) = $ $= \frac{d^2}{dx^2}f(x) = f''(x)$, derivada de segunda ordem de $f(x)$, e assim por diante. Se a derivada de segunda ordem, $f''(x)$, fôr positiva no ponto x — de modo que, devido à continuidade (que supomos existir), seja positiva nas vizinhanças de x — então a derivada $f'(x)$ crescerá, ao atravessar êste ponto, na direção dos valores crescentes de x. Portanto, a curva $y = f(x)$ volta o seu lado convexo para a direção dos valores decrescentes de y. O contrário se verificará se $f''(x)$ fôr negativa. No

primeiro caso, contudo, na vizinhança do ponto dado, a curva está situada acima da tangente e, no segundo, abaixo dela (figs. 9*a* e 9*b*).

Sòmente o caso dos pontos em que $f''(x) = 0$, exige um estudo especial. A derivada de segunda ordem, quando passa por um ponto

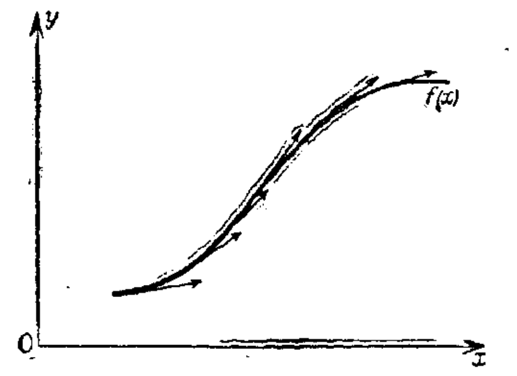


Fig. 10.—Ponto de inflexão

de tal natureza, muda, geralmente, de sinal. Êste ponto será, então, de transição entre os dois casos acima mencionados, isto é, a tangente estará, de um lado, acima da curva e, do outro, abaixo da mesma, cortando-a, em vez de tocá-la (fig. 10). O ponto é chamado *um ponto de inflexão da curva* e a tangente correspondente é denominada tangente flexional.

O exemplo mais simples é dado pela função $y = x^3$, parábola cúbica, para a qual o próprio eixo dos x é uma tangente flexional no ponto $x = 0$. Outro exemplo é a função $y = \text{sen}\, x$, para a qual $f'(x) = d(\text{sen}\, x/dx = \cos x$ e $f''(x) = d^2(\text{sen}\, x)/d^2 = -\text{sen}\, x$. Como conseqüência, $f'(0) = 1$ e $f''(0) = 0$; o sinal de $f''(x)$, mudando em $x = 0$, indica que a senóide tem uma tangente flexional na origem, inclinada de um ângulo de 45° sôbre o eixo dos x.

Notemos, finalmente, que podem existir pontos para os quais $f''(x) = 0$, sem, contudo, a tangente cortar a curva, mantendo-se sempre do mesmo lado dela. Por exemplo, a curva $y = x^4$ fica inteiramente acima do eixo dos x, a despeito da derivada de segunda ordem $f''(x)$ se anular para $x = 0$.

2. Máximos e mínimos.

Diz-se que uma função contínua ou uma curva $y = f(x)$ tem um *máximo* (*mínimo*) num ponto ξ se pelo menos, nas proximidades, vizinhança ou entôrno de $x = \xi$, os valores de $f(x)$, para $x \neq \xi$, forem todos menores do que $f(\xi)$ (ou maiores do que $f(\xi)$). Por *proximidades*, *vizinhanças* ou *entôrno* de um ponto significamos o intervalo $\alpha \leqq x \leqq \beta$,

contendo o ponto referido (ξ) no seu interior. Geomètricamente falando, tais máximos e mínimos são, respectivamente, as cristas das ondas côncavas e convexas da curva. Um olhar à fig. 11 mostra-nos que o valor do máximo no ponto P_5 pode, muito bem, ser menor do que um mínimo em outro ponto, por exemplo, P_2; então, o conceito de máximos e mínimos será sempre, de certo modo, relativo, devido à restrição de proximidade do ponto em que êles ocorrem.

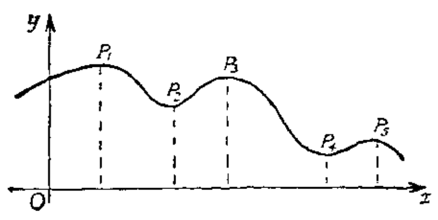


Fig. 11.—Máximos e mínimos

Se desejarmos fixar idéias sôbre os valores, máximo ou mínimo, absolutos da função, devemos empregar processos especiais para podermos escolher tais valores dentre os máximos ou os mínimos.

No momento, porém, o problema consiste em aprendermos a determinar os máximos e mínimos (relativos) ou, empregando uma palavra que abrange tanto máximos como mínimos, *os valores extremos* [1] *relativos* de uma dada função ou curva. Êste problema, que ocorre em inúmeras aplicações e é muito freqüente na geometria, mecânica e física, constituiu um dos primeiros incentivos para o desenvolvimento do cálculo integral e diferencial durante o século dezessete.

Vemos, imediatamente, que, admitindo-se que a função seja derivável, a tangente à curva, em um ponto extremo ξ, deve ser horizontal. Surge, portanto, a equação

$$f'(\xi) = 0$$

como condição *necessária* para a existência de um valor extremo. Resolvendo a equação em relação à incógnita ξ, obteremos os pontos nos quais *ocorrerá, possìvelmente*, um valor extremo. A condição, pois, não é, de modo algum, *suficiente* para um valor extremo. Podem existir diversos pontos para os quais a derivada se anula, isto é, nos quais a tangente é horizontal, embora a curva não apresente máximo nem mínimo nesta posição. Isto se verifica se a curva tiver uma tangente flexional horizontal que a corte no ponto dado, como ocorre no exemplo acima, da função $y = x^3$, no ponto $x = 0$.

(1) Também é empregada a palavra *vértice*. Por outro lado, os têrmos *valor estacionário* e *ponto estacionário*, incluem tanto inflexões, como máximos e mínimos.

Contudo, se determinarmos um ponto para o qual $f'(x)$ se anula, podemos concluir, imediatamente, que a função apresenta um máximo neste ponto se $f''(\xi) < 0$, ou um máximo se $f''(\xi) > 0$, visto que, no primeiro caso, a curva, nas proximidades do ponto, está situada inteiramente abaixo da tangente, e no segundo, completamente acima.

Em lugar de fundamentar a dedução da condição necessária sôbre a intuição, poderíamos ter desenvolvido uma demonstração fácil, baseada em métodos puramente analíticos (de maneira análoga como fizemos para o teorema de Rolle, pág, 105). Se a função $f(x)$ tiver um máximo no ponto ξ, a expressão $f(\xi) - f(\xi + h)$ deve ser positiva para todos os valores de h, diferentes de 0 e suficientemente pequenos. O quociente $\dfrac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h}$ será, pois, positivo ou negativo, conforme h fôr negativo ou positivo. Assim, se h tender para zero, percorrendo valores negativos, o limite do quociente não poderá ser negativo, ao passo que se h se aproximar de zero, assumindo valores positivos, o limite não será positivo. Mas, desde que admitamos a existência da derivada, êstes limites devem ser iguais entre si, e efetivamente, a $f'(\xi)$ que sòmente poderá ter o valor zero. Devemos ter, portanto, $f'(\xi) = 0$. Demonstração semelhente tem lugar para o caso do mínimo.

Podemos também formular e provar, analìticamente, condições *necessárias e suficientes* para a ocorrência de um *máximo, ou de um mínimo*, sem recorrermos à segunda derivada. Suporemos, para isto, que $f(x)$ é contínua e que a sua derivada $f'(x)$ também é contínua, anulando-se sòmente em um número finito de pontos.

A função $f(x)$ *terá um máximo ou um mínimo no ponto* $x = \xi$ *quando e sòmente no caso da derivada* $f'(x)$ *mudar de sinal ao passar por êsse ponto. Particularizando, o ponto considerado será um mínimo se a derivada fôr negativa à esquerda de* ξ *e positiva à direita, ao passo que o caso contrário indicará um máximo.*

Demonstraremos a afirmação, empregando o teorema do valor médio. Em primeiro lugar, observaremos que existem intervalos $\xi_1 < x < \xi$ e $\xi < x < \xi_2$ (estendendo-se aos pontos mais próximos nos quais $f'(x) = 0$), à esquerda e à direita de ξ, em que $f'(x)$ tem um só sinal, em cada intervalo. Se os sinais de $f'(x)$ fôssem diferentes nestes dois intervalos, $f(\xi + h) - hf'(\xi + \theta h)$ teria o mesmo sinal para todos os valores de h, numèricamente pequenos, positivos ou negativos,

de sorte que $f(\xi)$ seria um valor extremo. Se $f'(x)$ tiver o mesmo sinal em ambos os intervalos, $hf'(\xi + \theta h)$ mudará de sinal com h, de modo que $f(\xi + h)$ será maior do que $f(\xi)$ de um lado e menor no outro, não sendo, portanto, um valor extremo. O teorema fica, assim, demonstrado.

Ao mesmo tempo, verificamos que $f(\xi)$ é o maior ou o menor valor da função em cada intervalo que contém o ponto ξ, e que a única mudança de sinal de $f'(x)$ ocorre no próprio ponto ξ.

O teorema do valor médio, sôbre o qual baseamos esta demonstração, pode ser empregado mesmo no caso em que $f(x)$ não seja derivável num dos pontos extremos do intervalo ao qual êle é aplicado, contanto que $f(x)$ seja derivável em todos os outros pontos do mesmo intervalo. Por exemplo, a demonstração acima exposta é verificada, mesmo que $f'(x)$ não exista, para $x = \xi$. Tal fato possibilita-nos atingir o seguinte resultado mais geral: se $f(x)$ fôr contínua num intervalo que contenha o ponto ξ e tiver derivada $f'(x)$ em todos os pontos, com exceção, talvez, do próprio ponto ξ, derivada esta que se anula, no máximo, num número finito de pontos, terá, então, um valor extremo no ponto $x = \xi$ se e sòmente quando ξ separar dois intervalos nos quais $f'(x)$ tiver sinais diferentes. Por exemplo, a função $y = |x|$ tem um mínimo em $x = 0$, visto que $y' = 0$ para $x > 0$ e $y' < 0$ para $x < 0$ (fig. 9, pág. 97). A função $y = \sqrt[3]{x^2}$, do mesmo modo, terá um mínimo no ponto $x = 0$, embora a sua derivada $\frac{2}{3}x^{-1/3}$ seja infinita nesse ponto (fig. 12, pág. 99).

Faremos, ainda, a seguinte observação sôbre a teoria dos máximos e mínimos: a determinação dos máximos e mínimos não é, necessàriamente, equivalente à determinação do maior e menor valores da função num intervalo fechado. No caso das funções monótonas, êsses valores maior e menor serão determinados nos extremos do intervalo, não sendo, portanto, máximos e mínimos no sentido estudado, visto que êste último conceito exige uma *vizinhança completa* do lugar em que estão. Seja, por exemplo, a função $f(x) = x$ que, no intervalo $0 \leqq x \leqq 1$ admite o seu maior valor no ponto $x = 1$ e o menor quando $x = 0$; enunciado semelhante pode ser estabelecido para qualquer função monótona. A função $y = \operatorname{arc\,tg} x$, cuja derivada é $1/(1 + x^2)$, é monótona para $-\infty < x < \infty$, e, neste intervalo aberto, não possui máximo nem mínimo, nem valores maiores ou menores do que os outros.

Se, depois de determinarmos os zeros de $f'(x)$ quisermos ter certeza de que foram estabelecidos os pontos nos quais a função adquire seus valores maior e menor, podemos, muitas vêzes, utilizar o critério seguinte:

O maior ou menor valor de uma função f(x), *num intervalo, será atingido no ponto* ξ *no qual* f'(x) *se anula, se* $f'' > 0$ *ou* $f''(x) < 0$, *respectivamente, através dêsse intervalo.*

Se ξ e $\xi + h$ pertencerem, ambos, ao intervalo,

$$f'(\xi + h) = f'(\xi + h) - f'(\xi) = hf''(\xi + \theta h),$$

pelo teorema do valor médio. Portanto, no ponto $x = \xi + h$ a derivada $f'(x)$ terá o mesmo sinal de h, ou sinal oposto, conforme seja $f''(x) > 0$ ou $f''(x) < 0$; o enunciado decorre, então, da observação feita após o teorema da pág. 162.

3. Exemplos de máximos e mínimos.

Ex. 1. Entre todos os retângulos de mesma área, dada, determinar o que tem o menor perímetro.

Seja a^2 a área dos retângulos e x o comprimento de um dos seus lados (neste caso, x percorre o intervalo aberto $0 < x < \infty$); o comprimento do outro lado será a^2/x, e o semiperímetro será dado por

$$f(x) = x + \frac{a^2}{x}.$$

Temos $$f'(x) = 1 - \frac{a^2}{x^2}, \qquad f''(x) = \frac{2a^2}{x^3}.$$

A equação $f'(\xi) = 0$ admite uma única raiz positiva $\xi = a$. Para êste valor, $f''(x)$ é positiva (como o será para qualquer valor positivo de x); ela, portanto, fornece o menor valor procurado e obtemos como resultado muito plausível, que entre todos os retângulos de mesma área, o quadrado é o que apresenta o menor perímetro.

Ex. 2. Entre todos os triângulos de mesma base e mesma área, determinar o que possui menor perímetro.

Para resolver êste problema, façamos o eixo dos x coincidir com a base dada AB, tomando o ponto médio de AB como origem. Sendo C o vértice do triângulo, h sua altura (que é fixada), e (x, h) as coordenadas do vértice, a soma dos lados AC e BC do triângulo, cujo valor procuramos, será

$$f(x) = \sqrt{(x+a)^2 + h^2} + \sqrt{(x-a)^2 + h^2}$$

onde $2a$ é o comprimento da base. Desta fórmula obtemos

$$f'(x) = \frac{x + a}{\sqrt{(x+a)^2 + h^2}} + \frac{x - a}{\sqrt{(x-a)^2 + h^2}}.$$

$$f''(x) = \frac{-(x+a)^2}{\sqrt{[(x+a)^2+h^2]^3}} + \frac{1}{\sqrt{(x+a)^2+h^2}} + \frac{-(x-a)^2}{\sqrt{[(x-a)^2+h^2]^3}}$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+h^2}}$$
$$= \frac{h^2}{\sqrt{[(x+a)^2+h^2]^3}} + \frac{h^2}{\sqrt{[(x-a)^2+h^2]^3}}.$$

Vemos, imediatamente, (1) que $f'(0)$ se anula, (2) que f'' é sempre positiva; logo, em $x = 0$ há um mínimo. Visto $f''(x) > 0$, a derivada de primeira ordem $f'(x$ cresce sempre, não podendo ser igual a zero em nenhum outro ponto, de modo que $x = 0$ fornece, realmente, o menor valor de $f(x)$. Êste valor mínimo é, portanto, dado pelo triângulo isósceles.

Semelhantemente, determinaríamos que, de todos os triângulos de mesmo perímetro e mesma base, o isósceles é o que apresenta maior área.

Ex. 3. Achar um ponto, sôbre uma reta dada, cuja soma de suas distâncias a dois pontos fixos seja mínima.

Seja dada a linha reta e os dois pontos A e B, situados num mesmo lado da linha. Desejamos determinar um ponto P da reta, tal que a distância $PA + PB$ tenha o menor valor possível.

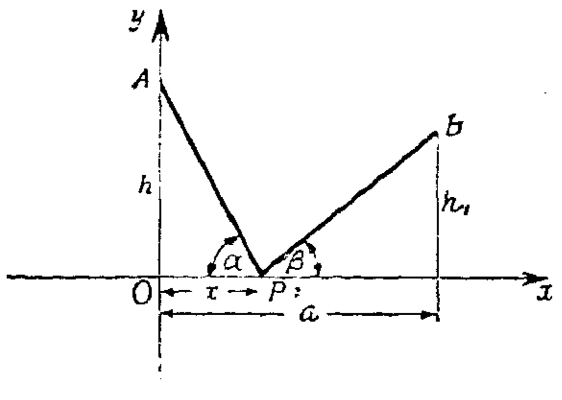


Fig. 12.—Lei da reflexão

Faremos o eixo dos x coincidir com a linha dada e empregaremos a notação da fig. 12.

A distância procurada será

$$f(x) = \sqrt{x^2+h^2} + \sqrt{(x-a)^2+h_1^2},$$

donde obteremos

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}} + \frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2+h_1^2}},$$
$$f''(x) = \frac{-x^2}{\sqrt{(x^2+h_2)^3}} + \frac{1}{\sqrt{x^2+h^2}} + \frac{-(x-a)^2}{\sqrt{[(x-a)^2+h_1^2]^3}}$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+h_1^2}}$$
$$= \frac{h^2}{\sqrt{(x^2+h^2)^3}} + \frac{h_1^2}{\sqrt{[(x-a)^2+h_1^2]^3}}.$$

A equação $f'(x) = 0$ dá, por conseguinte,

$$\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2+h^2}} = \frac{a-\xi}{\sqrt{(\xi-a)^2+h_1^2}},$$

ou

$$\cos\alpha = \cos\beta,$$

o que significa que as duas linhas PA e PB devem fazer ângulos iguais com a reta dada. O sinal positivo de $f''(x)$ mostra que, na realidade, temos um mínimo.

A solução dêste problema está intimamente ligada à lei da reflexão da óptica. Pelo importante princípio da óptica, conhecido como *princípio do tempo mínimo*, de Fermat, a trajetória de um raio luminoso é determinada pela propriedade de que o tempo gasto pela luz para ir do ponto A ao B, sob condições conhecidas, deve ser o menor possível. Se o raio luminoso satisfizer à condição de passar por um ponto de uma reta dada (digamos, um espelho), vemos que o tempo mínimo será o fornecido pelo raio para o qual o "ângulo de incidência" fôr igual ao "ângulo de reflexão".

Ex. 4. Lei da refração.— Sejam dados os dois pontos A e B, situados em lados opostos do eixo dos x. Que trajetória de A para B corresponde ao menor tempo possível, se a velocidade em um dos lados do eixo dos x fôr c_1 e no outro c_2?

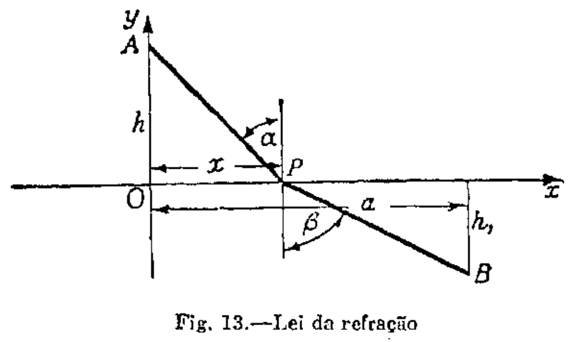


Fig. 13.—Lei da refração

É claro que a menor trajetória será constituída de dois segmentos retos que se encontram no ponto P, sôbre o eixo dos x. Empregando-se a notação da fig. 13, obteremos as duas expressões $\sqrt{h^2+x^2}$ e $\sqrt{h_1^2+(a-x)^2}$, para os comprimentos PA e PB, respectivamente, encontrando-se o tempo de percurso dividindo-se os comprimentos dos dois segmentos pelas velocidades correspondentes e tomando-se os resultados. Teremos, então, o tempo empregado

$$f(x) = \frac{1}{c_1}\sqrt{h^2+x^2} + \frac{1}{c_2}\sqrt{h_1^2+(a-x)^2}.$$

Por derivação, obtemos

$$f'(x) = \frac{1}{c_1}\frac{x}{\sqrt{h^2+x^2}} - \frac{1}{c_2}\frac{a-x}{\sqrt{h_1^2+(a-x)^2}},$$

$$f''(x) = \frac{1}{c_1}\frac{h^2}{\sqrt{(h^2+x^2)^3}} + \frac{1}{c_2}\frac{h_1^2}{\sqrt{[h_1^2+(a-x)^2]^3}}.$$

Conforme vemos imediatamente na figura, a equação $f'(x) = 0$, isto é,

$$\frac{1}{c_1}\frac{x}{\sqrt{h^2+x^2}} = \frac{1}{c_2}\frac{a-x}{\sqrt{h_1^2+(a-x)^2}},$$

é equivalente à condição $\frac{1}{c_1}\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{c_2}\operatorname{sen}\beta$, ou

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c_1}{c_2}.$$

Deixaremos ao leitor demonstrar que existe sòmente *um ponto* que satisfaz esta condição e que tal ponto conduz, efetivamente, ao menor valor procurado. A significação física do nosso exemplo estende-se, ainda, ao princípio óptico do tempo mínimo. Um raio luminoso percorre o espaço existente entre dois pontos no tempo mais curto. Chamando-se c_1 e c_2 as velocidades da luz em cada região limítrofe de dois meios ópticos, o caminho percorrido pela luz será dado pela fórmula deduzida que, conseqüentemente, representa a *lei da refração* de Snell.

Exemplos

1. Determinar os máximos, mínimos, e pontos de inflexão das seguintes funções. Construir os gráficos correspondentes, determinando as regiões de crescimento e de decréscimo, assim como a concavidade:

(*a*) $x^3 - 6x + 2$. (*b*) $x^{2/3}(1-x)$. (*c*) $2x/(1+x^2)$.
(*d*) $x^2/(x^4+1)$. (*e*) $\operatorname{sen}^2 x$.

2. Determinar os máximos, mínimos e pontos de inflexão de $x^3 + 3px + q$. Discutir a natureza das raízes de $x^3 + 3px + q = 0$.

3. Qual é o ponto da hipérbole $y^2 - \frac{1}{2}x^2 = 1$, mais próximo de $x = 0$, $y = 3$?

4. Seja P um ponto fixo de coordenadas x_0, y_0, situado no primeiro quadrante de um sistema de coordenadas retangulares. Estabelecer a equação de uma linha que passe por P, de modo que o segmento compreendido entre os dois eixos seja mínimo.

5. Uma estátua com 3,60 m de altura está colocada sôbre um pedestal com 4,00 m de alto. A que distância deve estar um homem com 1,80 m de altura, para que a estátua abranja o maior ângulo possível?

6. Duas fontes luminosas, de intensidade a e b, estão separadas pela distância d. Que ponto da linha, que une os dois focos, recebe menor quantidade de luz? (Admitiremos que o iluminamento é proporcional à intensidade e inversamente proporcional ao quadrado da distância.)

7. Determinar, entre todos os retângulos da mesma área:

(*a*) o que apresenta menor perímetro;
(*b*) aquêle que tem a menor diagonal.

8. Inscrever o retângulo de área máxima na elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

9. Sejam a e b os dois lados de um triângulo. Determinar o terceiro, de forma que a área seja máxima.

10. A linha g, distando h do centro, divide o círculo de raio r em dois segmentos. Inscrever, no menor dêstes segmentos, o retângulo de área máxima.

11. Determinar o cilindro de área mínima, entre todos os cilindros circulares de um volume dado.

12. Dados a parábola $y^2 = 2px$, $p > 0$, e o ponto $P(x = \xi,\ y = \eta)$, interior à mesma ($\eta^2 < 2p\xi$), determinar o caminho mais curto (formado por dois segmentos retos) entre o ponto P e o ponto Q da parábola, e dêste ao foco $F(x = \frac{1}{2}p,\ y = 0)$. Demonstrar que o ângulo FQP é dividido em duas partes iguais pela normal à parábola, e que QP é paralela ao eixo da curva. (Princípio dos espelhos parabólicos.)

13.* Os prismas desviam os raios luminosos que incidem perpendicularmente às suas arestas. Qual deve ser a posição relativa do prisma e do raio de luz, para que o desvio seja mínimo?

14. Dados n números fixos, $a_1, \ldots, a_n$, determinar x de tal modo que $\sum_{i=1}^{n} (a_i - x)^2$ seja mínimo.

15. Provar que, se $p > 1$ e $x > 0$, $x^p - 1 \geqq p(x-1)$.

16. Verificar a desigualdade $1 \geqq \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} \geqq \dfrac{2}{\pi}$, $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$.

17. Demonstrar que (*a*) $\operatorname{tg} x \geqq x$, $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$.

(*b*) $\cos x \geqq 1 - \dfrac{x^2}{2}$.

18.* Dados $a_1 > 0$, $a_2 > 0, \ldots, a_n > 0$, determinar o mínimo de

$$\frac{\dfrac{a_1 + \ldots + a_{n-1} + x}{n}}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_{n-1} x}}$$

para $x = 0$. Empregar o resultado para demonstrar, por indução matemática, que

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leqq \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}.$$

6. Funções exponencial e logarítmica

As relações sistemáticas entre o cálculo diferencial e o cálculo integral conduzem-nos, naturalmente, a um método conveniente para estabelecermos a interdependência existente entre as funções exponencial e logarítmica. Embora já tenhamos estudado estas funções (págs. 25 e 69), vamos defini-las de novo, desenvolvendo sua teoria sem recorrermos à definição anterior, nem aos resultados já obtidos. Iniciaremos com a função logarítmica, tratando, então, a função exponencial como sua inversa.

1. Definição de logaritmo. Fórmula de derivação.

Já vimos que a integração indefinida da potência x^n para valores inteiros do expoente n, conduz-nos, em geral, a uma potência de x.

A única exceção é a função $1/x$, que não representa derivada de qualquer das funções de que tratamos até agora. É natural supor que a integral indefinida de $1/x$ forneça uma nova espécie de funções. Assim, desenvolvendo esta idéia, passaremos a investigar a função

$$y = \int_1^x \frac{d\xi}{\xi} = f(x)$$

para $x > 0$. Chamá-la-emos *logaritmo de* x, ou, mais precisamente, *logaritmo natural de* x, e escreveremos $y = \log x$ ou $y = \text{nat} \log x$. Designaremos a variável de integração por ξ para evitar confusão com o limite superior x.

A escolha do número 1 como limite inferior é inteiramente arbitrária, porém, em breve, demonstraremos a sua conveniência.

No desenvolvimento dêstes raciocínios veremos que o logaritmo que acabamos de definir é o mesmo que já tivemos estabelecido (pág. 70) por "método elementar". Mas, como frisamos novamente, os resultados a que chegaremos são completamente independentes dos já obtidos anteriormente.

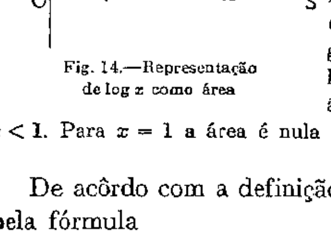


Fig. 14.—Representação de $\log x$ como área

Geomètricamente, a função logarítmica é representada pela área tracejada na fig. 14, a qual é limitada, em cima, pela hipérbole retangular $y = 1/\xi$, embaixo, pelo eixo dos ξ, e, lateralmente, pelas linhas $\xi = 1$ e $\xi = x$. Esta área será positiva, se $x > 1$, e negativa quando $x < 1$. Para $x = 1$ a área é nula e, portanto, $\log 1 = 0$.

De acôrdo com a definição supra, a derivada do logaritmo é dada pela fórmula

$$\frac{d(\log x)}{dx} = \frac{1}{x}.$$

Neste caso, chamaremos expressamente a atenção que supomos sempre o argumento x positivo. Em face da fórmula deduzida, o logaritmo de 0 ou de qualquer valor negativo não pode ser formulado, pois o integrando $1/\xi$ torna-se infinito, desde que $\xi = 0$. Por outro lado, se tomarmos qualquer quantidade negativa, digamos -1, para

limite inferior, poderemos formar a integral com um limite superior x, isto é, podemos considerar a expressão

$$\int_{-1}^{x} \frac{d\xi}{\xi} \qquad (x < 0).$$

Devido ao significado da integral como limite de uma soma ou como uma área, vemos que, para $x < 0$,

$$\int_{-1}^{x} \frac{d\xi}{\xi} = \int_{1}^{-x} \frac{d\xi}{\xi} = \int_{1}^{|x|} \frac{d\xi}{\xi} = \log |x|.$$

De conformidade com o que ficou estabelecido, podemos, em geral, escrever a fórmula da integração indefinida, do modo seguinte

$$\int \frac{dx}{x} = \log |x|.$$

O logaritmo pode, naturalmente, ser representado por uma curva. Esta linha, a curva logarítmica, está representada na fig. 15 e já vimos como construí-la (págs. 119 e seg.).

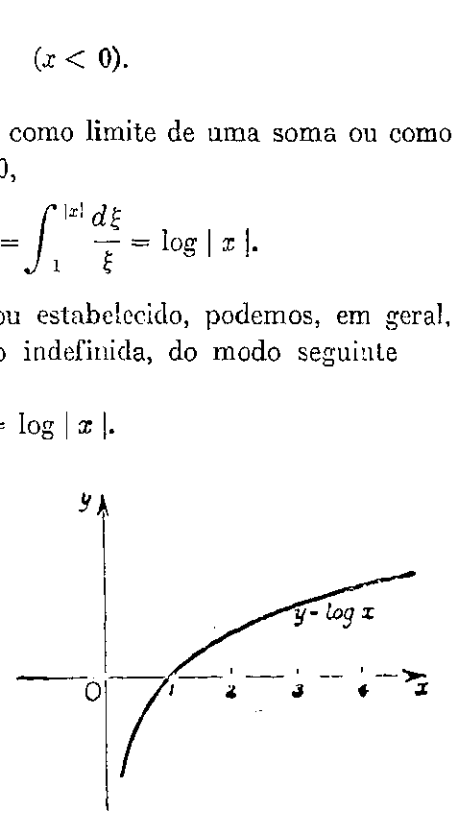


Fig. 15

2. Teorema da adição.

O logaritmo, definido como o fizemos acima, obedece à seguinte lei fundamental:

$$\log(ab) = \log a + \log b.$$

A demonstração dêste *teorema da adição* decorre diretamente da fórmula da derivação. Se escrevermos $z = \log(ax)$ e aplicarmos a regra da cadeia, obteremos

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{ax} \cdot a = \frac{1}{x}.$$

Mas
$$\frac{d}{dx} \log x = \frac{1}{x};$$

visto as funções z e $\log x$ terem a mesma derivada, poderão diferir sòmente por uma constante, de sorte que $z = \log x + c$, ou

$$\log ax = \log x + c.$$

Isto sendo verdadeiro para todos os valores positivos de x, faremos, primeiramente, $x = 1$ para determinarmos c; como $\log 1 = 0$, temos

$$\log a = c.$$

Substituindo êste valor por c, virá

$$\log ax = \log x + \log a,$$

donde, para $x = b$,

$$\log ab = \log a + \log b,$$

como queríamos provar.

A equação

$$\log(a_1 a_2 \ldots a_n) = \log a_1 + \log a_2 + \ldots + \log a_n$$

é deduzida do teorema da adição dos logaritmos, para os números positivos quaisquer $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Particularmente, se todos os números $a_1, a_2, \ldots, a_n$, forem iguais ao mesmo número a, obteremos

$$\log a_n = n \log a.$$

Semelhantemente, segue-se que

$$\log a + \log \frac{1}{a} = \log 1 = 0,$$

de modo que $$\log a = -\log \frac{1}{a}.$$

Se, além disso, fizermos $\sqrt[n]{a} = \alpha$, virá $\log a = n \log \alpha$, ou

$$\log \sqrt[n]{a} = \log a^{1/n} = \frac{1}{n} \log a.$$

Daí vemos que, empregando repetidamente o teorema da adição, quando m fôr inteiro e positivo,

$$\frac{m}{n} \log a = \log \sqrt[n]{a^m} = \log a^{m/n}.$$

A equação $$\log a^r = r \log a$$

fica, assim, verificada para qualquer valor positivo racional de x, sendo, também, verdadeira, como é claro, para $r = 0$. Para os valores racionais negativos de r a equação ainda é válida porque, então,

$$\log a^r = \log \frac{1}{a^{-r}} = -\log a^{-r} = r \log a.$$

3. Caráter monótono e valores do logaritmo.

O valor do logaritmo cresce, naturalmente, à medida que x cresce. decrescendo quando x diminui; o logaritmo é, pois, uma função monótona.

Em vista da derivada $1/x$ tornar-se cada vez menor à medida que x cresce, a função aumenta de valor, sempre mais lentamente, ao passo que x vai crescendo. Não obstante, desde que x cresça além de qualquer limite, a função $\log x$ não tenderá para um limite positivo, mas se torna infinita, isto é, para qualquer número positivo A, por maior que seja, haverá sempre valores de x para os quais $\log x > A$. Isto se deduz, simplesmente, do teorema da adição. Em vista de $\log 2^n = n \log 2$ e $\log 2$ ser um número positivo, fazendo-se $x = 2^n$ e tomando-se n suficientemente grande, obteremos $\log x$ tão grande quanto desejarmos.

Como $\log(1/2^n) = -\log 2$, vemos que, à medida que x tende para zero, através de valores positivos, $\log x$ é negativo e cresce, numèricamente, além de qualquer limite.

A função $\log x$ é monótona e verifica-se para qualquer valor entre $-\infty$ e $+\infty$, à medida que a variável independente x vai assumindo todos os valores da seqüência dos números.

4. Função inversa da logarítmica (função exponencial).

Em vista de $y = \log x \; (x > 0)$ ser uma função monótona de x que admite qualquer valor real, a sua função inversa, que designaremos inicialmente por $x = E(y)$, deve ser uma função monótona unívoca, definida para todos os valores reais de y. A inversa é, também, derivável, porque $\log x$ é, por sua vez, derivável. Permutaremos a notação das variáveis dependentes e independente e passaremos ao estudo detalhado da função $E(x)$. Inicialmente, a mesma deve ser, evidentemente, positiva para qualquer valor de x. Em seguida, devemos ter

$$E(0) = 1;$$

porque esta equação equivale ao enunciado: $\log 1 = 0$.

Do teorema da adição para os logaritmos deduz-se, imediatamente, o *teorema da multiplicação*

$$E(\alpha)E(\beta) = E(\alpha + \beta).$$

Para prová-lo, basta notar que as equações

$$E(\alpha) = a, \quad E(\beta) = b, \quad E(\alpha + \beta) = c$$

são equivalentes a

$$\alpha = \log a, \quad \beta = \log b, \quad \alpha + \beta = \log c.$$

O teorema da adição permite escrever $\alpha + \beta = \log ab$, portanto, deve ser verdade que $c = ab$, o que justifica o teorema da multiplicação.

Dêste teorema deduzimos uma propriedade fundamental de $y = E(x)$, que nos autoriza a denominar esta função de *função exponencial*, e escrevê-la, simbòlicamente, sob a forma

$$y = e^x.$$

Para estabelecer esta propriedade, observaremos que deve existir um número — que chamaremos [1] e — para o qual

$$\log e = 1.$$

Isto equivale à definição

$$E(1) = e.$$

Empregando o teorema da multiplicação para a função $E(x)$, virá

$$E(n) = e^n,$$

e, da mesma forma, para m e n inteiros e positivos,

$$E\left(\frac{m}{n}\right) = e^{m/n},$$

que poderíamos, também, ter encontrado diretamente, partindo do teorema da adição dos logaritmos.

A equação $E(r) = e^r$ assim estabelecida, para os números r racionais e positivos, tem lugar, também, para números racionais negativos, em face da equação

$$E(r)E(-r) = E(0) = 1.$$

A função $E(x)$ é, portanto, contínua para *todos* os valores de x, e coincide com e^x, para os valores racionais de x. Êstes fatos autorizam-nos a admitir a função e^x, também para quaisquer valores irracionais

[1] Sua identidade com o número e apresentado na pág. 43 será demonstrada no N.º 6 (pág. 175).

de x (1). (Devemos observar, neste caso, que a continuidade de e^x é conseqüência imediata de sua definição como função inversa de uma função inversa de uma função contínua monótona, enquanto que, se adotássemos a definição elementar, deveríamos *demonstrar* tal continuidade.)

A função exponencial é derivada de acôrdo com a fórmula

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x \text{ ou } y' = y,$$

exprimindo o fato importante de que *a derivada da função exponencial é a própria função.*

A demonstração é extremamente fácil. Temos $x = \log y$, donde, pela fórmula de derivação dos logaritmos, $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y}$, e, pela regra das funções inversas

$$\frac{dy}{dx} = y = e^x,$$

como tínhamos enunciado.

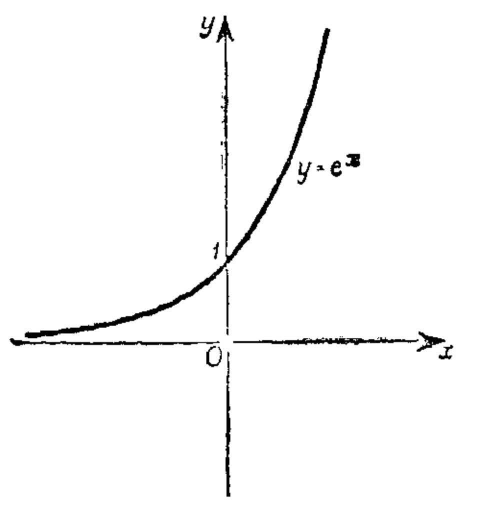


Fig. 16.—Função exponencial

O gráfico da função exponencial e^x, a curva exponencial, como é denominado, é obtido pela reflexão da curva logarítmica em relação à bissetriz do primeiro quadrante, como está indicado na fig. 16.

5. Funções exponencial geral a^x e potência geral x^α.

A função exponencial a^x para uma base positiva qualquer, a, pode, agora, ser *definida* fàcilmente, pela equação

$$y = a^x = e^{x \log a},$$

(1) Se anteciparmos que o número e, de que estamos tratando, é idêntico ao que já encontramos antes (o que será demonstrado na pág. 175), teremos provado que a presente definição nos conduz à mesma função exponencial de base e, que estabelecemos anteriormente, partindo do processo de elevação a potências. De acôrdo com a definição elementar, deduzimos os valores de e para x irracional, considerando-os como os limites de e^{x_n}, onde x_n assume os valores de uma seqüência de números racionais, com o limite x.

que coincide com a antiga definição, em vista da equação

$$e^{\log a} = a.$$

Empregando-se a regra da cadeia, obtém-se imediatamente

$$\frac{d}{dx} a^x = \frac{d}{dx} e^{x \log a} = e^{x \log a} . \log a,$$
$$= a^x \log a.$$

A função inversa da exponencial $y = a^x$ é chamada *logaritmo de base a*, escrevendo-se

$$x = \log_a y.$$

A função logarítmica prèviamente introduzida, quando fôr preciso estabelecer-se distinção entre elas, será denominada logaritmo natural ou logaritmo de base e.

Da definição tira-se imediatamente

$$\log y = x \log a = \log_a y . \log a,$$

o que nos mostra que o logaritmo de y, em uma base positiva qualquer, $a \neq 1$, é obtido multiplicando-se o logaritmo natural de y pela recíproca do logaritmo natural de a, ou seja, o *módulo* do sistema de logaritmos de base a [1].

Em lugar da definição já apresentada da *potência geral* $x^\alpha = (x > 0)$, definiremos, agora, esta potência, por meio da equação

$$x^\alpha = e^{\alpha \log x}.$$

A regra para a derivação de x^α decorre imediatamente da definição empregando-se a regra da cadeia, porquanto

$$\frac{d}{dx} x^\alpha = e^{\alpha \log x} . \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha - 1},$$

coincidindo com o resultado que havíamos obtido (pág. 155).

[1] Se fizermos $a = 10$, teremos os logaritmos ordinários ou de "Briggs", os quais já foram estudados na matemática elementar, sendo de grande vantagem nos cálculos numéricos.

6. Representação da função exponencial e dos logaritmos como limites.

Estamos, agora, em condições de estabelecer importantes relações entre os limites das quantidades introduzidas acima. Começaremos com a fórmula para derivar a função $f(x) = \log x$,

$$\frac{1}{x} = f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\log(x+h)-\log x}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log\left(1+\frac{h}{x}\right).$$

Se fizermos $1/x = z$, teremos

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log(1+zh) = z.$$

Já que a função e^z é contínua para todos os valores de x, isto implica em ser

$$e^z = \lim_{h\to 0} e^{[\log(1+zh)/h]} = \lim_{h\to 0}(1+zh)^{1/h}. \quad . \quad . \quad (a)$$

Se, particularizando, atribuirmos a h a seqüência de valores $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$, obteremos

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = e^z. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

Se, por outro lado, dermos a z o valor 1, a fórmula (a) permite a seguinte verificação importante:

À medida que h *tende para zero, a expressão* $(1+h)^{1/h}$ *aproxima-se do número* e:

$$\lim_{h\to 0}(1+h)^{1/h} = e.$$

A fórmula (b), por seu turno, dá

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e,$$

provando que o número e de que estamos tratando é o mesmo que representamos pelo símbolo e na pág. 43.

Da fórmula de derivação para a^x,

$$a^x \log a = \lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h},$$

deduzimos, fazendo $x = 0$,

$$\log a = \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h},$$

expressão esta que exprime o logaritmo de a, diretamente como um limite.

Acrescentaremos que esta equação permite completar a relação

$$\int_a^b x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha + 1}(b^{\alpha+1} - a^{x+1})$$

já estabelecida e para a qual fomos sempre obrigados a excluir o caso em que $\alpha = 1$. Agora, entretanto, podemos verificar o que acontece quando α tende para o *limite* -1. Se fizermos $a = 1$, o primeiro membro, pela definição de logaritmo, terá o limite [1]

$$\int_1^b \frac{dx}{x} = \log b;$$

ao passo que o segundo membro terá o mesmo limite, quando $a \to -1$. Esta verificação está, aliás, de acôrdo com a fórmula

$$\log b = \lim_{h \to 0} \frac{b^h - 1}{h};$$

bastando, apenas, fazer $\alpha + 1 = h$.

Esclarecemos, assim, o caso excepcional em que $\alpha = -1$, na fórmula de integração que empregamos tantas vêzes. A expressão carece, ainda, de significado quando $\alpha = -1$, porém, tem um sentido definido, como fórmula de limite, quando $\alpha \to -1$.

7. Observações finais.

Vamos recordar, de modo sucinto, a ordem de idéias seguida nesta seção. De início, definimos o logaritmo natural $y = \log x$ para $x > 0$, por meio da integral, e deduzimos, imediatamente, a fórmula de derivação, o teorema da adição e a concluímos pela existência de uma função inversa. Estudamos, então, a função inversa $y = e^x$, verificando que o número e possui o logaritmo 1, e deduzimos a fórmula

(1) Efetuamos a passagem ao limite $\alpha \to -1$, sob o sinal da integral, sem nos preocuparmos com investigações posteriores (págs. 128 e seg.).

de derivação correspondente, assim como as expressões limites para ela e para a função logarítmica. Seguiu-se, naturalmente, a introdução das funções $y = x^\alpha = e^{\alpha \log x}$ e $y = a^x = e^{x \log a}$.

No estudo que acabamos de proceder, contrastando com o que acontece nos processos "elementares", a questão da continuidade não acarreta dificuldades, visto considerarmos o logaritmo como integral e, portanto, como função contínua e derivável, cuja função inversa é, também, contínua.

Exemplos

1. Empregando papel quadriculado e uma escala grande, esboçar o gráfico da função $y = \frac{1}{x}\,(1 \leqq x \leqq 2)$ e determinar $\log_e 2$, contando os quadrados.

Derivar as funções dos exemplos 2 a 5:

2. $x(\log x - 1)$.
3. $\log \log x$.
4. $\log [x + \sqrt{1 + x^2}]$.
5. $\log (\sqrt{1 + \log x} - \operatorname{sen} x)$.

6. Derivar $\log \dfrac{\sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt[3]{2 + x}}$; (*a*) empregando as regras da cadeia e dos quocientes, sem simplificar inicialmente; (*b*) simplificando, primeiro, por meio do teorema sôbre logaritmos.

7. (*a*) Derivar $y = \dfrac{\sqrt[3]{7x^2 + 1}}{\sqrt[4]{x - 2}\,\sqrt{x^4 + 1}}$.

(*b*) Derivar a mesma função, primeiramente tomando os logaritmos e simplificando depois.

8.* Dado $\lim\limits_{n \to \infty} \epsilon_n = 0$, demonstrar que $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \epsilon_n . \frac{x}{n}\right)^n = 1$.

9. Mostrar que a função $y = e^{-\alpha x}(a \cos x + b \operatorname{sen} x)$ satisfaz à equação

$$y'' + 2\alpha y' + (\alpha^2 + 1)y = 0$$

para quaisquer valores de a e b.

10.* Demonstrar que $\dfrac{d^n}{dx^n}(e^{-1/x^2}) = \dfrac{P_n(x)}{x^{3n}}\, e^{-1/x^2}$, quando $x \neq 0$ e $P_n(x)$ fôr um polinômio de grau $2n - 2$. Estabelecer a "fórmula de recorrência",

$$P_{n+1}(x) = (2 - 3nx^2)\,P_n(x) + x^3\,P_n'(x).$$

11. Determinar o máximo de $y = x\lambda^\alpha e^{-\lambda x}$, considerando λ e α como constantes. Achar o lugar do máximo, quando se permite a variação de λ.

12. Derivar $a^{(a^x)}$ $(a > 0)$.

13. Derivar $a^{\operatorname{sen} x (\log x)^2}$.

7. Aplicações da função exponencial

Nesta seção consideraremos alguns problemas variados, envolvendo a função exponencial, a fim de que tenhamos uma visão ampla da importância fundamental que ela tem nas aplicações.

1. Definição da função exponencial por uma equação diferencial.

Um simples teorema, cujo emprêgo evitará indagações minuciosas em muitos casos particulares, define perfeitamente a função exponencial.

Se a função $y = f(x)$ *satisfizer uma equação do tipo*

$$y' = \alpha y$$

em que α *é uma constante, diferente de zero,* y *assume a forma*

$$y = f(x) = ce^{\alpha x},$$

onde c *é, também, uma constante; inversamente, cada função da forma* $ce^{\alpha x}$ *satisfaz a equação* $y' = \alpha y$. Abreviadamente nos referimos à última expressão, chamando-a *equação diferencial*, visto exprimir uma relação entre a função e a sua derivada.

A fim de tornar claro o teorema, notaremos, em primeiro lugar, que, no caso mais simples, isto é, quando $\alpha = 1$, a equação reduz-se a $y' = y$. Sabemos que $y = e^x$ satisfaz esta relação, sendo claro que o mesmo valerá para $y = ce^x$, quando c fôr uma constante arbitrária. Inversamente, vemos com facilidade que nenhuma outra função satisfaz à equação diferencial. Se y fôr uma função desta espécie, tomemos a função $u = ye^{-x}$. Devemos ter, então,

$$u' = y'e^{-x} - ye^{-x} = e^{-x}(y' - y).$$

O segundo membro, porém, se anula, visto que admitimos $y' = y$, donde $u' = 0$, u é a constante c e $y = ce^x$, como queríamos provar (págs. 114 e seg.).

O caso de qualquer valor de α diferente de zero, pode ser desenvolvido do mesmo modo que o caso especial em que $\alpha = 1$. Se introduzirmos a função $u = ye^{-\alpha x}$, chegaremos à equação $u' = y'e^{-\alpha x} - \alpha ye^{-\alpha x}$. Logo, tiramos da equação diferencial, $u' = 0$, de modo que $u = c$ e $y = ce^{\alpha x}$. A recíproca é evidente.

A fim de tornar o teorema mais compreensível, aplicá-lo-emos a alguns exemplos.

2. Juros compostos contínuos. Desintegração radioativa.

Um capital cujos juros são adicionados em períodos regulares de tempo cresce, por saltos, nestes períodos, da seguinte maneira. Se 100α fôr a taxa dos juros por cento e se, ademais, o juro produzido fôr somado ao capital no fim de cada ano, a quantia acumulada por um capital original 1, no fim de x anos, será

$$(1 + \alpha)^x.$$

Se, entretanto, somarmos o juro ao capital, não no fim de cada ano, mas no fim de cada $n^{\text{ésima}}$ parte do ano, a quantia produzida no fim de x anos elevar-se-á a

$$\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^{nx}.$$

Se fizermos $x = 1$ para simplificar, isto é, computando o juro na base de 100α ao ano, acharemos o valor do capital original 1, no fim de um ano, calculando o juro nesta base,

$$\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^{n}.$$

Se, agora, imaginarmos que n cresce além de qualquer limite, isto é, se calcularmos o juro em intervalos cada vez mais reduzidos, o caso limite significará que o juro é composto continuamente, em cada instante. Vemos, então, que a quantia acumulada no fim de um ano será e^α vêzes o capital original. Da mesma forma, calculando-se o juro desta maneira, o capital inicial 1 atingirá, no fim de x anos, $e^{\alpha x}$, podendo x ser um número qualquer, inteiro ou não.

A discussão apresentada no n.° 1 (pág. 178) constitui a ordem de idéias à luz da qual exemplos dêste tipo são ràpidamente compreensíveis. Consideremos uma quantidade, representada pelo número y, que cresce (ou decresce) com o tempo. Seja a razão pela qual esta quantidade cresce ou decresce, proporcional à quantidade total. Se tomarmos o tempo como variável independente x, obteremos, para a razão do crescimento, uma expressão da forma $y' = \alpha y$, onde α, fator de proporcionalidade, é positivo ou negativo, conforme a quantidade seja crescente ou decrescente. De acôrdo, então, com o N.° 1, a própria quantidade y será dada por

$$y = ce^{\alpha x},$$

em que o significado da constante torna-se claro, imediatamente, considerando-se o instante $x = 0$. Neste instante, $e^{\alpha x} = 1$ e, por conseguinte, $c = y_0$ representa a quantidade no comêço do tempo considerado, de sorte que podemos escrever

$$y = y_0 e^{\alpha x}.$$

Um exemplo característico do emprêgo destas idéias é proporcionado pela *desintegração radioativa*. A razão segundo a qual a quantidade total y de substância radioativa diminui, em cada instante, é proporcional à quantidade remanescente no instante considerado. A afirmação é plausível, *a priori*, visto cada partícula da substância decrescer tão ràpidamente como qualquer outra. Portanto, a representação da quantidade y da substância, como função do tempo, satisfaz uma equação da forma $y' = -ky$, onde k será positivo, desde que estejamos considerando uma quantidade que está decrescendo. A quantidade de substância será, então, expressa, em função do tempo, por $y = y_0e^{-kx}$, onde y_0 é o acréscimo da substância no início do tempo considerado (instante $x = 0$).

Depois de um certo tempo τ a substância radioativa terá diminuido metade do valor original. Êste tempo, denominado *semiperíodo*, é fornecido pela equação

$$\tfrac{1}{2}y_0 = y_0e^{-k\tau},$$

donde obtemos, imediatamente, $\tau = \dfrac{\log 2}{k}$.

3. Resfriamento ou aquecimento de um corpo pelo meio circundante.

Outro exemplo típico da ocorrência da função exponencial é proporcionado pelo resfriamento de um corpo, por exemplo, uma placa metálica imersa em um banho de grandes dimensões, a uma dada temperatura. Admitimos, de início, que o banho é tão grande que a sua temperatura não é afetada pelo processo de resfriamento. Imaginaremos, em seguida, que em cada instante dado, tôdas as partes do corpo têm a mesma temperatura e que a razão segundo a qual a temperatura varia é proporcional à diferença entre a temperatura do corpo e a do meio que o cerca (lei do resfriamento de Newton).

Se representarmos o tempo por x e a diferença de temperaturas por $y = y(x)$, a lei do resfriamento será traduzida pela expressão

$$y' = -ky,$$

em que k é uma constante positiva cujo valor depende do próprio corpo. Desta relação instantânea, que exprime o efeito do processo de resfriamento num dado instante, pretendemos, agora, derivar uma "lei integral" que permita encontrar a temperatura num tempo arbitrário x, partindo da temperatura no tempo inicial $x = 0$. O teorema do n.º 1 (pág. 178) fornece a lei integral, imediatamente, sob a forma

$$y = ce^{-kx},$$

onde k é a já mencionada constante que depende do corpo. Isto indica que a temperatura decresce "exponencialmente" e tende a tornar-se igual à temperatura externa. A rapidez com que o fato se verifica, é expressa pelo número k. Como anteriormente, podemos determinar a constante c, considerando o instante $x = 0$. Teremos, então, $y_0 = c$, o que nos permite escrever a lei do resfriamento sob a forma final

$$y = y_0e^{-kx}.$$

É claro que discussão semelhante pode ser aplicada ao aquecimento de um corpo. A única mudança reside na diferença inicial de temperatura y_0 que, no caso do aquecimento, é negativa, em vez de positiva.

4. Variação da pressão atmosférica com a altura, acima da superfície da terra.

Como mais um exemplo da ocorrência da fórmula exponencial, deduziremos a lei segundo a qual a pressão atmosférica varia com a altura. Empregaremos aqui: (1) a verificação física, segundo a qual a pressão atmosférica é igual ao pêso de uma coluna vertical de ar sôbre a superfície unitária, e (2), a lei de Boyle, que estabelece que a pressão do ar (p) a uma temperatura constante é proporcional à densidade do ar (σ). A lei de Boyle, expressa em símbolos, é: $p = a\sigma$, onde a representa uma constante que depende da propriedade física específica do ar, e mais ainda, é proporcional à temperatura absoluta — como supusemos a temperatura constante, não consideraremos esta última dependência. O problema resume-se, pois, na determinação de $p = f(h)$ como função da altura h acima da superfície da terra.

Se designarmos por p_0 a pressão atmosférica na superfície da terra, isto é, o pêso total da coluna de ar suportada pela área unitária, e por $\sigma(\lambda)$ a densidade do ar na altura λ sôbre a superfície da terra, o pêso da coluna de ar até à altura h será dado pela integral $\int_0^h \sigma(\lambda)\,d\lambda$. A pressão, em h, será, portanto,

$$p = f(h) = p_0 - \int_0^h \sigma(\lambda)\,d\lambda.$$

Derivando esta fórmula, obtemos a seguinte relação entre a pressão $p = f(h)$ e a densidade $\sigma(h)$:

$$\sigma(h) = -f'(h) = -p'.$$

Se empregarmos, agora, a lei de Boyle, eliminaremos σ, obtendo

$$p' = -\frac{1}{a}p$$

equação que contém ùnicamente a função-pressão como incógnita. Da pág. 178 segue que

$$p = f(h) = ce^{-h/a}.$$

Se, como já o fizemos, chamarmos a pressão na superfície da terra, isto é, $f(0)$ por p_0, obteremos, imediatamente, $c = p_0$, e, por conseqüência,

$$p = f(h) = p_0e^{-h/a}.$$

Passando aos logaritmos, obtemos

$$h = a\log\frac{p_0}{p}.$$

Estas duas fórmulas são freqüentemente empregadas. Por exemplo, se a constante a fôr conhecida, permite-nos calcular a altura de um lugar, partindo da pressão barométrica, ou determinar a diferença de altitude de dois lugares, medindo a pressão atmosférica em cada um dêles. Aliás, se a pressão atmosférica e a altitude h forem conhecidas, pode-se determinar a constante a que é da maior importância na teoria dos gases.

5. Reações químicas.

Consideremos, agora, um exemplo referente à química, a saber, a chamada *reação unimolecular*. Suponhamos que uma substância é dissolvida numa quantidade relativamente grande de solvente, digamos, uma certa quantidade de açúcar de cana, em água. Se uma reação tiver lugar, a lei química da ação das massas estabelece, neste caso simples, que a velocidade da reação é proporcional à quantidade dos reativos presentes. Suponhamos que o açúcar de cana está sendo transformado, por ação catalítica, em açúcar invertido, representando por $u(x)$ a quantidade de açúcar de cana que no instante x ainda se encontra inalterada, a velocidade da reação será $-du/dx$, e de acôrdo com a lei da ação das massas, teremos uma equação da forma

$$\frac{du}{dx} = -ku$$

onde k representa uma constante que depende da substância reagente. Desta lei instantânea obtemos, imediatamente, como na pág. 178, uma lei integral, que dá a quantidade de açúcar em função do tempo:

$$u(x) = ae^{-kx}.$$

Esta fórmula mostra, claramente, como a reação química tende, assintòticamente, para a sua fase final, $u = 0$, isto é, a transformação completa de todo o açúcar. A constante a é, como é fácil deduzir, a quantidade de substância existente no tempo $x = 0$.

6. Abertura e fechamento de circuitos elétricos.

Como exemplo final, estudaremos o acréscimo de uma corrente elétrica (contínua), quando o circuito é restabelecido (ou o seu decréscimo quando é cortado). Seja R a resistência do circuito e E a fôrça eletromotriz (voltagem). A corrente I crescerá gradualmente desde o seu valor original 0 até o valor final E/R. Temos, pois, que considerar I como função do tempo. O crescimento da corrente depende da indução-própria do circuito; o circuito possui uma constante característica L, o coeficiente de self-indução, de tal natureza que uma fôrça eletromotriz, de grandeza LdI/dx, oposta à fôrça eletromotora externa E, se desenvolve, à medida que a corrente cresce. Da lei de Ohm, que estabelece que em cada instante o produto da resistência pela corrente é igual à voltagem efetiva existente, obtemos

$$IR = E - L\frac{dI}{dx}.$$

Escreveremos, então,

$$f(x) = I(x) - \frac{E}{R},$$

deduzindo, imediatamente, que $f'(x) = -\frac{R}{L}f(x)$, e, pelo teorema da pág. 178, $f(x) = f(0)e^{-Rx/L}$. Recordando que $I(0) = 0$, vemos que $f(0) = -\frac{E}{R}$, vindo a expressão

$$I = f(x) + \frac{E}{R} = \frac{E}{R}(1 - e^{-Rx/L})$$

para a corrente em função do tempo.

A expressão indica que, quando o circuito é fechado, a corrente tende, assintòticamente, para o seu valor final E/R.

EXEMPLOS

1. A função $f(x)$ satisfaz a equação

$$f(x + y) = f(x)f(y).$$

(*a*) Se $f(x)$ fôr derivável, tanto se $f(x) \equiv 0$, como se $f(x) = e^{\alpha x}$.
(*b*)* Se $f(x)$ fôr contínua, tanto se $f(x) \equiv 0$, como se $f(x) = e^{\alpha x}$.

2. Se uma função $f(x)$ fôr derivável e satisfizer a equação

$$f(xy) = f(x) + f(y),$$

teremos $f(x) = \alpha \log x$.

3. Uma quantidade de rádio pesa 1 g no instante $t = 0$. No tempo $t = 10$ anos ela diminuiu para 0,997 g. Quanto tempo será necessário para ficar reduzida a 0,05 g?

4. Resolver as seguintes equações diferenciais:

(*a*) $y' = \alpha(y - \beta)$.
(*b*) $y' - \alpha y = \beta$.
(*c*) $y' - \alpha y = \beta e^{\alpha x}$.
(*d*) $y' - \alpha y = \beta e^{\gamma x}$.

8. FUNÇÕES HIPERBÓLICAS

1. Definição analítica.

A função exponencial não se apresenta sòzinha, em muitas aplicações, mas sim, em combinações da forma

$$\frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}).$$

É conveniente estudar estas e outras combinações semelhantes como funções especiais. Representá-las-emos como segue:

$$\operatorname{Sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \operatorname{Ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

$$\operatorname{Th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \qquad \operatorname{Coth} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}},$$

às quais chamaremos *seno hiperbólico, co-seno hiperbólico, tangente hiperbólica* e *co-tangente hiperbólica*, respectivamente. As funções Sh x, Ch x e Th x são definidas para todos os valores de x, ao passo que Coth x exclui o ponto $x = 0$. Esta notação foi estabelecida para exprimir certa analogia com as funções trigonométricas, isto é, foi esta analogia, que estamos em vias de estudar pormenorizadamente, que justificou a concepção especial destas novas funções. As figuras 17, 18 e 19 mostram os gráficos das funções hiperbólicas. As linhas pontilhadas da figura 17 são os gráficos de $y = \frac{1}{2}e^x$ e $y = \frac{1}{2}e^{-x}$, a partir dos quais podemos construir fàcilmente as curvas correspondentes a Sh x e Ch x.

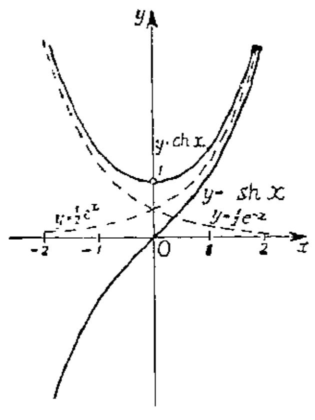


Fig. 17

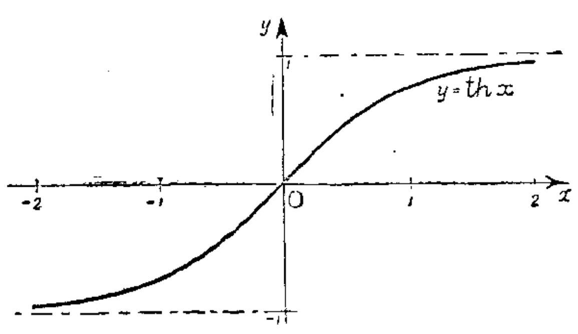


Fig. 18

Vemos, assim, que Ch x é uma função par, isto é, uma função que não se altera quando substituímos x por $-x$, enquanto que Sh x é ímpar, visto mudar de sinal quando se troca x por $-x$ (ver pág. 20).

A função

$$\operatorname{Ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

é, por definição, positiva para todos os valores de x, assumindo o seu valor mínimo quando $x = 0$, ficando $\operatorname{Ch} 0 = 1$.

Entre $\operatorname{Ch} x$ e $\operatorname{Sh} x$ existe a relação fundamental

$$\operatorname{Ch}^2 x - \operatorname{Sh}^2 x = 1,$$

que decorre imediatamente da definição destas duas funções. Se designarmos a variável independente por t em vez de x e escrevermos

$$x = \operatorname{Ch} t, \quad y = \operatorname{Sh} t,$$

teremos

$$x^2 - y^2 = 1;$$

isto é, o ponto de coordenadas $x = \operatorname{Ch} t$, $y = \operatorname{Sh} t$ se move sôbre a hipérbole eqüilátera $x^2 - y^2 = 1$, quando t percorre tôda a escala de valores, desde $-\infty$ até $+\infty$. De acôrdo com a equação da definição, $x \geqq 1$, e vemos mais fàcilmente que y percorre todos os valores entre $-\infty$ e $+\infty$ à medida que t o faz. Desta forma, e^t tenderá para o infinito se t o fizer, enquanto que e^{-t} tende para zero. Podemos, portanto, estabelecer, mais exatamente, que quando t percorrer os valores entre $-\infty$ e $+\infty$, as equações $x = \operatorname{Ch} t$ e $y = \operatorname{Sh} t$ darão um ramo, a saber, o da direita, da hipérbole eqüilátera.

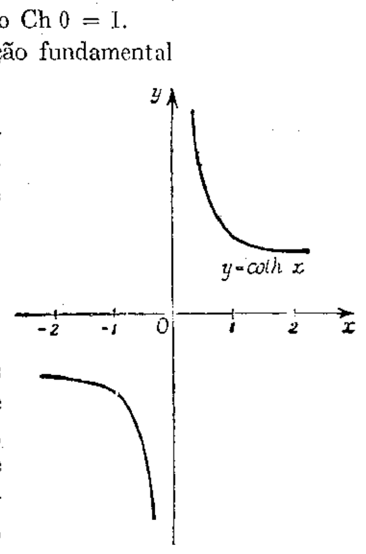


Fig. 19

2. Teoremas da adição e fórmulas para derivação.

Das definições das funções que nos ocupam, deduzimos as fórmulas conhecidas por teoremas da adição:

$$\operatorname{Ch}(a + b) = \operatorname{Ch} a \operatorname{Ch} b + \operatorname{Sh} a \operatorname{Sh} b,$$
$$\operatorname{Sh}(a + b) = \operatorname{Sh} a \operatorname{Ch} b + \operatorname{Ch} a \operatorname{Sh} b.$$

A demonstração é obtida se escrevermos

$$\operatorname{Ch}(a + b) = \frac{e^a e^b + e^{-a} e^{-b}}{2}, \quad \operatorname{Sh}(a + b) = \frac{e^a e^b - e^{-a} e^{-b}}{2},$$

e se fizermos, nestas equações,

$$e^a = \mathrm{Ch}\, a + \mathrm{Sh}\, a, \; e^{-a} = \mathrm{Ch}\, a - \mathrm{Sh}\, a,$$
$$e^b = \mathrm{Ch}\, b + \mathrm{Sh}\, b, \; e^{-b} = \mathrm{Ch}\, b - \mathrm{Sh}\, b.$$

A analogia entre estas e as fórmulas trigomonétricas correspondentes é evidente. A única diferença nos teoremas da adição reside no sinal da primeira fórmula.

As fórmulas para a derivação apresentam analogias correspondentes. Recordando que $d(e^x)/dx = e^x$, podemos escrever [1]

$$\frac{d}{dx}\mathrm{Ch}\, x = \mathrm{Sh}\, x, \quad \frac{d}{dx}\mathrm{Sh}\, x = \mathrm{Ch}\, x,$$
$$\frac{d}{dx}\mathrm{Th}\ x = \frac{1}{\mathrm{Ch}^2 x}, \quad \frac{d}{dx}\mathrm{Coth}\, x = -\frac{1}{\mathrm{Sh}^2 x}.$$

3. Funções hiperbólicas inversas.

Às funções hiperbólicas $x = \mathrm{Ch}\, t$, $y = \mathrm{Sh}\, t$, correspondem funções inversas que designaremos por [2]

$$t = \mathrm{Arc\,Ch}\, x, \quad t = \mathrm{Arc\,Sh}\, y.$$

Visto a função $\mathrm{Sh}\, t$ ser monótona crescente, em todo o intervalo $-\infty < t < +\infty$, a sua inversa será determinada para todos os valores de y. Por outro lado, basta deitarmos um olhar ao gráfico (fig. 17, pág. 184) para sabermos que $t = \mathrm{Arc\,Ch}\, x$ não é definida unìvocamente, apresentando ambigüidades de sinal, pois, a cada valor de x correspondem, não sòmente o número t, mas também, $-t$. Assim, a função inversa $\mathrm{Arc\,Ch}\, x$ é definida sòmente para $x \geqq 1$, visto a sua função primitiva ser $\mathrm{Ch}\, t \geqq 1$ para qualquer valor de t.

Podemos representar estas funções inversas, muito cômodamente, por meio dos logaritmos, considerando $e^t = u$, nas definições

$$x = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \quad y = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

como incógnitas, e resolvendo estas equações (quadráticas) em relação a u. Teremos, então,

$$u = x \pm \sqrt{x^2 - 1}, \quad u = y + \sqrt{y^2 + 1};$$

(1) Muitas vêzes é conveniente introduzir as funções $\mathrm{Sech}\, x = 1/\mathrm{Ch}\, x$; $\mathrm{Cosech}\, x = 1/\mathrm{Sh}\, x$.

(2) Emprega-se, também, a notação $\mathrm{Ch}^{-1}x$, etc. (Ver nota da pág. 143.)

como $u^t = e$ pode assumir ùnicamente valores positivos, a raiz quadrada. na segunda equação deve ser tomada com o sinal positivo, ao passo que, na primeira, é possível outro sinal. Sob forma logarítmica, teremos,

$$t = \log\,(x \pm \sqrt{x^2 - 1}) = \text{Arc Ch}\, x,$$
$$t = \log\,(y + \sqrt{y^2 + 1}) = \text{Arc Sh.}\, x$$

No caso de Arc Ch x a variável x é restringida ao intervalo $x \geqq 1$, enquanto Arc Sh y é definida para todos os valores de y.

A fórmula apresenta dois valores, $\log\,(x + \sqrt{x^2 - 1})$ e $\log\,(x - \sqrt{x^2 - 1})$, para Arc Ch x, correspondentes aos dois ramos da curva. Desde que

$$(x + \sqrt{x^2 - 1})\,(x - \sqrt{x^2 - 1}) = 1$$

a soma dêstes dois valores de Arc Ch x é zero, o que concorda com a observação feita acima.

As inversas das tangente e co-tangente hiperbólicas podem ser deduzidas de modo análogo, podendo igualmente ser expressas logarìtmicamente. Representaremos estas funções por Arc Th x e Arc Coth x. Indicando a variável independente por x, obtemos, imediatamente:

$$\text{Arc Th}\, x = \frac{1}{2} \log \frac{1 + x}{1 - x} \text{ no intervalo } -1 < x < 1,$$

$$\text{Arc Coth}\, x = \frac{1}{2} \log \frac{x + 1}{x - 1} \text{ no intervalo } x < -1,\ x < 1.$$

A derivação destas funções inversas pode ser feita pelo próprio leitor, que, neste caso, poderá usar tanto a regra para a derivação das funções inversas, como a regra da cadeia, juntamente com as expressões acima, representadas logarìtmicamente. Se x fôr a variável independente, será obtido o seguinte resultado:

$$\frac{d}{dx} \text{Arc Ch}\, x = \pm \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}, \quad \frac{d}{dx} \text{Arc Sh}\, x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}},$$

$$\frac{d}{dx} \text{Arc Th}\, x = \frac{1}{1 - x^2}, \quad \frac{d}{dx} \text{Arc Coth}\, x = \frac{1}{1 - x^2}.$$

As duas últimas fórmulas não se contradizem, visto a primeira sòmente ser verdadeira para $-1 < x < 1$ e a segunda sòmente verificar-se para $x < -1$ e $1 < x$. Os dois valores de $\frac{d}{dx}$ Arc Ch x, representados

pelos dois sinais ($\pm$) na primeira fórmula, correspondem aos dois ramos da curva $y = \text{Arc Ch}\, x = \log (x \pm \sqrt{x^2 - 1})$.

4. Outras analogias.

Na representação que acabamos de estudar, da hipérbole eqüilátera, pela quantidade t, não buscamos evidenciar qualquer significado geométrico do próprio "parâmetro" t. Voltaremos, agora, a êste assunto, para obtermos conhecimento mais profundo das analogias entre as funções trigonométricas e as hiperbólicas. Se representássemos o círculo de equação $x^2 + y^2 = 1$ pelo parâmetro t, sob a forma $x = \cos t$, $y = \text{sen}\, t$, podemos interpretar a quantidade t como um ângulo ou como um comprimento de arco medido sôbre a circunferência. Podemos, ainda, considerar t como o dôbro da área do setor circular correspondente àquele ângulo, sendo a área positiva ou negativa, conforme o ângulo seja positivo ou negativo.

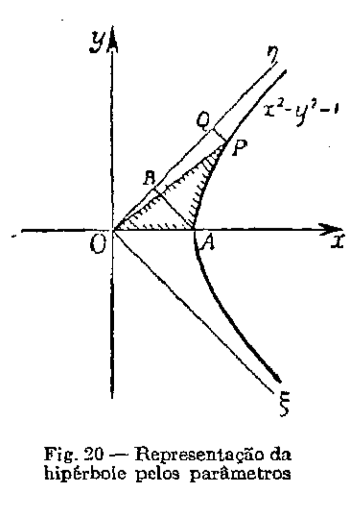


Fig. 20 — Representação da hipérbole pelos parâmetros

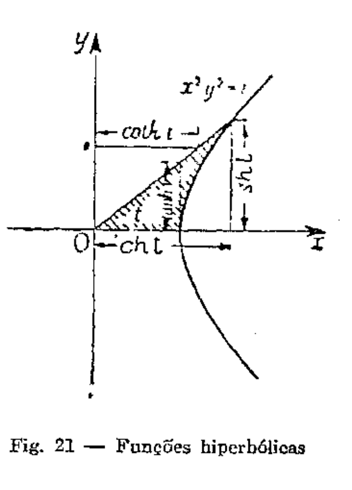


Fig. 21 — Funções hiperbólicas

Faremos, agora, um enunciado semelhante para as funções hiperbólicas, estabelecendo que t é o dôbro do setor hiperbólico [1] tracejado na fig. 20. A demonstração é obtida sem dificuldade, se tomarmos para eixos da hipérbole as suas assíntotas, efetuando a transformação das coordenadas

$$x - y = \sqrt{2}\, \xi, \quad x + y = \sqrt{2}\, \eta,$$

ou

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} (\xi + \eta), \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}} (\eta - \xi);$$

Com estas novas coordenadas a equação da hipérbole será $\xi\eta = \frac{1}{2}$. Vemos, assim, desde logo, que a área em questão é igual à área $ABPQ$ da figura, pois os dois tri-

[1] Do mesmo modo que a notação = arc cos x lembra que t é um *arco* do círculo de referência a expressão t = Arc Ch x significa que é uma certa *área* da hipérbole eqüilátera.

ângulos retângulos OPQ e OAB têm a mesma área, de acôrdo com a equação da hipérbole. Os dois pontos A e P terão, como é claro, as coordenadas

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \eta = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{e} \quad \xi = \frac{x-y}{\sqrt{2}},\ \eta = \frac{x+y}{\sqrt{2}}$$

respectivamente, e para o dôbro da área da nossa figura, obteremos

$$2\int_{1/\sqrt{2}}^{(x+y)/\sqrt{2}} (1/2\eta)d\eta = \log(x+y) = \log\left[x \pm \sqrt{x^2-1}\right].$$

Efetuando-se a comparação desta com a fórmula da função inversa $t = \text{Arc Ch}\ x$, deduzida na pág. 187, vemos que o enunciado sôbre a quantidade t é verdadeiro

Em conclusão, devemos frisar que, como está indicado na fig. 21, as funções hiperbólicas podem ser representadas por diagramas em relação à hipérbole, de modo análogo à representação das funções trigonométricas com referência ao círculo [1].

Exemplos

1. Demonstrar a fórmula

$$\text{Sh}\ a + \text{Sh}\ b = 2\ \text{Sh}\left(\frac{a+b}{2}\right)\text{Ch}\left(\frac{a-b}{2}\right).$$

Deduzir fórmulas semelhantes para $\text{Sh}\ a - \text{Sh}\ b$, $\text{Ch}\ a + \text{Ch}\ b$, $\text{Ch}\ a - \text{Ch}\ b$.

2. Representar $\text{Th}\,(a \pm b)$ em função de $\text{Th}\ a$ e $\text{Th}\ b$.
   Representar $\text{Coth}\,(a \pm b)$ em função de $\text{Coth}\ a$ e $\text{Coth}\ b$.
   Representar $\text{Sh}\ \frac{1}{2}a$ e $\text{Ch}\ \frac{1}{2}a$ em função de $\text{Ch}\ a$.
3. Derivar
   (*a*) $\text{Ch}\ x + \text{Sh}\ x$; (*b*) $e^{\text{Th}x + \text{Coth}x}$; (*c*) $\log \text{Sh}\,(x + \text{Ch}^2 x)$;

   (*d*) $\text{Arc Ch}\ x + \text{Arc Sh}\ x$; (*e*) $\text{Arc Sh}\,(\alpha\ \text{Ch}\ x)$; (*f*) $\text{Arc Th}\ \dfrac{2x}{1+x^2}$

4. Calcular a área limitada pela catenária $y = \text{Ch}\ x$, pelas ordenadas $x = a$ e $x = b$, e pelo eixo dos x.

9. Ordem de grandeza das funções

As diversas funções que encontramos neste capítulo mostram diferenças muito importantes com relação ao seu comportamento em face de valores grandes do argumento ou, como dizemos também, na *or-*

[1] Os valores numéricos das funções hiperbólicas, que são empregados em inúmeros cálculos, encontram-se em muitas tábuas. Mencionaremos as seguintes: J. B. Dale, *Five-figure Tables of Mathematical Functions* (Arnold, 1918); K. Hayashi, *Fünfstellige Tafeln der Kreis- u. d Hyperbelfunktionen* (Berlim, 1930); E. Jahnke and F. Emde, *Funktionentafeln mit Formeln und Kurven* (German and English, Leipzig, 1933).

dem de grandeza do seu crescimento. Devido à grande importância dêste assunto discuti-lo-emos aqui, de maneira abreviada, muito embora êle não esteja diretamente ligado às idéias de integral ou de derivada.

1. Conceito de ordem de grandeza. Casos mais simples.

Se a variável x crescer além de qualquer valor, quando $\alpha > 0$, as funções x^α, $\log x$, e^x, e^{ax} crescerão, também, excedendo qualquer limite. Observando, porém, a maneira pela qual se processa o crescimento, podemos, desde logo, apontar uma diferença essencial entre as funções. Por exemplo, a função x^3 tornar-se-á infinita de ordem superior a x^2. Com isto queremos dizer que, à medida que x cresce, o próprio quociente x^3/x^2 cresce além de qualquer valor. Do mesmo modo, diremos que a função x^α tornar-se-á infinita de ordem superior a de x^β se $\alpha < \beta < 0$ e, assim, sucessivamente.

De maneira geral, se os valores absolutos das duas funções $f(x)$ e $g(x)$ crescerem com x além de qualquer limite, uma delas, digamos $f(x)$ *tornar-se-á infinita de ordem superior à outra*, $g(x)$, desde que o quociente $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right|$ cresça, com x, além de qualquer limite. Quando o quociente $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right|$ tender para zero, à medida que x crescer, $f(x)$ será infinita de ordem inferior a $g(x)$ e, finalmente, as duas funções tornar-se-ão infinitas da mesma ordem de grandeza, se o quociente $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right|$, à medida que x fôr crescendo, tiver um limite diferente de zero ou, ao menos, permanecer entre dois limites fixos, positivos. Por exemplo, a função $ax^3 + bx^2 + c = f(x)$, onde $a \neq 0$, será da mesma ordem de grandeza da função $x^3 = g(x)$, visto o quociente $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right| = \left|\dfrac{ax^3 + bx^2 + c}{x^3}\right|$ ter o limite $|a|$. Por outro lado, a função $x^3 + x + 1$ atingirá um valor infinito de grandeza superior ao da função $x^2 + x + 1$.

A soma de duas funções $f(x)$ e $\phi(x)$, sendo $f(x)$ de ordem de grandeza superior a $\phi(x)$, é da mesma ordem de grandeza que $f(x)$, visto $\left|\dfrac{f(x) + \phi(x)}{f(x)}\right| = \left|1 + \dfrac{\phi(x)}{f(x)}\right|$ e, por hipótese, esta expressão tender para 1 à medida que x cresce.

Poderíamos ser tentados a medir a ordem de grandeza das funções por uma escala, dando a x a ordem de grandeza 1, e à potência x^α $(\alpha > 0)$ a ordem de grandeza α. Um polinômio de grau n teria, então, claramente, a ordem de grandeza n; uma função racional qualquer, na qual o grau do numerador excedesse de h o grau do denominador, pertenceria à ordem de grandeza h.

2. Ordem de grandeza da função exponencial e do logaritmo.

Acontece, porém, que qualquer tentativa visando fixar a ordem de grandeza de funções arbitrárias pela escala acima mencionada, falharia irremediàvelmente. Existem funções que se tornam infinitas de ordem superior à potência x^α de x, não importando quão grande seja o valor escolhido de α; além disso, há funções que se tornam infinitas de ordem inferior à da potência x^α, por menor que seja o valor positivo atribuído a α. Tais funções não poderiam ser colocadas em parte alguma da nossa escala.

Sem nos aprofundarmos na teoria da ordem das grandezas, demonstraremos o seguinte teorema:

Se a *fôr um número arbitrário qualquer, maior do que* 1, *o quociente* $\frac{a^x}{x}$ *tenderá para o infinito, à medida que* x *crescer.*

Para prová-lo construamos a função

$$\phi(x) = \log \frac{a^x}{x} = x \log a - \log x;$$

é claro que basta mostrar que a função cresce além de qualquer limite se x tender para $+\infty$. Para tal, consideremos a derivada

$$\phi'(x) = \log a - \frac{1}{x}$$

e observemos que, para $x \geqq c = \dfrac{2}{\log a}$, ela não será menor do que o número positivo $\frac{1}{2} \log a$. Portanto, segue-se que, para $x \geqq c$,

$$\phi(x) - \phi(c) = \int_c^x \phi'(t)\,dt \geqq \int_c^x \tfrac{1}{2} \log a\,dt \geqq \tfrac{1}{2}(x - c) \log a,$$

$$\phi(x) \geqq \phi(c) + \tfrac{1}{2}(x - c) \log a,$$

onde o segundo membro se torna infinito, à medida que x crescer.

Apresentaremos outra demonstração dêste importante teorema. Se escrevermos $\sqrt{a} = b = 1 + h$, teremos $b > 1$ e $h > 0$. Seja n um inteiro tal que $n \leqq x < n + 1$; podemos fazer $x > 1$, de modo que $n \geqq 1$. Aplicando o lema da pág. 31, virá

$$\sqrt{\frac{a^x}{x}} = \frac{b^x}{\sqrt{x}} = \frac{(1+h)^x}{\sqrt{x}} > \frac{(1+h)^n}{\sqrt{n+1}} > \frac{1+nh}{\sqrt{n+1}} > \frac{nh}{\sqrt{2n}} = \frac{h}{\sqrt{2}}\sqrt{n};$$

e, conseqüentemente,

$$\frac{a^x}{x} > \frac{h^2}{2} \cdot n$$

tende para o infinito com x.

Da demonstração que acabamos de apresentar decorrem muitas propriedades interessantes. Por exemplo, o quociente a^x/x^α, de duas potências, onde α representa qualquer expoente positivo e a qualquer número $a > 1$, tenderá para o infinito, quando x crescer, isto é:

A função exponencial torna-se infinita de ordem de grandeza superior à de qualquer potência de x.

A fim de verificá-lo, basta, apenas, mostrar que a raiz α da expressão, isto é,

$$\frac{a^{x/\alpha}}{x} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{a^{x/\alpha}}{x/\alpha} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{a^y}{y} \quad \left(y = \frac{x}{\alpha}\right),$$

tende para o infinito. Isto, entretanto, decorre do teorema precedente, quando se substitui x por $y = x/\alpha$.

De modo semelhante, podemos demonstrar o seguinte teorema. O quociente $(\log x)/x^\alpha$, para qualquer valor positivo de α, tende para zero, desde que x tenda para o infinito; isto é

O logaritmo torna-se infinitamente pequeno, de ordem de grandeza inferior à de qualquer potência positiva de x, *por menor que ela seja.*

A demonstração é imediata, fazendo-se $\log x = 1$, com o que transformamos o quociente em $y/e^{\alpha y}$. Escreveremos, pois, $e^\alpha = a$, resultando que a é um número > 1 e o quociente y/a^y aproxima-se de 0, quando y cresce. Como y aproxima-se do infinito, à medida que x o faz, o teorema está demonstrado [1].

[1] Outra demonstração muito simples pode ser apresentada: para $x > 1$ e $\epsilon > 0$,

$$\log x = \int_1^x \frac{d\xi}{\xi} < \int_1^x \xi^{\epsilon - 1}\, d\xi = \frac{1}{\epsilon}(x^\epsilon - 1);$$

se escolhermos ϵ menor do que α e dividirmos ambos os membros da desigualdade por x^α, verifica-se que à medida que $x \to \infty$, $(\log x)/x^\alpha \to 0$.

Com fundamento nestes resultados, podemos construir funções de ordem de grandeza muitíssimo mais elevada do que a da função exponencial, e outras de ordem de grandeza muitíssimo mais baixa do que a do logaritmo. Por exemplo, a função e^{e^x} é de ordem de grandeza superior à da função exponencial, ao passo que $\log \log x$ é inferior à do logaritmo. Podemos, como é claro, repetir o processo quantas vêzes quisermos, combinando os símbolos e ou log.

3. Observações gerais.

As considerações anteriores mostram que é impossível, por meio de um raciocínio sistemático, atribuir números definidos às funções, classificando-as em ordens de grandeza, de modo que, ao compararmos duas delas, pudéssemos conferir ordem de grandeza superior à que apresentasse o número mais elevado. Se, por exemplo, a função x fôr da ordem de grandeza 1 e a função $x^{1+\epsilon}$ da ordem $1 + \epsilon$, a função $x \log x$ deverá ser de uma ordem de grandeza maior do que 1 e menor do que $1 + \epsilon$, por menor que seja o ϵ escolhido. Tal número, porém, não existe. Deixando esta discussão de lado, é fácil, entretanto, ver que as funções não precisam ter ordem de grandeza claramente definida. Por exemplo, a função $\dfrac{x^2(\operatorname{sen} x)^2 + x + 1}{x^2(\cos x)^2 + x}$ não tende para qualquer limite definido quando x cresce. Ao contrário, para $x = n\pi$ (n sendo inteiro) o seu valor será $\dfrac{1}{n\pi}$, enquanto que para $x = \left(n + \dfrac{1}{2}\right)\pi$ êle valerá $\left(n + \dfrac{1}{2}\right)\pi + 1 + \dfrac{1}{(n + \frac{1}{2})\pi}$. Embora numerador e denominador se tornem, ambos, infinitos, o quociente não se encontra entre limites positivos e não se aproxima de zero nem do infinito. O numerador, portanto, não é da mesma ordem que o denominador, nem de ordem inferior ou superior. Esta situação, aparentemente assustadora, significa, ùnicamente, que as definições apresentadas não o foram de molde a permitir a comparação de um par de funções quaisquer. Isto, entretanto, não constitui um defeito, pois não desejamos comparar as ordens de grandeza de funções tais como o numerador e o denominador da fração acima, visto que o conhecimento do valor de uma delas não nos dá qualquer informação útil em relação à outra.

4. Ordem de grandeza das funções na vizinhança de pontos arbitrários.

Da mesma forma que podemos inquirir o comportamento das funções quando x cresce sem limite, podemos, também, indagar se, e de que modo, as funções que se tornam infinitas no ponto $x = \xi$ podem ser distinguidas em face do seu comportamento no ponto referido. Estabeleceremos, em seguida, que a função $f(x) = \frac{1}{|x - \xi|}$ se torna infinita de primeira ordem no ponto $x = \xi$, e que $\frac{1}{|x - \xi|^\alpha}$, de modo correspondente, se torna infinita de ordem α, desde que α seja positivo.

Reconhecemos, então, que a função $e^{1/|x-\xi|}$ se torna infinita de ordem superior e que $\log|x - \xi|$ será de ordem inferior a tôdas aquelas potências; isto é, verificam-se as relações entre limites:

$$\lim_{x \to \xi}(|x - \xi|^\alpha . e^{1/|x-\xi|}) = \infty \text{ e } \lim_{x \to \xi}(|x - \xi|^\alpha . \log|x - \xi|) = 0.$$

Para verificá-lo, faremos, apenas, $\frac{1}{|x - \xi|} = y$. O enunciado reduz-se, então, ao conhecido teorema da pág. 192, visto

$$|x - \xi|^\alpha . e^{1/|x-\xi|} = e^y/y^\alpha \text{ e } |x - \xi|^\alpha . \log|x - \xi| = -(\log y)/y^\alpha$$

e y crescer além de qualquer limite à medida que x se aproxima de ξ. O método de redução do comportamento das funções num ponto finito ao comportamento das mesmas em um ponto infinito, pela substituição $\frac{1}{|x - \xi|} = y$, é freqüentemente útil, como veremos mais adiante.

5. Ordem de grandeza das funções que tendem para zero.

Assim como procuramos descrever a aproximação de uma função ao infinito, mais precisamente, por meio do conceito de ordem de grandeza, podemos, igualmente, estabelecer o modo pela qual ela se aproxima de zero. Diremos que, quando $x \to \infty$, a quantidade $1/x$ se anula na primeira ordem, ao passo que $x^{-\alpha}$ será nula para a ordem α, desde que α seja positivo. Acharemos, novamente, que a *função*

$1/\log x$ *se anula em ordem inferior à de qualquer potência* $x^{-\alpha}$, isto é, para cada α positivo, verifica-se a relação

$$\lim_{x \to 0}(x^{-\alpha}.\log x) = 0.$$

Da mesma forma, diremos que para $x = \xi$, a quantidade $x - \xi$ se anula para a primeira ordem, enquanto $|x - \xi|^{\alpha}$ se anulará para a ordem α. Com êstes resultados, é fácil demonstrar as relações

$$\lim_{x \to 0}(|x|^{\alpha}.\log|x|) = 0, \quad \lim_{x \to 0}(|x|^{-\alpha}.e^{-1/|x|}) = 0$$

que se exprimem, usualmente, como segue:

A função $\dfrac{1}{\log|x|}$ *se anula quando* $x \to 0$, *em ordem inferior à de qualquer potência de* x; *a função exponencial* $e^{-1/|x|}$ *se anula em ordem superior à de qualquer potência de* x.

Exemplos

1. Comparar as funções seguintes com potências de x, em relação às suas ordens de grandeza, quando $x \to \infty$:

(a) $e^{x^\beta} - 1$.
(b) $(\log x)^\beta$.
(c) $\operatorname{sen} x$.
(d) $\operatorname{Sh} x$.
(e) $x^{1/2} \operatorname{sen} x . \operatorname{arc\,tg} x$.
(f) $x^{1/2} \operatorname{sen} x + \dfrac{x^2 \cos^3 x}{x^2 + 1}$.
(g) $\dfrac{e^{-1/x}}{1 - e^{-1/x}}$.
(h) $x^x - 1$.
(j) $\log(x \log x)$.

2. Comparar as funções do exemplo 1 com $e^{\alpha x}$, e^{x^α}. $(\log x)^\alpha$.

3. Comparar as funções do exemplo 1 com as potências de x, quando $x \to 0$

4. A expressão $\lim\limits_{x \to \infty} e^{x^n} e^{(-e^x)}$, existe?

5. Quais são os limites de $e^{(-e^x)}$ e $e^{(e^{-x})}$, quando $x \to \infty$?

6. Seja $f(x)$ uma função contínua que se anula, juntamente com sua primeira derivada, para $x = 0$. Demonstrar que $f(x)$ se anula em ordem superior à de x, quando $x \to 0$.

7. Mostrar que $f(x) = \dfrac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m}$, quando $a_0, b_0 \neq 0$, forem da mesma ordem de grandeza que x^{n-m}, à medida que $x \to \infty$.

8.* Demonstrar que e^x não é função racional.

9.* Demonstrar que e^x não pode satisfazer qualquer equação algébrica que tenha para coeficientes polinômics em x.

APÊNDICE AO CAPÍTULO III

1. Algumas funções especiais

Já esclarecemos, em diversas oportunidades, por meio de exemplos, que o conceito geral de função contém muitas possibilidades estranhas à intuição comum. Geralmente não apresentamos êsses casos por meio de expressões analíticas simples, e aqui, portanto, desejamos mostrar que é possível representar diversas destas descontinuidades típicas e fenômenos anormais por meio de expressões muito simples, construídas com o auxílio das funções elementares. Começaremos, entretanto, com um exemplo, no qual não existe descontinuidade.

1. A função $y = e^{-1/x^2}$.

Esta função (fig. 22), que é definida, em sua primeira fase, sòmente para valores de x diferentes de zero, tem, òbviamente, zero para limite, desde que $x \to 0$. Fazendo-se $1/x^2 = \xi$ a função proposta transforma-se em $y = e^{-\xi}$ e $\lim\limits_{\xi \to \infty} e^{-\xi} = 0$. Logo, a fim de estendermos a função, de sorte que seja contínua para $x = 0$, definiremos o seu valor neste ponto ($x = 0$), pela equação $y(0) = 0$.

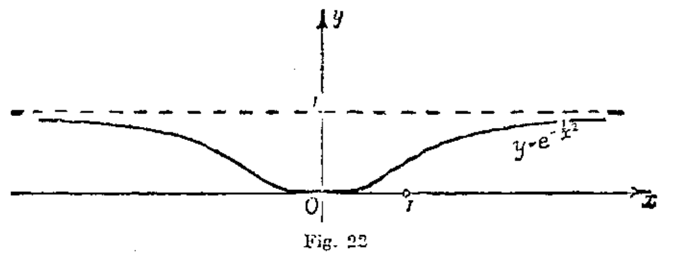


Fig. 22

Pela regra da cadeia, a derivada da função proposta, para $x \neq 0$, será $y' = \dfrac{2}{x^3} e^{-1/x^2}$. Se x se aproximar de 0, a derivada terá, igualmente, o limite zero, como deduzimos da pág. 194 e seguinte. No próprio ponto $x = 0$, a derivada

$$y'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{y(h) - y(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^{-1/h^2}}{h}$$

é, também, nula.

Se formarmos as derivadas de ordem superior para $x \neq 0$, obteremos sempre produtos da função e^{-1/x^2} por polinômios em $1/x$, e a passagem ao limite, $x \to 0$, conduzirá ao limite 0. Tôdas as derivadas de ordem superior se anularão, da mesma forma que y' no ponto $x = 0$.

Assim, vemos que a função estudada é contínua em qualquer intervalo e derivável tantas vêzes quantas desejarmos, além de se anular, com tôdas as suas derivadas, no ponto $x = 0$. Veremos mais tarde (Capítulo VI, Apêndice, pág. 336), quão notável é, na realidade, êste comportamento.

2. A função $y = e^{-1/x}$.

Podemos verificar, ràpidamente, que para valores positivos de x, esta função se comporta de maneira idêntica à anteriormente estudada. Se x tender para 0 através de valores positivos, a função tenderá, igualmente, para 0, assim como tôdas as suas derivadas. Se o valor da função fôr definido para $x = 0$, como $y(0) = 0$, tôdas as derivadas à direita do ponto considerado ($x = 0$), serão nulas. Quando, porém, x se aproxima de 0 através de valores negativos, o procedimento é inteira-

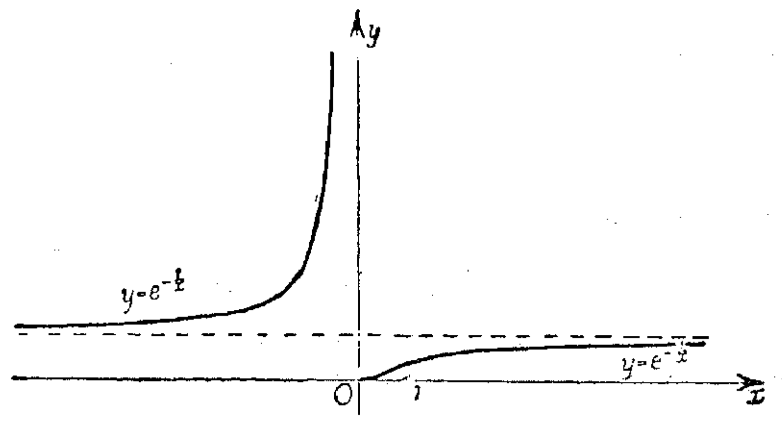


Fig. 23

mente diverso. Então, tanto a função como tôdas as suas derivadas tornam-se infinitas, não existindo derivadas à esquerda do ponto $x = 0$. Neste ponto, portanto, a função apresenta uma notável espécie de descontinuidade (fig. 23), completamente diferente das descontinuidades infinitas das funções racionais, já anteriormente estudadas (págs. 22, 53).

3. A função $y = \operatorname{Th} \dfrac{1}{x}$

Já vimos (págs. 33, 52), que funções "com saltos" de descontinuidade podem ser obtidas a partir de funções simples, pela passagem ao limite. A função exponencial definida na pág. 171 e o princípio da composição das funções dão-nos outro método para construí-las com as descontinuidades citadas, partindo de funções elementares, sem outro qualquer processo posterior de limite. Exemplo disto é a função

$$y = \operatorname{Th} \frac{1}{x} = \frac{e^{1/x} - e^{-1/x}}{e^{1/x} + e^{-1/x}}$$

e o seu comportamento no ponto $x = 0$. Esta função, na sua primeira fase, não

é definida em tal ponto. Se nos aproximarmos do ponto $x = 0$ através dos valores positivos de x, obteremos, como é claro, o limite 1. Se, por outro lado, nos aproximarmos do ponto $x = 0$ através dos valores negativos, atingiremos o limite -1.

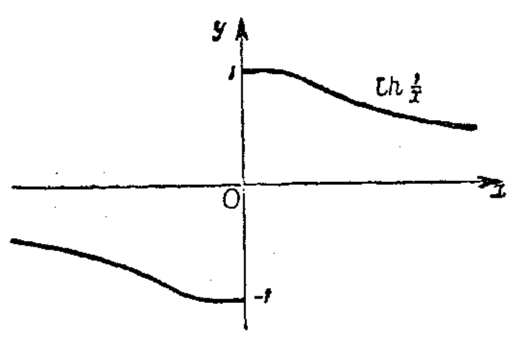


Fig. 24

O ponto $x = 0$ surge, assim, como um ponto de descontinuidade; quando x, no seu crescimento, atinge 0, a função dá um salto igual a 2 (fig. 24). Por sua vez, a derivada

$$y' = -\frac{1}{\mathrm{Ch}^2(1/x)}\frac{1}{x^2}$$

$$= -\frac{1}{x^2}\frac{4}{(e^{1/x} + e^{-1/x})^2}$$

se aproxima do limite 0 por ambos os lados, como se deduz do § 9, pág. 194 (1).

4. A função $y = x\,\mathrm{Th}\,\frac{1}{x}$.

No caso da função

$$y = x\,\mathrm{Th}\frac{1}{x} = x\frac{e^{1/x} - e^{-1/x}}{e^{1/x} + e^{-1/x}}$$

a descontinuidade acima é removida pelo fator x. A função tem o limite 0 quando $x \to 0$ de qualquer lado, de modo que podemos, mais uma vez, apropriadamente,

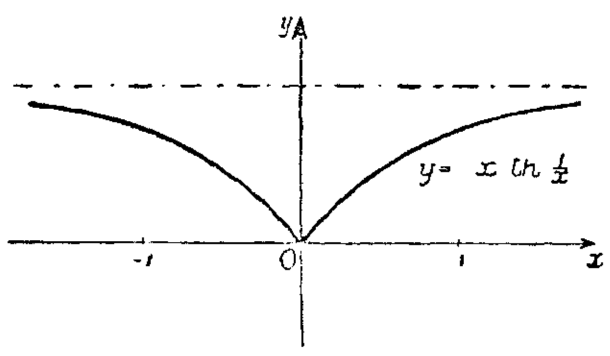


Fig. 25

definir $y(0)$ como sendo igual a 0. A função é, portanto, contínua no ponto $x = 0$, mas sua derivada de primeira ordem

$$y' = \mathrm{Th}\frac{1}{x} - \frac{x}{1}\frac{1}{\mathrm{Ch}^2(1/x)}$$

(1) Outro exemplo da ocorrência de descontinuidade com "salto" é proporcionado pela função $y = \mathrm{arc\,tg}\,\frac{1}{x}$, quando $x \to 0$.

apresenta a mesma espécie de descontinuidade que o exemplo precedente. O gráfico da função é uma curva com um vértice (fig. 25). No ponto $x = 0$ a função não possui, univocamente, derivada, mas tem uma à direita, com o valor $+1$, e outra à esquerda, com o valor -1.

5. A função $y = x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$, $y(0) = 0$.

Já vimos que esta função não é composta de um número finito de têrmos monótonos — podemos dizer que não é "parcialmente monótona" — mas, apesar disso, é contínua (pág. 54). Sua derivada de primeira ordem

$$y' = \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}, \quad (x \neq 0)$$

ao contrário, apresenta uma descontinuidade em $x = 0$. À medida que $x \to 0$ esta derivada oscila continuamente entre duas curvas-limite, uma positiva, outra negativa, as quais tendem para $+\infty$ e $-\infty$, respectivamente. No ponto $x = 0$ o quociente das diferenças é $\frac{y(h) - y(0)}{h} = \operatorname{sen} \frac{1}{h}$. Quando $h \to 0$ o quociente oscila um número infinito de vêzes, para a frente e para trás, entre $+1$ e -1, indicando que a função não possui derivadas nem à direita nem à esquerda.

2. Observações sôbre a derivabilidade das funções

A derivada de uma função contínua que tenha derivada em todos os seus pontos não precisa ser, necessàriamente, contínua.

Como exemplificação mais simples, tomemos a função

$$y = f(x) = x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}.$$

Na sua primeira fase, a função proposta não é definitiva para $x = 0$. Estabeleceremos a definição de $f(0)$, atribuindo-lhe neste ponto o valor 0, tornando, assim, a função contínua e definida em todo o intervalo. Para qualquer valor de x, diferente de zero, a derivada é fornecida pela expressão

$$f'(x) = -x^2 \cos \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x^2} + 2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = -\cos \frac{1}{x} + 2x \operatorname{sen} \frac{1}{x}.$$

Quando x se aproxima de 0, $f'(x)$ não possui limite. Se, por outro lado, formarmos o quociente das diferenças $\frac{f(h) - f(0)}{h} = \left(h^2 \operatorname{sen} \frac{1}{h}\right) / h = h \operatorname{sen} \frac{1}{h}$, veremos em seguida que êle tende para zero, à medida que h o faz. A derivada, portanto, existe para $x = 0$ e vale 0. A fim de compreendermos intuitivamente a razão dêste com-

portamento paradoxal, representemos a função gràficamente (fig. 26). Ela oscila para a frente e para trás, entre as curvas $y = x^2$ e $y = -x^2$, as quais toca, alternadamente. Assim sendo, a razão entre a altura da crista das ondas e suas distâncias à origem, torna-se cada vez maior. Contudo, as ondas não se retificam, pois sua inclinação é dada pela derivada $f'(x) = 2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$. Nos pontos $x = \frac{1}{2n\pi}$, em que $\cos \frac{1}{x} = 1$, ela é igual a -1, e nos pontos $x = \frac{1}{(2n+1)\pi}$, onde $\cos \frac{1}{x} = -1$, ela vale $+1$.

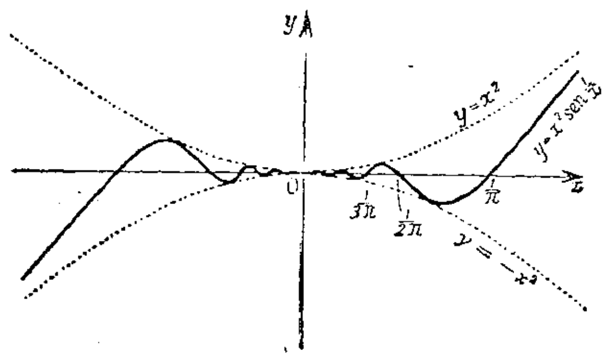


Fig. 26

Em contraste com a possibilidade que acabamos de ilustrar, isto é, que a derivada exista em todos os pontos e, contudo, não seja contínua, vamos estabelecer o seguinte teorema, muito simples, que esclarece uma série de problemas e discussões anteriores: se soubermos que nas vizinhanças do ponto $x = a$ a função $f(x)$ é contínua e tem uma derivada $f'(x)$ em todos os pontos, mas se não pudermos afirmar a existência de $f'(a)$, e, se além disso, verificar-se a equação $\lim_{x \to a} f'(x) = b$, podemos concluir que a derivada $f'(x)$ existe, também, no ponto a e que $f'(a) = b$. A demonstração decorre, imediatamente, do teorema do valor médio. Temos $\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(\xi)$, onde ξ é um valor intermediário entre a e $a + h$. Se h se aproximar de 0, $f'(\xi)$ tenderá para b, ficando provado o que enunciamos.

Outro teorema que acompanha êste e que pode ser demonstrado de maneira análoga, é o seguinte: se a função $f(x)$ fôr contínua no

intervalo $a \leqq x \leqq b$ e possuir derivada, para $a < x < b$, que cresce além de qualquer limite, quando x se aproxima de a, o quociente das diferenças, à direita, $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$, cresce, também, além de qualquer valor à medida que h tende para 0, não existindo derivada finita, à direita, no ponto $x = a$. Geomètricamente, isto significa que a curva tem uma tangente vertical no ponto de coordenadas (finitas) $[a, f(a)]$.

3. Algumas fórmulas especiais

1. Demonstração do teorema do binômio.

As regras que estabelecemos para a derivação permitem-nos dar uma demonstração simples do teorema do binômio. Introduzimos aqui esta demonstração, como exemplo do *método dos coeficientes indeterminados*, cuja importância veremos mais tarde. Desejamos desenvolver $(1 + x)^n$ em potências de x, para todos os valores inteiros e positivos de n. Vemos, logo, que a função $(1 + x)^n$ deve ser um polinômio de grau n, isto é, deve assumir a forma

$$(1+x)^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n,$$

consistindo o problema em determinar os coeficientes a_ν. Se fizermos $x = 0$, obteremos, em seguida, $a_0 = 1$. Derivando ambos os membros da equação, uma, duas, três vêzes, etc., obteremos as equações

$$n(1+x)^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + \ldots + na_n x^{n-1},$$
$$n(n-1)(1+x)^{n-2} = 2a_2 + 3.2a_3 x + \ldots + n(n-1)a_n x^{n-2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Já que tais equações se verificam para todos os valores de x, podemos fazer $x = 0$ em cada uma delas, vindo, então, para os coeficientes $a_1, a_2, \ldots$ os valores fornecidos pelas seguintes expressões

$$a_1 = n, \quad a_2 = \frac{n(n-1)}{1.2}, \quad a_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}, \ldots,$$
$$a_k = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k}.$$

Finalmente, teremos o teorema binomial sob a forma

$$(1+x)^n = 1 + nx + \binom{n}{2}x^2 + \ldots + \binom{n}{k}x^k + \ldots + x^n.$$

2. Derivação sucessiva. Regra de Leibnitz.

Em conexão com o que acabamos de expor, deixamos ao cuidado do leitor provar, como exercício, que a derivação sucessiva de um produto pode ser realizada de acôrdo com a seguinte fórmula (*regra de Leibnitz*):

$$\frac{d^n}{dx^n}(fg) = \frac{d^nf}{dx^n}g + \binom{n}{1}\frac{d^{n-1}f}{dx^{n-1}}\frac{dg}{dx} + \binom{n}{2}\frac{d^{n-2}f}{dx^{n-2}}\frac{d^2g}{dx^2} + \dots$$
$$+ \binom{n}{n-1}\frac{df}{dx}\frac{d^{n-1}g}{dx^{n-1}} + f\frac{d^ng}{dx^n}.$$

A derivação sucessiva de uma função composta $y = [f\phi(x)]$, entretanto, não segue lei tão simples. Das fórmulas de derivação apresentadas no último capítulo (regras do produto e da cadeia), tiramos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df}{d\phi}\frac{d\phi}{dx} = f'\phi',$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = f''\phi'^2 + f'\phi'',$$
$$\frac{d^3y}{dx^3} = f'''\phi'^3 + 3f''\phi'\phi'' + f'\phi''',$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

3. Outros exemplos do uso da regra da cadeia. Derivação de $f(x)^{g(x)}$. Generalização do teorema do valor médio.

Para formar a derivada da função x^x escrevemos $x^x = e^{x \log x}$, donde obtemos

$$\frac{dx}{d}x^x = x^x(\log x + 1)$$

pela regra da cadeia. Da mesma forma, podemos efetuar a derivação da expressão mais geral $f(x)^{f(x)} = e^{f(x)\log f(x)}$ empregando, ainda, a regra da cadeia. Obteremos, então,

$$\frac{d}{dx}[f(x)^{f(x)}] = f(x)^{f(x)}.\,f'(x)\,[\log f(x) + 1].$$

Como mais uma aplicação da regra da cadeia, apresentaremos a demonstração do teorema que podemos denominar de teorema geral

do valor médio do cálculo diferencial (pág. 135), estabelecendo-o, agora, sob condições menos restritivas.

Seja $G(x) = u$ uma função contínua e monótona no intervalo fechado $a \leqq x \leqq b$, que tem derivada, que não é, em parte alguma, igual a zero, no intervalo aberto $a < x < b$. Seja, ainda, $F(x)$ uma função também contínua para $a \leqq x \leqq b$ e derivável para $a < x < b$. Introduziremos a nova variável independente u em vez de x em $F(x)$, por meio da função inversa $x = \Phi(u)$ de $G(x)$, obtendo, então, a função composta $f(u) = F[\Phi(u)]$. A regra da cadeia proporciona

$$f'(u) = F'(x)\,\Phi'(u) = \frac{F'(x)}{G'(x)}.$$

O teorema comum do valor médio, aplicado à função $f(u)$ e ao intervalo entre $u_1 = G(a)$ e $u_2 = G(b)$ mostra que para um valor intermediário ω

$$\frac{f(u_2) - f(u_1)}{u_2 - u_1} = f'(\omega) \quad \text{ou} \quad \frac{F(b) - F(a)}{G(b) - G(a)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)},$$

onde $\xi = \Phi(\omega)$ representa o valor intermediário entre a e b.

Exemplos

1. Achar a derivada de segunda ordem de $f[g[h(x)]]$.
2. Derivar as funções seguintes:
   (a) $x^{\operatorname{sen} x}$. (b) $(\cos x)^{\operatorname{tg} x}$.
   (c) $\log_{v(x)} u(x)$ (isto é, o logaritmo de $u(x)$ na base $v(x)$); $v(x) > 0$.
3. Demonstrar a regra de Leibnitz.
4. Formar as derivadas de ordem n de:

(a) $x^3 e^{ax}$.	(d) $\cos mx \operatorname{sen} kx$.
(b) $(\log x)^2$.	(e) $e^x \cos 2x$.
(c) $\operatorname{sen} x \operatorname{sen} 2x$.	(f) $(1 + x)^6 e^x$.

5.* Formar a derivada de ordem n de arc sen x, no ponto $x = 0$ e a de $(\text{arc sen } x)^2$ no mesmo ponto.

6. Demonstrar que $\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2}$.

Capítulo IV

DESENVOLVIMENTO COMPLEMENTAR DO CÁLCULO INTEGRAL

As regras para derivação estabelecidas no capítulo precedente habilitam-nos a operar extensamente sôbre o problema da *derivação* das funções. Quase sempre, porém, o problema inverso, isto é, a integração, excede-o em importância. Estudaremos, portanto, a arte de integrar funções dadas.

Os resultados obtidos por meio das fórmulas de derivação podem ser resumidos no seguinte enunciado:

Tôda função derivada de funções elementares, constituindo uma "expressão fechada" [1] *pode ser derivada, sendo a sua derivada, também, uma expressão fechada, igualmente formada de funções elementares.*

Não encontramos, porém, enunciado que correspondesse exatamente a êsse, aplicável à integração das funções elementares. Sabemos que tôda função elementar, e na realidade, tôda função contínua, *pode* ser integrada e *já integramos* numerosas funções dêste tipo, seja diretamente, seja pela inversão das fórmulas da derivação, verificando que as integrais obtidas são constituídas de expressões que contêm ùnicamente as funções elementares já mencionadas. Contudo, ainda estamos longe de poder formular a solução geral do seguinte problema: dada uma função $f(x)$ decorrente de funções elementares, representada por uma expressão fechada qualquer, determinar a sua integral indefinida, $F(x) = \int f(x)dx$ que seja, também, por sua vez, uma expressão fechada, decorrente de funções elementares.

(1) Entendemos por "expressão fechada" uma função que pode ser formada, a partir das funções elementares, pela aplicação repetida das operações racionais e dos processos de composição e inversão.

Devemos, entretanto, salientar que a distinção entre as funções elementares e as demais é, em si mesma, inteiramente arbitrária.

Na realidade êste problema é, em geral, insolúvel. De modo algum é certo que tôdas as funções elementares possuam integrais que sejam, elas próprias, funções elementares. A despeito disso, porém, é necessário que estejamos aptos para executar tais integrações quando *forem possíveis*, adquirindo certo grau de habilidade técnica no manejo das mesmas.

A primeira parte dêste capítulo é dedicada ao desenvolvimento de artifícios úteis ao fim visado. E desde já advertimos o principiante contra o desejo que possa ter de decorar, simplesmente, as inúmeras fórmulas obtidas pelo emprêgo dêsses recursos técnicos. O leitor deve, ao contrário, dirigir seus esforços no sentido de obter compreensão clara dos *métodos* de integração e aprender como aplicá-los. Além disso, deve lembrar-se de que, mesmo no caso da integração ser impossível por tais artifícios, a integral deve existir (pelo menos para tôdas as funções contínuas) e pode, efetivamente, ser determinada com o grau de precisão desejada, por meio de métodos numéricos que serão desenvolvidos mais tarde (capítulo VII, pág. 342).

Na última parte do presente capítulo esforçar-nos-emos em aprofundar e estender as concepções de integração e integral, inteiramente à parte da técnica da integração.

1. INTEGRAIS ELEMENTARES

Inicialmente, repetiremos que a cada uma das fórmulas de derivação, anteriormente estabelecidas, corresponde uma fórmula equivalente de integração. Como estas integrais elementares são empregadas a cada momento como material indispensável na arte da integração, reunimo-las sob a forma de tábua (pág. 206). A coluna da direita contém certo número de funções elementares, ao passo que a coluna da esquerda indica as derivadas correspondentes. Se a tábua fôr lida da esquerda para a direita, encontraremos, na última coluna, a integral indefinida da função que está na primeira coluna.

Lembraremos, também, ao leitor, os teoremas fundamentais do cálculo diferencial e integral, demonstrados no capítulo II, § 4 (pág. 117) e, em particular, o fato de que a integral definida é obtida da integral indefinida $F(x)$ pela fórmula

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

$F'(x) = f(x)$	$F(x) = \int f(x)\,dx$
1. x^a $(a \neq -1$.	$\frac{x^{a+1}}{a+1}$.
2. $\frac{1}{x}$.	$\log \mid x \mid$.
3. e^x.	e^x.
4. a^x $(a \neq 1)$.	$\frac{a^x}{\log a}$.
5. sen x.	$-$ cos x.
6. cos x.	sen x.
7. $\frac{1}{\text{sen}^2 x}$ $(\equiv \text{cosec}^2 x)$.	$-$ cotg x.
8. $\frac{1}{\cos^2 x}$ $(\equiv \sec^2 x)$.	tg x.
9. Sh x.	Ch x.
10. Ch x.	Sh x.
11. $\frac{1}{\text{Sh}^2 x}$ $(\equiv \text{Cosech}^2 x)$.	$-$ Coth x.
12. $\frac{1}{\text{Ch}^2 x}$ $(\equiv \text{Sech}^2 x)$.	Th x.
13. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(\mid x \mid < 1)$.	$\begin{cases} \text{arc sen } x. \\ -\text{arc cos } x. \end{cases}$
14. $\frac{1}{1+x^2}$.	$\begin{cases} \text{arc tg } x. \\ -\text{arc cotg } x. \end{cases}$
15. $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.	Arc Sh $\equiv \log(x + \sqrt{1+x^2})$.
16. $\frac{1}{\pm\sqrt{x^2-1}}$ $(\mid x \mid > 1)$.	Arc Ch $x \equiv \log(x \pm \sqrt{x^2-1})$.
17. $\frac{1}{1-x^2}$ $\begin{cases} \mid x \mid < 1. \\ \mid x \mid > 1 \end{cases}$	Arc Th $x \equiv \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x}$. Arc Coth $x \equiv \frac{1}{2} \log \frac{x+1}{x-1}$.

Finalmente, o leitor deverá saber perfeitamente as regras elementares da integração reunidas no capítulo II, § 1 (págs. 81-82).

Nas seções seguintes procuraremos reduzir o cálculo das integrais das funções que nos ocuparem ao das integrais elementares apresentadas na tábua ao lado. Pondo de lado certos artifícios, que não podem, certamente, ocorrer ao principiante, mas ùnicamente àqueles que possuem grande experiência, a redução a que nos referimos se baseia essencialmente em dois métodos usuais. Cada um dos referidos métodos permite transformar as integrais de muitas maneiras, sendo o objetivo de tais transformações reduzir a integral considerada, de uma vez, ou mediante uma seqüência de vêzes, a uma ou mais fórmulas elementares de integração, constantes da tábua que apresentamos.

2. Método de substituição

O primeiro dos métodos empregados para resolver os problemas de integração, consiste na introdução de uma nova variável (isto é, método de *substituição* ou *transformação*). A fórmula integral correspondente é, precisamente, a regra da cadeia do cálculo diferencial, expressa sob forma integral.

1. Fórmula da substituição.

Suporemos que uma nova variável u é introduzida na função $F(x)$ por meio da equação $x = \phi(u)$, de modo que $F(x)$ se transforme em uma função de u:

$$F(x) = F[\phi(u)] = G(u).$$

A regra da cadeia do cálculo diferencial nos dá

$$\frac{dG}{du} = \frac{dF}{dx}\phi'(u).$$

Se escrevermos

$$F'(x) = f(x) \text{ e } G'(u) = g(u),$$

ou as expressões equivalentes

$$F(x) = \int f(x)dx \text{ e } G(u) = \int g(u)du,$$

a regra da cadeia assume a forma

$$g(u) = f(x)\phi'(u).$$

Por outro lado, sendo $G(u) = F(x)$, por definição, isto é

$$\int g(u)du = \int f(x)dx,$$

obteremos a fórmula integral, equivalente à regra da cadeia,

$$\int f[\phi(u)]\,\phi'(u)\,du = \int f(x)\,dx, \quad [x = \phi(u)].$$

Tal é a fórmula básica para a substituição, em uma integral, da variável por uma outra. Ela indica que, se desejarmos a integral indefinida de uma função de u, a qual é dada sob a forma especial $f[\phi(u)]\,\phi'(u)$, podemos calcular a integral indefinida da função $f(x)$, como função de x e, depois de realizada a integração, retomar a variável u, fazendo $x = \phi(u)$.

Se, por exemplo, aplicarmos a fórmula ao integrando $\dfrac{\phi'(u)}{\phi(u)}$, teremos

$$\int \frac{\phi'(u)}{\phi(u)}\,du = \int \frac{dx}{x} = \log|x| = \log|\phi(u)|$$

ou, substituindo u por x,

$$\int \frac{\phi'(x)}{\phi(x)}\,dx = \log|\phi(x)|.$$

Se, nesta fórmula importante, substituirmos funções particulares, tais como $\varphi(x) = \log x$ ou $\varphi(x) = \operatorname{sen} x$ ou, ainda, $\varphi(x) = \cos x$, obteremos (1)

$$\int \frac{dx}{x\log x} = \log|\log x|,$$

$$\int \operatorname{cotg} x\,dx = \log|\operatorname{sen} x|, \qquad \int \operatorname{tg} x\,dx = -\log|\cos x|.$$

Outro exemplo é

$$\int \varphi(u)\varphi'(u)\,du = \int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}[\varphi(u)]^2,$$

onde $f(x) = x$. Quando $\varphi(u) = \log u$, teremos

$$\int \frac{\log u}{u}\,du = \frac{1}{2}(\log u)^2.$$

(1) Tanto esta como as fórmulas subseqüentes, são verificadas derivando-se o resultado, que deve dar, outra vez, o integrando. De mais a mais, estas fórmulas são consideradas verdadeiras sòmente quando as expressões que nelas figuram têm um significado preciso, como é natural.

Consideremos, por fim, o exemplo

$$\int \operatorname{sen}^n u \cos u \, du.$$

Aqui, $x = \operatorname{sen} u = \varphi(u)$ e, portanto,

$$\int \operatorname{sen}^n u \cos u \, du = \int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{\operatorname{sen}^{n+1} u}{n+1}.$$

Em muitos casos, entretanto, empregaremos a fórmula acima em sentido inverso, partindo do segundo membro, isto é, da integral $\int f(x)dx$. Devemos, então, calcular ou simplificar a integral indefinida $F(x) = \int f(x)dx$, introduzindo-lhe a nova variável de integração u por meio da fórmula de transformação $x = \phi(u)$ e operar sôbre a integral indefinida

$$G(u) = \int f[\phi(u)]\phi'(u)du,$$

substituindo, finalmente, a variável u por x. A fim de realizar esta última operação devemos estar certos de que há um valor definido de u que corresponde ao valor de x, isto é, que a função $x = \phi(u)$ tem inversa. Conseqüentemente, estabeleceremos a seguinte hipótese, pela qual consideramos x como variável primitiva. No intervalo considerado, $u = \psi(x)$ é uma função monótona e derivável, cuja derivada $\psi'(x)$ não se anula em parte alguma do intervalo. A função inversa — que, sob estas condições, é definida e monótona — será representada por $x = \phi(u)$, sendo sua derivada fornecida por $\phi'(u) = 1/\psi'(x)$. Como ***fórmula básica***, para a substituição da nova variável u na integral, teremos

$$\int f(x)dx = \int f[\phi(u)] \, \phi'(u)du \qquad [u = \psi(x)].$$

A integral indefinida $\int \mathrm{f}(\mathrm{x})\,\mathrm{dx}$ *pode ser obtida calculando-se a integral indefinida* $\int \mathrm{f}[\phi(\mathrm{u})]\,\phi'(\mathrm{u})\mathrm{du}$, *introduzindo-se* x *em lugar de* u, *como variável independente, por meio da equação* $\mathrm{u} = \psi(\mathrm{x})$.

Vemos, pois, que não é suficiente exprimir-se simplesmente a variável antiga x em função da nova u e efetuar a integração em relação a esta nova variável. É necessário, antes de proceder à integra-

ção, efetuar a multiplicação pela derivada da variável original x, em relação à nova variável u.

A fórmula correspondente para a integração definida entre dois limites é

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\psi(a)}^{\psi(b)} f[\phi(u)]\,\phi'(u)\,du.$$

Os limites de integração da nova integral são obtidos submetendo-se os limites primitivos à transformação $x = \phi(u)$ *e* $u = \psi(x)$.

Na maioria das aplicações, o integrando $f(x)$ aparecerá, inicialmente, como função de função, digamos, $f(x) = h(u)$, onde $u = \psi(x)$. Nestas condições, é preferível escrever a fórmula integral sob forma ligeiramente modificada, identificando a expressão $f[\phi(u)]$ com $h(u)$. Se fizermos a substituição $u = \psi(x)$, $x = \phi(u)$ para u, a fórmula de transformação será, simplesmente,

$$\int h[\psi(x)]\,dx = \int h(u)\,\frac{dx}{du}\,du.$$

Como primeiro exemplo, vamos integrar a função $f(x) = \operatorname{sen} 2x$, fazendo $u = \psi(x) = 2x$ e $h(u) = \operatorname{sen} u$. Temos

$$\frac{du}{dx} = \psi'(x) = 2.$$

Se, agora, introduzirmos $u = 2x$ na integral, como nova variável, ela *não* se transformará em $\int \operatorname{sen} u\,du$, mas, sim, em

$$\frac{1}{2}\int \operatorname{sen} u\,du = -\frac{1}{2}\cos u = -\frac{1}{2}\cos 2x;$$

o que pode ser verificado imediatamente pela derivação do segundo membro.

Se efetuarmos a integração em relação a x, entre os limites 0 e $\pi/4$, os limites correspondentes para u serão 0 e $\pi/2$, vindo, então,

$$\int_0^{\pi/4} \operatorname{sen} 2x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} u\,du = -\frac{1}{2}\cos u\Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}.$$

Outro exemplo é a simples integral $\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}$. Faremos, neste caso, $u = \psi(x) = \sqrt{x}$, donde $x = \varphi(u) = u^2$. Visto que $\varphi'(u) = 2u$, teremos

$$\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\int_1^2 \frac{u\,du}{u} = 2\int_1^2 du = 2.$$

2. Outra demonstração da fórmula de substituição.

A fórmula de integração que estabelecemos pode ser justificada de outra maneira mais direta, levando-se em conta a fórmula da *integração definida*, baseando-se a demonstração no significado da integral definida como o limite de uma soma. Para calcularmos a integral

$$\int_a^b h[\psi(x)]dx$$

(quando $a < b$), começaremos com uma subdivisão arbitrária do intervalo $a \leqq x \leqq b$ e tornaremos esta subdivisão cada vez menor. Fixaremos esta subdivisão da maneira seguinte. Se a função $u = \psi(x)$ fôr monótona crescente, haverá (1, 1) correspondência entre o intervalo $a \leqq x \leqq b$ no eixo dos x, e um intervalo $\alpha \leqq u \leqq \beta$ dos valores de $u = \psi(x)$, onde $\alpha = \psi(a)$ e $\beta = \psi(b)$. Dividiremos êste intervalo dos u em n partes de comprimento Δu (1); haverá uma subdivisão correspondente do intervalo dos x, em subintervalos que, em geral, não têm o mesmo comprimento. Designaremos os pontos de divisão do intervalo dos x por $x_0 = a$, x_1, x_2, $\ldots$, $x_n = b$, e os comprimentos dos subintervalos correspondentes por

$$\Delta x_1,\ \Delta x_2,\ \ldots,\ \Delta x_n.$$

A integral que procuramos será, pois, o limite (2) da soma

$$\sum_{\nu=1}^{n} h[\psi(\xi_\nu)]\Delta x_\nu,$$

em que ξ_ν assume um valor arbitràriamente escolhido no subintervalo de ordem r da subdivisão dos x. Podemos escrever esta soma sob a forma $\sum_{\nu=1}^{n} h(u_\nu)\frac{\Delta x_\nu}{\Delta u}\Delta u$ onde $u_\nu = \psi(\xi_\nu)$. Pelo teorema do valor médio do cálculo diferencial $\frac{\Delta x_\nu}{\Delta u} = \phi'(\eta_\nu)$, sendo η_ν um valor intermediário da variável u, convenientemente escolhido, no subintervalo de ordem r da subdivisão u, e $x = \phi(u)$ a função inversa de $u = \psi(x)$. Se, agora,

(1) Não é essencial, para a demonstração, a hipótese de que todos êstes subintervalos sejam iguais.

(2) Tal limite existe, efetivamente (para $\Delta u \to 0$), e representa a integral porque, em face da continuidade uniforme de $x = \phi(x)$, o maior dos comprimentos Δx tende para 0 com Δu.

escolhermos o valor de ξ_ν de tal maneira que ξ_ν e η_ν coincidam, isto é, que $\xi_\nu = \phi(\eta_\nu)$, $\eta_\nu = \psi(\xi_\nu)$, a soma estudada adquire a forma

$$\sum_{\nu=1}^{n} h(\eta_\nu)\,\phi'(\eta_\nu)\,\Delta u.$$

Efetuando a passagem ao limite, obteremos a expressão

$$\int_\alpha^\beta h(u)\frac{dx}{du}\,du,$$

como valor-limite, isto é, como valor da integral procurada, em concordância com a fórmula que já havíamos deduzido (pág. 210).

Demonstramos, assim, o seguinte teorema:

Se h(u) *fôr uma função contínua de* u *no intervalo* $\alpha \leqq u \leqq \beta$, *e se a função* $u = \psi(x)$ *fôr contínua e monótona, tendo, além disso, uma derivada* $\dfrac{du}{dx}$, *contínua e que não se anula no intervalo* $a \leqq x \leqq b$, *e se* $\psi(a) = \alpha$, $\psi(b) = \beta$, *então,*

$$\int_a^b h[\psi(x)]\,dx = \int_a^b h(u)\,dx = \int_\alpha^\beta h(u)\frac{dx}{du}\,du.$$

Esta fórmula mostra a vantagem da notação de Leibnitz. A fim de efetuarmos a substituição $u = \psi(x)$, sòmente precisamos escrever $\dfrac{dx}{du}\,du$ em lugar de dx, mudando o limite dos valores originais de x para os correspondentes de u.

3. Exemplos. Fórmulas de integração.

Com o auxílio da regra da substituição podemos, em muitos casos, calcular uma dada integral $\int f(x)\,dx$, reduzindo-a, mediante uma substituição conveniente de x por $\phi(u)$, a uma das integrais elementares da tábua que apresentamos. Se tais substituições são possíveis, e como achá-las, são perguntas a que não se podem dar respostas de caráter geral; são, antes, assuntos nos quais a prática e a capacidade inventiva de cada um, em contraste com os métodos sistemáticos, encontram sua aplicação adequada.

Como exemplo, transformaremos a integral $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, efetuando

a substituição [1] $x = \phi(u) = au$, $u = \psi(x) = x/a$, $dx = a\,du$, pela qual, de acôrdo com o n.º 13 da tábua das integrais elementares (pág. 206), obteremos

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{a\,du}{a\sqrt{1 - u^2}} = \text{arc sen}\, u = \text{arc sen}\, \frac{a}{x}, \text{ para } |x| < |a|.$$

Pela mesma substituição, teremos, de modo análogo,

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \int \frac{a\,du}{a^2(1 + u^2)} = \frac{1}{a}\,\text{arc tg}\, u = \frac{1}{a}\,\text{arc tg}\, \frac{x}{a},$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \text{Arc Sh}\, \frac{x}{a},$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \text{Arc Ch}\, \frac{x}{a}, \text{ para } |x| > |a|,$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \begin{cases} \dfrac{1}{a}\,\text{Arc Th}\, \dfrac{x}{a} \text{ para } |x| < |a| \\ \dfrac{1}{a}\,\text{Arc Coth}\, \dfrac{x}{a} \text{ para } |x| > |a| \end{cases};$$

fórmulas que se apresentam freqüentemente, e que podem ser fàcilmente verificadas, pela derivação do segundo membro.

Em conclusão, devemos salientar, mais uma vez, que baseamos o processo que expusemos na hipótese de que a substituição possua uma única inversa, $x = \phi(u)$ e, efetivamente, que $\psi'(x)$ não se anule em parte alguma do intervalo considerado. Se a hipótese não se verificar, a aplicação da fórmula de substituição pode conduzir, fàcilmente, a conclusões errôneas. Verificando-se $\psi'(x) = 0$ ùnicamente em pontos isolados do intervalo de integração, podemos evitar a dificuldade subdividindo êste intervalo de modo que $\psi'(x)$ se anule sòmente nos pontos extremos de um subintervalo. Podemos, então, aplicar a fórmula de substituição a cada subintervalo, separadamente [2].

(1) Para abreviar, escrevemos os símbolos dx e du separadamente, isto é, $dx = \phi'(u)\,du$ em vez de $dx/du = \phi'(u)$ (págs. 106, 107).

(2) Uma aplicação dêste método conduz ao resultado seguinte, aplicável a muitos casos especiais: se a derivada $\psi'(x)$ se anular em um número finito de pontos, porém, se a função $\psi(x)$ permanecer monótona, o processo da fórmula de substituição pode ser empregado.

3. Exemplos do método de substituição

Nesta seção reunimos um certo número de exemplos que o leitor deve estudar cuidadosamente, a fim de adquirir a prática necessária.

Pela substituição de $u = 1 \pm x^2$, $du = \pm 2x\,dx$, deduzimos

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1 \pm x^2}} = \pm \sqrt{1 \pm x^2},$$

$$\int \frac{x\,dx}{1 \pm x^2} = \pm \tfrac{1}{2} \lg | 1 \pm x^2 |.$$

Nestas fórmulas devemos empregar, nas três posições indicadas, sòmente um dos sinais, $+$ ou $-$.

Pela substituição de $u = ax + b$, $du = a\,dx$ $(a \neq 0)$, obtemos

$$\int \frac{dx}{ax + b} = \frac{1}{a} \log | ax + b |,$$

$$\int (ax + b)^\alpha \, dx = \frac{1}{a(\alpha + 1)} (ax + b)^{\alpha+1} \qquad (\alpha \neq -1),$$

$$\int \operatorname{sen} (ax + b) \, dx = -\frac{1}{a} \cos(ax + b);$$

da mesma forma, substituindo $u = \cos x$, $du = -\operatorname{sen} x\,dx$, teremos,

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = -\log | \cos x |,$$

e, substituindo $u = \operatorname{sen} x$, $du = \cos x\,dx$, virá

$$\int \cot x\,dx = \log | \operatorname{sen} x |$$

(pág. 208). Empregando as substituições análogas, $u = \operatorname{Ch} x$, $du = \operatorname{Sh} x\,dx$ e $u = \operatorname{Sh} x$, $du = \operatorname{Ch} x\,dx$, obteremos as fórmulas

$$\int \operatorname{Th} x\,dx = \log | \operatorname{Ch} x |,$$

$$\int \operatorname{Coth} x\,dx = \log | \operatorname{Sh} x |.$$

Efetuando a substituição $u = \frac{a}{b} \operatorname{tg} x$, $du = \frac{a}{b} \sec^2 x\,dx$, chegaremos às duas fórmulas

$$\int \frac{dx}{a^2 \operatorname{sen}^2 x + b^2 \cos^2 x} = \frac{1}{b^2} \int \frac{1}{\frac{a^2}{b^2} \operatorname{tg}^2 x + 1} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{ab} \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{a}{b} \operatorname{tg} x \right)$$

e

$$\int \frac{dx}{a^2 \operatorname{sen}^2 x - b^2 \cos^2 x} = \begin{cases} -\dfrac{1}{ab} \operatorname{Arc Th} \left(\dfrac{a}{b} \operatorname{tg} x\right) \\ -\dfrac{1}{ab} \operatorname{Arc Coth} \left(\dfrac{a}{b} \operatorname{tg} x\right). \end{cases}$$

Calculamos a integral

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x}$$

escrevendo $\operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}$ e fazendo $u = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, de modo que $du = \frac{1}{2} \sec^2 \frac{x}{2}\, dx$. A integral, então, transforma-se em

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x} = \int \frac{du}{u} = \log \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|.$$

Se substituirmos x por $x + \pi/2$, a fórmula assumirá a forma

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \log \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right|.$$

A substituição de $u = 2x$ conduz, se aplicarmos também as fórmulas trigonométricas $2 \cos^2 x = 1 + \cos 2x$ e $2 \operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos 2x$, às relações freqüentemente empregadas

$$\int \cos^2 x\, dx = \tfrac{1}{2}(x + \operatorname{sen} x \cos x)$$

$$\int \operatorname{sen}^2 x\, dx = \tfrac{1}{2}(x - \operatorname{sen} x \cos x).$$

Pela substituição de $x = \cos u$, equivalente a $u = \operatorname{arc} \cos x$, ou mais geralmente, $x = a \cos u$ $(a \neq 0)$, podemos reduzir

$$\int \sqrt{(1 - x^2)}\, dx \quad \text{e} \quad \int \sqrt{(a^2 - x^2)}\, dx$$

respectivamente, a estas fórmulas. Obteremos, então,

$$\int \sqrt{(a^2 - x^2)}\, dx = -\frac{a^2}{2} \operatorname{arc} \cos \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Da mesma forma, pela substituição de $x = a \operatorname{Ch} u$, chegaremos a

$$\int \sqrt{(x^2 - a^2)}\, dx = -\frac{a^2}{2} \operatorname{Arc Ch} \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2}$$

e, pela substituição de $x = a \operatorname{Sh} u$, teremos

$$\int \sqrt{(a^2 + x^2)}\, dx = \frac{a^2}{2} \operatorname{Arc Sh} \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 + x^2}.$$

A substituição de $u = \frac{a}{x}$, $dx = -\frac{a}{u^2}\,du$, conduz a

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = -\frac{1}{a} \text{ arc sen } \frac{a}{x},$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + a^2}} = -\frac{1}{a} \text{ Arc Sh } \frac{a}{x},$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{1}{a} \text{ Arc Ch } \frac{a}{x}.$$

Vejamos, por fim, as três integrais

$$\int \text{sen } mx \text{ sen } nx\, dx, \int \text{sen } mx \cos nx\, dx, \int \cos mx \cos nx\, dx,$$

onde m e n são inteiros e positivos. Por fórmulas trigonométricas bem conhecidas, podemos desmembrar cada uma das integrais acima em duas partes, escrevendo

$$\text{sen } mx \text{ sen } nx = \tfrac{1}{2}\,[\cos(m - n)x - \cos(m + n)x],$$

$$\text{sen } mx \cos nx = \tfrac{1}{2}\,[\text{sen}(m + n)x + \text{sen}(m - n)x],$$

$$\cos mx \cos nx = \tfrac{1}{2}\,[\cos(m + n)x + \cos(m - n)x].$$

Se fizermos, agora, as substituições $u = (m + n)x$ e $u = (m - n)x$, respectivamente, obteremos diretamente o seguinte sistema de fórmulas:

$$\int \text{sen } mx \text{ sen } nx\, dx = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\text{sen}(m - n)x}{m - n} - \dfrac{\text{sen}(m + n)x}{m + n}\right] \text{ se } m \neq n, \\ \dfrac{1}{2}\left(x - \dfrac{\text{sen } 2mx}{2m}\right) \text{ se } m = n; \end{cases}$$

$$\int \text{sen } mx \cos nx\, dx = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\cos(m + n)x}{m + n} + \dfrac{\cos(m - n)x}{m - n}\right] \text{ se } m \neq n, \\ -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\cos 2mx}{2m}\right) \text{ se } m = n; \end{cases}$$

$$\int \cos mx \cos nx\, dx = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\operatorname{sen}(m+n)x}{m+n} + \dfrac{\operatorname{sen}(m-n)x}{m-n}\right] \text{se } m \neq n, \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\operatorname{sen} 2mx}{2m} + x\right) \text{se } m = n. \end{cases}$$

Se, em particular, integramos desde $-\pi$ até $+\pi$, obteremos dessas fórmulas as relações importantíssimas

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\, dx = \begin{cases} 0 \text{ se } m \neq n, \\ \pi \text{ se } m = n, \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \operatorname{sen} mx \cos nx\, dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos mx \cos nx\, dx = \begin{cases} 0 \text{ se } m \neq n, \\ \pi \text{ se } m = n, \end{cases}$$

que traduzem as "relações de ortogonalidade" das funções trigonométricas, que encontraremos novamente no capítulo IX (pág. 438).

Exemplos

Calcular as seguintes integrais, verificando os resultados pela derivação:

1. $\int xe^{x^2}\, dx.$
2. $\int x^3 e^{-x^4}\, dx.$
3. $\int x^2\sqrt{1 + x^3}\, dx.$
4. $\int \dfrac{\log x}{x}\, dx.$
5. $\int \dfrac{dx}{x(\log x)^n}.$
6. $\int \dfrac{3dx}{9x^2 - 6x + 2}.$
7. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}}.$
8. $\int \dfrac{6x}{2 + 3x}\, dx.$
9. $\int \dfrac{x + 1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx.$
10. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{5 + 2x + x^2}}.$
11. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{3 - 2x - x^2}}.$
12. $\int \dfrac{x\, dx}{x^2 - x + 1}.$
13. $\int \dfrac{x\, dx}{\sqrt{x^2 - 4x + 1}}.$
14. $\int \dfrac{(x + 1)dx}{\sqrt{2 + 2x - 3x^2}}.$
15. $\int \dfrac{dx}{x^2 + x + 1}.$
16. $\int \dfrac{dx}{x^2 - x + 1}.$

17. $\int \frac{dx}{x^2 + 2ax + b}$.

18. $\int \frac{x^4}{1 - x}\, dx$.

19. $\int \operatorname{sen}^3 x \cos^4 x\, dx$.

20. $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^5 x\, dx$.

21. $\int x^3(\sqrt{1 - x^2})^5\, dx$.

22. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$.

23. $\int_0^1 \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{1 + x^2}\, dx$.

24. $\int_0^\pi \cos^n x \operatorname{sen} x\, dx$.

25. $\int_0^4 \frac{x\, dx}{\sqrt{1 + 3x^2}}$.

26. $\int_a^b \frac{x}{(1 + x^2)^2}\, dx$.

27. $\int_a^b \frac{x^3}{1 - x}\, dx$ $(1 < a < b)$.

28. $\int_0^{\pi/2} x \operatorname{sen} 2x^2\, dx$.

29. Calcular $\int_0^1 (1 - x)^n$ (sendo n inteiro e positivo) por substituição.

4. Integração por partes

O segundo método usual para resolver os problemas de integração é fornecido pela fórmula da derivação dos produtos:

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

1. Observações gerais.

Se escrevermos a expressão anterior sob forma integral, obteremos (pág. 141)

$$f(x)g(x) = \int g(x)\, f'(x)\, dx + \int f(x)g'(x)\, dx$$

ou

$$f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)\, f'(x)\, dx.$$

Esta relação pode ser tomada como a fórmula da *integração por partes*. O cálculo de uma integral fica, assim, reduzido à avaliação de outra integral. Decompusemos o integrando da integral $\int \omega(x)\, dx$ em um produto $\omega(x) = f(x)\phi(x)$, e se pudermos determinar o valor da integral indefinida

$$g(x) = \int \phi(x)\, dx$$

do fator $\phi(x)$, de modo que $\phi(x) = g'(x)$, reduzimos, pela nossa fórmula, a integral $\int \omega(x)\, dx = \int f(x)\phi(x) dx = \int f(x)g'(x) dx$ a $\int g(x)f'(x)\, dx$ que, em alguns casos, pode ser calculada mais ràpidamente do que sob

a forma primitiva. Levando-se em conta que a função a integrar $\omega(x)$ pode ser considerada como um produto $f(x)\phi(x) = f(x)g'(x)$ de um grande número de modos diferentes, verifica-se que a fórmula proposta proporciona um instrumento muito eficiente para a transformação das integrais.

A fórmula de integração por partes, escrita como fórmula para a *integração definida*, assume o aspecto

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g'(x)\,dx &= f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)\,dx\\ &= f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g(x)f'(x)\,dx,\end{aligned}$$

visto necessitarmos, apenas, substituir a variável que aparece em ambos os membros da integral indefinida (1) por $x = b$, (2) por $x = a$ e escrever a diferença das duas expressões, para obtermos a integral definida, partindo da fórmula para a integração indefinida (cap. II, § 4, pág. 117).

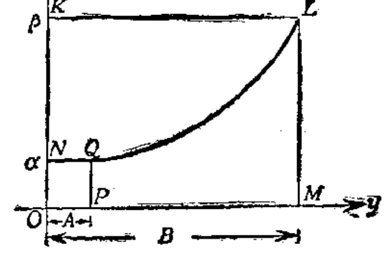


Fig. 1

Podemos dar uma interpretação simples desta fórmula, pelo menos com restrições convenientes sôbre as funções envolvidas. Suponhamos que $y = f(x)$ e $z = g(x)$ são funções monótonas e que $f(a) = A$, $f(b) = B$, $g(a) = \alpha$, $g(b) = \beta$. Podemos, então, formar a inversa da primeira função, substituindo na equação assim obtida z como função de y, admitindo que tal função seja monótona crescente. Como $dy = f'(x)\,dx$ e $dz = g'(x)\,dx$, a fórmula de integração por partes pode ser escrita

$$\int_A^B z\,dy + \int_\alpha^\beta y\,dz = B\beta - A\alpha,$$

em concordância com a relação que a figura 1 esclarece perfeitamente.

área $NQLK$ + área $PMLQ$ = área $OMLK$ − área $OPQN$.

O exemplo seguinte servirá de primeira ilustração do método apresentado:

$$\int \log x\,dx = \int \log x.1.dx.$$

Escrevemos o integrando dêsse modo para indicar que faremos $f(x) = \log x$ e $g'(x) = 1$, de tal sorte que tenhamos $f'(x) = 1/x$ e $g(x) = x$.

A fórmula proposta torna-se, então,

$$\int \log x\, dx = x \log x - \int \frac{x}{x}\, dx = x \log x - x,$$

expressão que é a integral do logaritmo, como pode ser verificado pela derivação.

2. Exemplos.

Os seguintes exemplos são destinados a auxiliar o leitor a fixar êste método.

Fazendo-se $f(x) = x$, $g'(x) = e^x$, teremos $f'(x) = 1$, $g(x) = e^x$, e

$$\int xe^x\, dx = e^x(x-1).$$

Da mesma forma obteremos

$$\int x \operatorname{sen} x\, dx = -x \cos x + \operatorname{sen} x$$

e

$$\int x \cos x\, dx = x \operatorname{sen} x + \cos x.$$

Para $f(x) = \log x$, $g'(x) = x^a$, teremos a relação

$$\int x^a \log x\, dx = \frac{x^{a+1}}{a+1}\left(\log x - \frac{1}{a+1}\right).$$

Admitiremos que $a \neq -1$. Quando $a = -1$ teremos (pág. 208)

$$\int \frac{1}{x} \log x\, dx = (\log x)^2 - \int \log x \,.\, \frac{dx}{x};$$

transpondo a integral do segundo membro para o primeiro, virá

$$\int \frac{1}{x} \log x\, dx = \frac{1}{2}(\log x)^2.$$

Calculamos a integral $\int \operatorname{arc\,sen} x\, dx$, fazendo $f(x) = \operatorname{arc\,sen} x$, $g'(x) = 1$. Obteremos, assim,

$$\int \operatorname{arc\,sen} x\, dx = x \operatorname{arc\,sen} x - \int \frac{x\, dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

A integração do segundo membro pode ser efetuada como está indicado no § 3 (pág. 214); achamos, pois,

$$\int \operatorname{arc\,sen} x\, dx = x \operatorname{arc\,sen} x + \sqrt{1-x^2}.$$

Do mesmo modo calcularemos a integral

$$\int \operatorname{arc\,tg} x\,dx = x \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}\log(1+x^2)$$

e muitas outras do tipo análogo.

Os exemplos seguintes são de natureza algo diferente. Uma dupla aplicação de método de integração por partes leva-nos à integral primitiva, para a qual obtemos, assim, uma equação.

Integrando por partes, duas vêzes, inferimos:

$$\int e^{xa} \operatorname{sen} bx\,dx = -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b}\int e^{ax} \cos bx\,dx$$

$$= -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b^2} e^{ax} \operatorname{sen} bx - \frac{a^2}{b^2}\int e^{ax} \operatorname{sen} bx\,dx,$$

e, resolvendo a equação em relação à integral $\int e^{ax} \operatorname{sen} bx\,dx$,

$$\int e^{ax} \operatorname{sen} bx\,dx = \frac{1}{a^2+b^2} e^{ax}(a \operatorname{sen} bx - b \cos bx).$$

De maneira análoga, deduzimos que

$$\int e^{ax} \cos bx\,dx = \frac{1}{a^2+b^2} e^{ax}(a \cos bx + b \operatorname{sen} bx).$$

3. Fórmulas de recorrência.

Em muitos casos, o integrando é função não sòmente de uma variável independente, mas, também, de um expoente inteiro n e, na integração por partes, obtemos, em lugar do valor da integral, outra expressão semelhante, na qual o expoente n aparece com um valor menor. Chegaremos, assim, após um certo número de aplicações do método, a uma integral que poderá ser resolvida pela tábua de integrais elementares que apresentamos. Êste sistema é denominado *processo de recorrência*. Os exemplos seguintes mostram como, pela repetição da integração por partes, é possível estabelecer o valor das integrais das funções trigonométricas

$$\int \cos^n x\,dx, \int \operatorname{sen}^n x\,dx, \int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\,dx,$$

desde que m e n sejam inteiros. Achamos, assim, que

$$\int \cos^n x\,dx = \cos^{n-1} x \operatorname{sen} x + (n-1)\int \cos^{n-2} x \operatorname{sen}^2 x\,dx;$$

podemos escrever o segundo membro sob a forma

$$\cos^{n-1} x \operatorname{sen} x + (n-1)\int \cos^{n-2} x\,dx - (n-1)\int \cos^n x\,dx,$$

obtendo a relação de recorrência

$$\int \cos^n x\, dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \operatorname{sen} x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x\, dx.$$

Esta fórmula permite-nos prosseguir, diminuindo o expoente do integrando, até chegarmos à integral

$$\int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x \quad \text{ou} \quad \int dx = x,$$

conforme n seja ímpar ou par, respectivamente. Anàlogamente estabeleceremos as fórmulas de recorrência análogas

$$\int \operatorname{sen}^n x\, dx = -\frac{1}{n} \operatorname{sen}^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \operatorname{sen}^{n-2} x\, dx$$

e

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\, dx = \frac{\operatorname{sen}^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int \operatorname{sen}^m x \cos^{n-2} x\, dx.$$

Em particular, estas fórmulas permitem calcular a integral

$$\int \operatorname{sen}^2 x\, dx = \tfrac{1}{2}(x - \operatorname{sen} x \cos x)$$

e

$$\int \cos^2 x\, dx = \tfrac{1}{2}(x + \operatorname{sen} x \cos x),$$

como já fizemos, empregando, porém, o método de substituição (pág. 215).

Diremos, ainda, que as fórmulas integrais correspondentes para as funções hiperbólicas podem ser estabelecidas de maneira exatamente igual.

As seguintes transformações fornecem outras fórmulas de recorrência:

$$\int (\log x)^m\, dx = x(\log x)^m - m \int (\log x)^{m-1} dx,$$

$$\int x^m e^x\, dx = x^m e^x - m \int x^{m-1} e^x\, dx,$$

$$\int x^m \operatorname{sen} x\, dx = -x^m \cos x + m \int x^{m-1} \cos x\, dx,$$

$$\int x^m \cos x\, dx = x^m \operatorname{sen} x - m \int x^{m-1} \operatorname{sen} x\, dx,$$

$$\int x^a (\log x)^m\, dx = \frac{x^{a+1} (\log x)^m}{a+1} - \frac{m}{a+1} \int x^a (\log x)^{m-1}\, dx \quad (a \neq -1).$$

4. Produto de Wallis.

A fórmula de recorrência para a integral $\int \operatorname{sen}^n x\,dx$ conduz, por meio de transformações elementares, à mais notável expressão de π, como um produto infinito. Suporemos que $n > 1$ e introduziremos os limites 0 e $\pi/2$ na fórmula

$$\int \operatorname{sen}^n x\,dx = -\frac{1}{n}\operatorname{sen}^{n-1} x\cos x + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} x\,dx,$$

obtendo

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x\,dx = \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{n-2} x\,dx \quad \text{para } n > 1.$$

Se aplicarmos novamente a fórmula de recorrência ao segundo membro, e continuarmos o processo, teremos, fazendo distinção entre os casos em que $n = 2m$ e $n = 2m + 1$,

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m} x\,dx = \frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{2m-3}{2m-2}\cdots\frac{1}{2}\cdot\int_0^{\pi/2} dx,$$

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m+1} x\,dx = \frac{2m}{2m+1}\cdot\frac{2m-2}{2m-1}\cdots\frac{2}{3}\cdot\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x\,dx,$$

donde

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m} x\,dx = \frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{2m-3}{2m-2}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m+1} x\,dx = \frac{2m}{2m+1}\cdot\frac{2m-2}{2m-1}\cdots\frac{2}{3}.$$

Dividindo, vem

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2.2}{1.3}\cdot\frac{4.4}{3.5}\cdot\frac{6.6}{5.7}\cdots\frac{2m.2m}{(2m-1).(2m+1)}\,\frac{\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m} x\,dx}{\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m+1} x\,dx}.$$

O quociente das duas integrais do segundo membro converge para 1 à medida que m cresce, como podemos deduzir das seguintes considerações. No intervalo $0 < x < \pi/2$ temos

$$0 < \operatorname{sen}^{2m+1} x \leqq \operatorname{sen}^{2m} x \leqq \operatorname{sen}^{2m-1} x;$$

conseqüentemente,

$$0 < \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m+1} x\, dx \leqq \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m} x\, dx \leqq \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m-1} x\, dx.$$

Dividindo-se cada têrmo por $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m+1} x\, dx$, e observando que pela fórmula deduzida acima

$$\frac{\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m-1} x\, dx}{\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m+1} x\, dx} = \frac{2m+1}{2m} = 1 + \frac{1}{2m},$$

teremos $$1 \leqq \frac{\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m} x\, dx}{\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m+1} x\, dx} \leqq 1 + \frac{1}{2m},$$

que demonstra o enunciado.

A relação

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{m\to\infty} \frac{2}{1}\,\frac{2}{3}\,\frac{4}{3}\,\frac{4}{5}\,\frac{6}{5}\,\frac{6}{7} \cdots \frac{2m}{2m-1}\,\frac{2m}{2m+1}$$

está, portanto, verificada.

Esta fórmula do produto (devida a Wallis), com a sua lei simples de formação, proporciona uma relação notável entre o número π e os inteiros. Se observarmos que

$$\lim_{m\to\infty} \frac{2m}{2m+1} = 1, \text{ podemos escrever}$$

$$\lim_{m\to\infty} \frac{2^2 . 4^2 \ldots (2m-2)^2}{3^2 . 5^2 \ldots (2m-1)^2}\, 2m = \frac{\pi}{2},$$

e, se tomarmos a raiz quadrada e multiplicarmos, então, numerador e denominador por $2, 4, \ldots (2m-2)$, acharemos

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \lim_{m\to\infty} \frac{2.4 \ldots (2m-2)}{3.5 \ldots (2m-1)} \sqrt{2m} = \lim_{m\to\infty} \frac{2^2 . 4^2 \ldots (2m-2)^2}{(2m-1)!} \sqrt{2m}$$

$$= \lim_{m\to\infty} \frac{2^2 . 4^2 \ldots (2m)^2}{(2m)!} \frac{\sqrt{2m}}{2m}.$$

Donde deduzimos, finalmente,

$$\lim_{m\to\infty} \frac{(m!)^2\, 2^{2m}}{(2m)!\sqrt{m}} = \sqrt{\pi},$$

para a fórmula do produto de Wallis, fórmula esta que empregaremos mais tarde (capítulo VII, apêndice, pág. 363).

Exemplos

Calcular as integrais dos exemplos 1 até 14.

1. $\int \frac{x\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx.$ 2. $\int \frac{x^7}{(1-x^4)^2}\,dx.$ 3. $\int x^2\cos x\,dx.$

4. $\int x^3 e^{-x^2}\,dx.$ 5. $\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos nx\,dx$ (n sendo inteiro e positivo).

6. $\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \operatorname{sen} nx\,dx$ (n sendo inteiro e positivo). 7. $\int x^3\cos x^2\,dx.$

8. $\int \operatorname{sen}^4 x\,dx.$ 9. $\int \cos^6 x\,dx.$ 10. $\int x^4\sqrt{1-x^2}\,dx.$

11. $\int x^2 e^x\,dx.$ 12. $\int \frac{\log x}{x^n}\,dx$ $(n \neq 1).$

13. $\int x^m \log x\,dx$ $(m \neq 1).$ 14. $\int x^2(\log x)^2\,dx.$

15. Demonstrar a fórmula

$$\int e^x p(x)\,dx = e^x[p(x) - p'(x) + p''(x) - + \ldots],$$

onde $p(x)$ representa um polinômio qualquer.

16. Mostrar que, para todos os valores ímpares e positivos de n, pode-se calcular a integral $\int e^{-x^2}x^n\,dx$ em relação a funções elementares.

17. Demonstrar que, se n fôr par, a integral $\int e^{-x^2}x^n\,dx$ pode ser avaliada por intermédio de funções elementares e da integral $\int e^{-x^2}\,dx$ (da qual existem tábuas calculadas).

18. Demonstrar que

$$\int_0^x \left[\int_0^u f(t)\,dt\right] du = \int_0^x f(u)(x-u)\,du.$$

19.* O exemplo anterior (18), dá uma fórmula para a segunda integral repetida. Demonstrar que a integral repetida de ordem n de $f(x)$ é dada por

$$\frac{1}{(n-1)!}\int_0^x f(u)(x-u)^{n-1}\,du.$$

5. Integração de funções racionais

A classe geral mais importante de funções integráveis por intermédio de funções elementares, consiste nas funções racionais

$$R(x) = \frac{f(x)}{g(x)},$$

onde $f(x)$ e $g(x)$ são polinômios:

$$f(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_0,$$
$$g(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_0 \ (b_n \neq 0).$$

Cada polinômio pode ser integrado imediatamente, e a integral do mesmo é, também, um polinômio. Portanto, devemos estudar, apenas, as funções racionais cujo denominador não é constante. Além disso, podemos sempre admitir que o grau do numerador (n) é menor do que o do denominador, pois no caso contrário poderemos dividir os polinômios $f(x)$ por $g(x)$, obtendo um resto de grau inferior a n. Em outras palavras, podemos escrever $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$, onde $q(x)$ e $r(x)$ são também polinômios, e $r(x)$ é de grau menor do que n. A integração de $\frac{f(x)}{g(x)}$ é, então, reduzida à integração do polinômio $q(x)$ e da fração "própria" $\frac{r(x)}{g(x)}$. Posteriormente, mostraremos que a fração $\frac{g(x)}{f(x)}$ pode ser representada como a soma das funções $\frac{a_\nu x^\nu}{g(x)}$, de sorte que estudaremos apenas os integrantes da forma $\frac{x^\nu}{g(x)}$.

1. Tipos fundamentais.

Não procederemos, de imediato, à integração da função racional mais geral do tipo acima, mas consideraremos, apenas, aquelas cujos denominadores $g(x)$ são de forma particularmente simples, a saber,

$$g(x) = x, \quad g(x) = 1 + x^2,$$

ou, mais geralmente,

$$g(x) = x^n, \quad g(x) = (1 + x^2)^n$$

onde n é um inteiro positivo qualquer.

A êste caso podemos reduzir o mais geral, em que $g(x) = (\alpha x + \beta)^n$, ou seja, é uma expressão linear $\alpha x + \beta$ $(\alpha \neq 0)$, ou $g(x) = (ax^2 + 2bx + c)^n$, uma potência de uma expressão quadrática definida [1]. No primeiro caso, introduziremos uma nova variável, $\xi = \alpha x + \beta$. Teremos $d\xi/dx = \alpha$ e $x = (\xi - \beta)/\alpha$ que são, também, funções lineares de ξ. Cada numerador $f(x)$ torna-se um polinômio $\phi(\xi)$ do mesmo grau, e, conseqüentemente,

$$\int \frac{f(x)}{(\alpha x + \beta)^n}\, dx = \frac{1}{\alpha} \int \frac{\phi(\xi)}{\xi^n}\, d\xi.$$

No segundo caso, escreveremos

$$ax^2 + 2bx + c = \frac{1}{a}(ax + b)^2 + \frac{d^2}{a} \qquad (d^2 = ac - b^2,\ d > 0),$$

observando que, desde que admitamos ser a expressão definida, $ac - b^2$ deve ser positivo e $a \neq 0$. Introduzindo a nova variável

$$\xi = \frac{ax + b}{d}$$

chegaremos a um integrando com o denominador $\left[\dfrac{d^2}{a}(1 + \xi^2)\right]^n$.

Logo, para integrar funções racionais, cujos denominadores sejam potências de expressões lineares, ou quadráticas definidas, é suficiente que sejamos capazes de integrar os seguintes tipos de funções:

$$\frac{1}{x^n},\ \frac{x^{2\nu}}{(x^2 + 1)^n},\ \frac{x^{2\nu+1}}{(x^2 + 1)^n}.$$

Veremos que, mesmo êstes tipos, na realidade, não precisam ser tratados em geral, visto podermos reduzir a integração das funções racionais à integração de formas muito especiais destas três funções, fazendo $\nu = 0$. Consideremos, pois, a integração das três expressões

$$\frac{1}{x^n},\ \frac{1}{(x^2 + 1)^n},\ \frac{x}{(x^2 + 1)^n}.$$

(1) Uma expressão quadrática $Q(x) = ax^2 + 2bx + c$ é *definida*, quando, para qualquer valor real de x, receber valores que tenham um só e mesmo sinal, isto é, se a equação $Q(x) = 0$ não tiver raízes reais. Para tanto é necessário e suficiente que $ac - b^2$ seja positivo.

2. Integração dos tipos fundamentais.

A integração do primeiro tipo de função $\frac{1}{x^n}$ conduz, imediatamente, à expressão $\log|x|$ se $n = 1$ e $-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$, se $n > 1$, isto é, funções elementares em ambos os casos, para a integral. As funções do terceiro tipo podem ser integradas, em seguida, introduzindo-se a nova variável $\xi = x^2 + 1$, donde se obtém $2x\,dx = d\xi$ e

$$\int \frac{x}{(x^2+1)^n}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{d\xi}{\xi^n} = \begin{cases} \frac{1}{2}\log(x^2+1) & \text{se } n = 1, \\ -\frac{1}{2(n-1)(x^2+1)^{n-1}} & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

Finalmente, para se calcular a integral

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+1)^n},$$

em que n tem um valor qualquer superior a **1**, emprega-se o método de recorrência. Se fizermos

$$\frac{1}{(x^2+1)^n} = \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}} - \frac{x^2}{(x^2+1)^n},$$

de modo que

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^n} = \int \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}} - \int \frac{x^2\,dx}{(x^2+1)^n},$$

podemos transformar o segundo membro integrando-o por partes, usando a fórmula da pág. 218:

$$f(x) = x, \quad g'(x) = \frac{x}{(x^2+1)^n}.$$

Teremos, então, como já havíamos encontrado,

$$g(x) = -\frac{1}{2}\frac{1}{(n-1)(x^2+1)^{n-1}},$$

e, portanto, obteremos

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+1)^n} = \frac{x}{2(n-1)(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)}\int \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}}.$$

O cálculo da integral I_n é, então, reduzido ao da integral I_{n-1}. Se $n - 1 > 1$ aplicaremos o mesmo processo à última integral, e prosseguiremos no seu emprêgo até chegarmos, finalmente, à expressão

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)} = \text{arc tg } x.$$

Vemos, então, que a integral I_n [1] pode ser representada implìcitamente por funções racionais e pela função arc tg x.

Poderíamos, incidentalmente, ter integrado a função $\frac{1}{(x^2+1)^n}$, diretamente, substituindo x por $x = \operatorname{tg} t$. Teríamos, pois, $dx = \sec^2 t\, dt$ e $1/(1+x^2) = \cos^2 t$, de modo que

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^n} = \int \cos^{2n-2} t\, dt,$$

sabendo, já, como calcular esta integral (pág. 222).

3. Frações parciais.

Podemos, agora, estudar a integração das funções racionais mais gerais, visto tais funções poderem ser consideradas como a soma das chamadas *frações parciais*, isto é, a soma de um polinômio com um número finito de funções racionais, cada qual com uma potência de expressão linear para denominador e uma constante para numerador, ou, então, uma potência de uma expressão quadrática definida para denominador e uma função linear para numerador. Se o grau do numerador $f(x)$ fôr menor do que o do denominador $g(x)$, não há polinômio. Estamos, portanto, aptos para calcular cada fração parcial, visto o denominador poder ser reduzido às formas especiais x^n ou $(x^2+1)^u$ (pág. 226), dando frações que representam combinações dos tipos fundamentais já integrados (pág. 228).

Não apresentaremos uma demonstração geral da possibilidade da decomposição em frações parciais. Pelo contrário, nos contentaremos em enunciar o teorema de maneira inteligível ao leitor, mostrando, por meio de exemplos, como a decomposição em funções parciais pode ser realizada em casos típicos. Na prática, sòmente se opera sôbre funções relativamente simples, dada a excessiva complicação que atingiriam os cálculos, caso fôssem consideradas funções mais complexas.

[1] A integral da função $\frac{1}{(x^2-1)^n}$ pode ser calculada do mesmo modo, visto que, pelo método de recorrência, podemos reduzi-la à integral

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{Arc\,Th} x \text{ (ou } \operatorname{Arc\,Coth} x).$$

Como sabemos pela álgebra elementar, qualquer polinômio $g(x)$ pode ser escrito sob a forma

$$g(x) = a(x-\alpha_1)^{l_1}(x-\alpha_2)^{l_2}\ldots(x^2+2b_1x+c_1)^{r_1}(x^2+2b_2x+c_2)^{r_2}\ldots$$

As quantidades $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ são as raízes reais e distintas da equação $g(x) = 0$, enquanto $l_1, l_2, \ldots$, que são inteiros e positivos, indicam quantas vêzes as mesmas são repetidas. Os fatôres $x^2 + 2b_\nu x + c_\nu$ representam expressões quadráticas definidas, das quais duas nunca são iguais, com raízes complexas conjugadas, indicando os números $r_1, r_2, \ldots$, quantas vêzes as mesmas são repetidas.

Suponhamos que o denominador é dado sob esta forma, ou que o reduzimos à mesma mediante o cálculo das suas raízes reais e imaginárias. Admitamos, além disso, que o numerador $f(x)$ é de grau menor do que o denominador (pág. 226). O teorema da decomposição em frações parciais pode, então, ser enunciado como segue. É sempre possível determinar uma expressão da forma

$$\frac{A_1}{(x-\alpha)}+\frac{A_2}{(x-\alpha)^2}+\ldots+\frac{A_l}{(x-\alpha)^l},$$

para cada um dos fatôres $(x-\alpha)^l$, onde α é qualquer uma das raízes reais e l o número de vêzes que ela é repetida, ou

$$\frac{B_1+C_1x}{Q}+\frac{B^2+Cx^2}{Q^2}+\ldots+\frac{B_r+C_rx}{Q^r},$$

para cada um dos fatôres quadráticos $Q(x) = x^2 + 2bx + c$, do produto elevado à potência r, de forma que $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ seja a soma de tôdas estas expressões. Em outras palavras, o quociente $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ pode ser representado por uma soma de frações, cada uma das quais pertence a um ou outro tipos dos já integrados na pág. 228 [1].

[1] Damos, a seguir, um breve apanhado do método pelo qual se demonstra a possibilidade da decomposição em frações parciais. Se $g(x) = (x-\alpha)^k h(x)$ e $h(\alpha \neq 0$, o segundo membro da equação

$$\frac{f(x)}{y(x)}-\frac{f(\alpha)}{h(\alpha)\,(x-\alpha)^k}=\frac{1}{h(\alpha)}\frac{f(x)h(\alpha)-f(\alpha)h(x)}{(x-\alpha)^k\,h(x)}$$

terá o numerador nulo para $x = \alpha$, como é claro. Ele será, pois, da forma $h(\alpha)\,(x-\alpha)_m f_1(x)$, onde

Em casos particulares, a decomposição em frações parciais pode ser feita, fàcilmente, pela simples observação. Se, por exemplo, $g(x) = x^2 - 1$, vemos, desde logo, que

$$\int \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{x+1},$$

de tal modo que

$$\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right|.$$

Mais geralmente, se $g(x) = (x-\alpha)(x-\beta)$, isto é, se $g(x)$ não fôr uma expressão quadrática definida com dois zeros reais, α e β, teremos

$$\frac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)} = \frac{1}{\alpha-\beta}\frac{1}{x-\alpha} - \frac{1}{\alpha-\beta}\frac{1}{x-\beta}$$

de forma que

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)(x-\beta)} = \frac{1}{\alpha-\beta}\log\left|\frac{x-\alpha}{x-\beta}\right|.$$

4. Exemplo. Reação bimolecular.

Um exemplo simples da aplicação desta fácil redução a frações parciais é proporcionado pela chamada reação bimolecular. Suponhamos que dispomos de dois reagentes cujas concentrações originais, em moléculas-grama, por unidade de volume, são a e b, sendo, por hipótese, $a < b$. Suponhamos, ainda, que no tempo t forma-se uma quantidade x (moléculas-grama) do produto da reação, por unidade de volume. De acôrdo com a lei da ação das massas (pág. 182), no caso mais simples — reação entre uma molécula de cada reagente — a razão do acréscimo da quantidade x é fornecida pela equação $\dfrac{dx}{dt} = k(a-x)(b-x)$. O problema consiste, então, em determinar a função $x(t)$. Se, inversamente, considerarmos o tempo t como função de x, teremos

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{k(a-x)(b-x)} = \frac{1}{k(b-a)}\left(\frac{1}{a-x} - \frac{1}{b-x}\right);$$

que dá por integração,

$$kt = \frac{1}{a-b}\log\frac{a-x}{b-x} + c, \text{ para } x < a < b.$$

$f_1(x)$ é, também, um polinômio, a quantidade inteira $m \geqq 1$, e $f_1(\alpha) \neq 0$. Escrevendo $\dfrac{f(\alpha)}{h(\alpha)} = \beta$, virá

$$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{\beta}{(x-\alpha)^k} = \frac{f_1(x)}{(x-\alpha)^{k-m}\,h(x)}.$$

Repetindo o processo, iremos diminuindo o grau do expoente de $(x-\alpha)$ que ocorre no denominador, até eliminá-lo. Repetiremos o processo em relação à fração restante, para alguma outra raiz de $g(x)$, e o faremos tantas vêzes quantos fatôres distintos existirem em $g(x)$. Realizando-o, não sòmente para as raízes reais, mas igualmente para as complexas, chegaremos, eventualmente, à decomposição completa em frações parciais.

Determina-se a constante de integração c, sabendo-se que no tempo $t = 0$ não há produto algum da reação formado, de sorte que

$$\frac{1}{a-b}\log\frac{a}{b} + c = 0.$$

Obtemos, finalmente,

$$kt = \frac{1}{a-b}\log\frac{1-\frac{x}{a}}{1-\frac{x}{b}},$$

e se resolvermos a equação em relação a x, teremos a função procurada $x(t)$:

$$x = \frac{ab(1-e^{(a-b)kt})}{b-ae^{(a-b)kt}}.$$

5. Outros exemplos de decomposição em frações parciais. Método dos coeficientes indeterminados.

Se $g(x) = (x-a_1)(x-a_2)(\ldots(x-a_n)$, onde $a_i \neq a_k$ se $i \neq k$, isto é, se a equação $g(x) = 0$ tiver ùnicamente raízes simples reais, poderemos representar a expressão, valendo-nos das frações parciais, do seguinte modo

$$\frac{1}{g(x)} = \frac{a_1}{x-\alpha_1} + \frac{a_2}{x-\alpha_2} + \ldots + \frac{a_n}{x-\alpha_n}.$$

Se multiplicarmos ambos os membros por $(x-\alpha_1)$, cancelando êste fator comum ao numerador e denominador do primeiro membro e do primeiro têrmo do segundo membro, fazendo, então, $x = \alpha_1$, obteremos expressões explícitas para valor dos coeficientes a_1, $a_2, \ldots$, que assumirão a forma [1]

$$a_1 = \frac{1}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)\ldots(\alpha_1-\alpha_n)}.$$

Como exemplo característico do denominador $g(x)$ com raízes múltiplas, estudemos a função $\frac{1}{x^2(x-1)}$. A relação preliminar

$$\frac{1}{x^2(x-1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^3}$$

em concordância com o exposto na pág. 230, leva-nos ao resultado que procuramos. Se multiplicarmos os dois membros desta equação por $x^2(x-1)$ chegaremos à expressão

$$1 = (a+b)x^2 - (b-c)x - c,$$

[1] O leitor deve observar que o denominador do segundo membro é $g'(\alpha_1)$, isto é, a derivada da função $g(x)$ no ponto $x=\alpha_1$.

verdadeira para todos os valores de x e por meio da qual determinaremos os coeficientes a, b, c. Tal condição, porém, não pode ter lugar, a menos que todos os coeficientes do polinômio $(a + b)x^2 - (b - c)x - c - 1$ sejam iguais a zero, isto é, devemos ter $a + b = b - c = c + 1 = 0$, ou $c = -1$, $b = -1$ e $a = 1$. Logramos, assim, a decomposição

$$\frac{1}{x^2(x-1)} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2},$$

e, por conseqüência,

$$\int \frac{dx}{x^2(x-1)} = \log|x-1| - \log|x| + \frac{1}{x}.$$

Decomporemos, agora, a função $\frac{1}{x(x^2+1)}$ (que é um exemplo do caso em que os zeros do denominador são complexos) de acôrdo com a equação

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1}.$$

Teremos, para os coeficientes, $a + b = c = a - 1 = 0$, de modo que

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1},$$

e, conseqüentemente,

$$\int \frac{dx}{x(x^2+1)} = \log|x| - \frac{1}{2}\log(x^2+1).$$

Como terceiro exemplo, vejamos a função $\frac{1}{x^4+1}$ (o próprio Leibnitz a considerou uma integração trabalhosa.) Podemos representar o denominador como o produto de dois fatôres quadráticos:

$$x^4 + 1 = (x^2+1)^2 - 2x^2 = (x^2 + 1 + \sqrt{2x})(x^2 + 1 - \sqrt{2x}).$$

Sabemos, portanto, que a decomposição em frações parciais assumirá a forma

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{ax+b}{x^2+\sqrt{2x}+1} + \frac{cx+d}{x^2-\sqrt{2x}+1}.$$

Para a determinação dos coeficientes a, b, c, dispomos da relação

$$(a+c)x^3 + (b + d - a\sqrt{2} + c\sqrt{2})x^2 + (a + c - b\sqrt{2} + d\sqrt{2})x \\ + (b + d - 1) = 0,$$

que é satisfeita pelos seguintes valores:

$$a = \frac{1}{2\sqrt{2}},\ b = \frac{1}{2},\ c = -\frac{1}{2\sqrt{2}},\ d = \frac{1}{2}.$$

Teremos, assim,

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2x}+1} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2x}+1},$$

e, aplicando o método que apresentamos na pág. 227, obteremos

$$\int \frac{dx}{x^4+1} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \log | x^2 + \sqrt{2}x + 1 | - \frac{1}{4\sqrt{2}} \log | x^2 - \sqrt{2}x + 1 |$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg} (\sqrt{2}x + 1) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg} (\sqrt{2}x - 1),$$

que pode ser fàcilmente verificada por derivação.

EXEMPLOS

Integrar:

1. $\int \frac{dx}{2x - 3x^2}$.
2. $\int \frac{dx}{x^2 - x}$.
3. $\int \frac{3\,dx}{x(x+1)^3}$.
4. $\int \frac{x^2 + x + 1}{3x^2 - 2x - 5}\,dx$.
5. $\int \frac{dx}{(x-1)^2(x^2+1)}$.
6. $\int \frac{x^2\,dx}{(x-1)^2(x^2+1)}$.
7. $\int \frac{dx}{1 - x^3}$.
8. $\int \frac{dx}{1 + x^3}$.
9. $\int \frac{(x-4)}{(x^2+1)(x-2)}\,dx$.
10. $\int \frac{x+4}{(x^2-1)(x+2)}\,dx$.
11. $\int \frac{x^6}{1 - x^4}\,dx$.
12.* $\int \frac{dx}{x^6 + 1}$.
13. $\int \frac{x^2}{x^4 + x^2 - 2}\,dx$.
14. $\int \frac{dx}{x^2(x^2+1)^2}$.

6. INTEGRAÇÃO DE OUTRAS CLASSES DE FUNÇÕES

1. Observações preliminares sôbre a representação racional das funções trigonométricas e hiperbólicas.

A integração de algumas outras classes gerais de funções pode ser reduzida à integração das funções racionais. Estaremos mais bem habilitados a compreender esta redução, se estabelecermos, inicialmente, certos fatos elementares relativos às funções trigonométricas e hiperbólicas. Se fizermos $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, a trigonometria elementar dá as seguintes fórmulas simples

$$\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2};$$

visto que $$\frac{1}{1+t^2} = \cos^2\frac{x}{2} \quad \text{e} \quad \frac{t^2}{1+t^2} = \operatorname{sen}^2\frac{x}{2},$$

e, partindo das fórmulas elementares,

$$\operatorname{sen} x = 2\cos^2\frac{x}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2} \quad \text{e} \quad \cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{x}{2}$$

obtemos as expressões acima estabelecidas. Estas equações mostram que $\operatorname{sen} x$ *e* $\cos x$ *podem ser expressos, racionalmente, em função da quantidade* $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Derivando $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, temos

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2\cos^2 x/2} = \frac{1+t^2}{2}, \text{ de sorte que } \frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2};$$

portanto, a derivada $\frac{dx}{dt}$ é, também, uma expressão racional em t.

A representação e o significado geométrico das fórmulas encontradas estão indicados na figura 2. O círculo $u^2 + v^2 = 1$ está contido no plano uv. Se representarmos por x o ângulo POT da figura, $u = \cos x$ e $v = \operatorname{sen} x$. O ângulo OSP, com vértice no ponto $u = -1$, $v = 0$, é igual a $x/2$, devido a um teorema da geometria elementar, sendo possível deduzir da figura a significação geométrica do parâmetro t, pois $t = \operatorname{tg} \frac{1}{2}x = OR$. Se o ponto P se deslocar, partindo de S, e girar uma vez em tôrno do círculo, na direção positiva, isto é, se x percorrer o intervalo de $-\pi$ a $+\pi$, a quantidade t percorrerá tôda a série de valores compreendidos entre $-\infty$ e $+\infty$, exatamente uma vez.

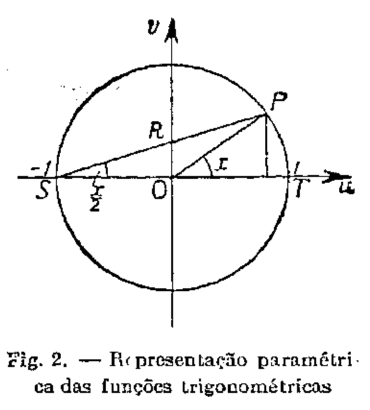


Fig. 2. — Representação paramétrica das funções trigonométricas

As funções hiperbólicas $\operatorname{Ch} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ e $\operatorname{Sh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ podem, de maneira correspondente, ser expressas como funções racionais de uma terceira quantidade. O caminho mais simples é fazer-se $e^x = \tau$, de sorte que teremos

$$\operatorname{Ch} x = \frac{1}{2}\left(\tau + \frac{1}{\tau}\right), \quad \operatorname{Sh} x = \frac{1}{2}\left(\tau - \frac{1}{\tau}\right),$$

expressões racionais do $\operatorname{Sh} x$ e do $\operatorname{Ch} x$. Nestas fórmulas, também, $dx/dt = 1/\tau$ é racional em τ. Obteremos, porém, analogia mais perfeita

com as funções trigonométricas, introduzindo a quantidade $t = \operatorname{Th}\frac{x}{2}$. Chegaremos, então, às fórmulas

$$\operatorname{Sh} x = \frac{2t}{1-t^2}, \quad \operatorname{Ch} x = \frac{1+t^2}{1-t^2}.$$

Derivando $t = \operatorname{Th}\frac{x}{2}$ obteremos, como na pág. 235, a expressão racional

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2}{1-t^2}$$

para a derivada dx/dt. Novamente, a quantidade t é suscetível de interpretação geométrica semelhante à que lhe atribuímos no caso das funções trigonométricas, como vemos, imediatamente, observando a figura **3.**

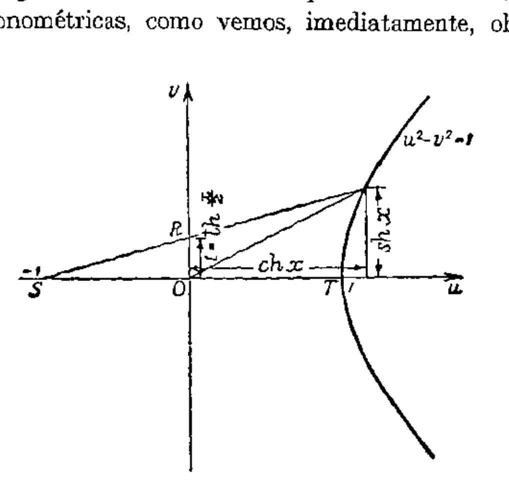


Fig. 3. — Representação paramétrica das funções hiperbólicas

No caso, porém, das funções trigonométricas, t deve assumir tôda a seqüência de valores compreendidos entre $-\infty$ e $+\infty$, para dar todos os pares de valores de $\cos x$ e $\operatorname{sen} x$, ao passo que, no caso das funções hiperbólicas, t é limitado ao intervalo $-1 < t < 1$.

Feitas estas observações preliminares, passaremos ao problema da integração.

2. **Integração de $R(\cos x, \operatorname{sen} x)$.**

Seja R $(\cos x, \operatorname{sen} x)$ uma expressão racional em $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$,

isto é, uma expressão que se forma racionalmente destas duas funções e constantes, de sorte que

$$\frac{3\,\mathrm{sen}^2 x + \cos x}{3\cos^2 x + \mathrm{sen}\, x}.$$

Se aplicarmos a substituição $t = \mathrm{tg}\,\frac{x}{2}$, a integral

$$\int R(\cos x,\ \mathrm{sen}\, x)dx$$

será transformada em

$$R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt,$$

com uma função racional de t sob o sinal de integral. Desta maneira resolvemos teòricamente o problema proposto, isto é, achamos a integral da função dada, visto podermos resolvê-la, integrando-a de acôrdo com os métodos expostos nas seções precedentes.

3. Integração de $R(\mathrm{Ch}\, x,\ \mathrm{Sh}\, x)$.

Do mesmo modo, se $R(\mathrm{Ch}\, x,\ \mathrm{Sh}\, x)$ fôr uma expressão racional em função das funções hiperbólicas $\mathrm{Ch}\, x$ e $\mathrm{Sh}\, x$, podemos efetuar a integração substituindo $t = \mathrm{Th}\,\frac{x}{2}$. Lembrando que

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2}{1-t^2}$$

teremos

$$\int R(\mathrm{Ch}\, x,\ \mathrm{Sh}\, x)dx = \int R\left(\frac{1+t^2}{1-t^2}, \frac{2t}{1-t^2}\right)\frac{2}{1-t^2}dt.$$

(De acôrdo com uma observação anterior, podíamos, também, ter introduzido $\tau = e^x$ como nova variável, exprimindo $\mathrm{Ch}\, x$ e $\mathrm{Sh}\, x$ em função de τ.) A integração fica, portanto, reduzida, mais uma vez, à das funções racionais.

4. Integração de $R(x, \sqrt{1-x^2})$.

A integral $\int R(x, \sqrt{1-x^2})$ pode ser reduzida ao tipo estudado no n.º 2 (pág. 236), empregando-se a substituição

$$x = \cos u,\ \sqrt{1-x^2} = \mathrm{sen}\, u,\ dx = -\mathrm{sen}\, u\, du;$$

partindo dêste ponto, a transformação $t = \operatorname{tg} \frac{2}{x}$ leva-nos à integração de uma função racional. Poderíamos, neste caso, ter efetuado a redução de uma só vez, em lugar de duas, empregando a fórmula de substituição

$$t = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}};\ x = \frac{1-t^2}{1+t^2};\ \sqrt{1-x^2} = \frac{2t}{1+t^2};$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{-4t}{(1+t^2)^2};$$

ou seja, poderíamos ter introduzido $t = \operatorname{tg} \frac{u}{2}$ diretamente, como nova variável, obtendo, desde logo, uma função racional para integrar.

5. **Integração de $R(x, \sqrt{x^2-1})$.**

A integral $\int R(x, \sqrt{x^2-1})\, dx$ será transformada no tipo tratado no N.º 3 (pág. 237), substituindo-se $x = \operatorname{Ch} u$. Observemos, entretanto, que, neste caso, também podemos atingir o nosso objetivo imediatamente, introduzindo

$$t = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = \operatorname{Th} \frac{2}{u}.$$

6. **Integração de $R(x, \sqrt{x^2+1})$.**

A integral $\int R(x, \sqrt{x^2+1})\, dx$ é reduzida pela transformação $x = \operatorname{Sh} u$, ao tipo apresentado no N.º 3 (pág. 237), podendo, pois, ser integrada em têrmos de funções elementares. Em vez de empregarmos a substituição $e^u = \tau$ ou $\operatorname{Th} \frac{u}{2} = t$ e depois reduzirmos o problema proposto à integral de funções racionais, poderíamos ter obtido a integral das funções racionais de um só passo, utilizando qualquer das substituições

$$\tau = x + \sqrt{x^2+1}, \quad t = \frac{-1+\sqrt{x^2+1}}{x}.$$

7. **Integração de $R(x, \sqrt{ax^2+2bx+c})$.**

A integral $\int R(x, \sqrt{ax^2+2bx+c})\, dx$ de uma expressão racional

em x e da raiz quadrada de um polinômio qualquer em x, do segundo grau, pode ser imediatamente reduzida a um dos tipos já estudados. Podemos escrever (pág. 227)

$$ax^2 + 2bx + c = \frac{1}{a}(ax+b)^2 + \frac{ac-b^2}{a}.$$

Se $ac - b^2 > 0$, introduziremos a nova variável ξ, por meio da transformação $\xi = \dfrac{ax+b}{\sqrt{ac-b^2}}$ em virtude da qual o radical assume a forma $\sqrt{\dfrac{ac-b^2}{a}(\xi^2+1)}$. Portanto, a integral proposta, quando expressa em têrmos de ξ, é do tipo do N.º 6. A constante a deve, neste caso, ser positiva, para que a raiz quadrada possa admitir valores reais.

Se $ac - b^2 = 0$, $a > 0$, vemos pela fórmula

$$\sqrt{ax^2 + 2bx + c} = \sqrt{a}\left(x + \frac{b}{a}\right)$$

que o integrando é racional em x desde o início.

Se, finalmente, $ac - b^2 < 0$, faremos $\xi = \dfrac{ax+b}{\sqrt{b^2-ac}}$ obtendo a expressão $\sqrt{\dfrac{b^2-ac}{a}(\xi^2-1)}$ para o radical. Quando a fôr positivo, a integral será reduzida ao tipo do N.º 5 (pág. 238), ao passo que, quando a fôr negativo, escreveremos o radical sob a forma $\sqrt{\dfrac{b^2-ac}{a}}\sqrt{1-\xi^2}$, reduzindo a integral ao tipo do N.º 4 (pág. 237).

8. Outros exemplos de redução a integrais de funções racionais.

Dos outros tipos de funções que podem ser integrados pela redução a funções racionais, mencionaremos apenas dois: (1) expressões racionais contendo dois radicais diferentes das expressões lineares, $R(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{\alpha x+\beta})$; (2) expressões da forma $R\left(x, \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{\alpha x+\beta}}\right)$, onde a, b, α e β são constantes. No primeiro caso introduziremos a nova variável $\xi = \sqrt{\alpha x + \beta}$, de sorte que $\alpha x + \beta = \xi^2$, e, conseqüentemente,

$$x = \frac{\alpha}{\xi^2 - \beta} \quad \text{e} \quad \frac{dx}{d\xi} = \frac{2\xi}{\alpha};$$

então, $\int R(x,\ \sqrt{ax+b},\ \sqrt{\alpha x+\beta})dx =$

$$= \int R\left(\frac{\xi^2-\beta}{\alpha},\ \sqrt{\frac{1}{\alpha}[a\xi^2-(a\beta-b\alpha)]},\ \xi\right)\frac{2\xi}{\alpha}d\xi,$$

que é do tipo já estudado no n.º 7 (pág. 238).

Se, no segundo caso, introduzirmos a variável

$$\xi = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{\alpha x+\beta}},$$

teremos

$$\xi^n = \frac{ax+b}{\alpha x+\beta}, \quad x = \frac{-\beta\xi^n+b}{\alpha\xi^n-a}, \quad \frac{dx}{d\xi} = \frac{a\beta-b\alpha}{(\alpha\xi^n-a)^2}\cdot n\xi^{n-1},$$

chegando, imediatamente, à fórmula

$$\int R\left(x,\ \sqrt[n]{\frac{ax+b}{\alpha x+\beta}}\right)dx$$
$$= \int R\left(\frac{-\beta\xi^n+b}{\alpha\xi^n-a},\ \xi\right)\frac{\alpha\beta-b\alpha}{(\alpha\xi^n-a)^2}n\xi^{n-1}d\xi,$$

que é a integral de uma função racional.

9. Observações sôbre os exemplos.

As discussões que precederam apresentam interêsse puramente teórico, pois a realização dos cálculos efetivos, no caso de expressões complicadas, é extremamente laboriosa. É, portanto, aconselhável fazer uso, sempre que possível, da forma especial do integrando, para simplificar o trabalho. Por exemplo, para integrar a expressão $\dfrac{1}{a^2\text{sen}^2x+b^2\cos^2x}$ é preferível empregar-se a substituição $t = \text{tg}\, x$, em vez da apresentada na pág. 237, visto sen^2x e $\cos^2x$ poderem ser expressos como funções racionais de $\text{tg}\, x$, evitando-se, assim, voltar à expressão $t = \text{tg}\,\dfrac{x}{2}$. O mesmo vale para qualquer expressão formada racionalmente [1] de sen^2x, $\cos^2x$ e $\text{sen}\, x\cos x$. Ademais, para o cálculo de muitas integrais, é preferível a forma trigonométrica à racional, desde que a primeira possa ser avaliada por um processo simples de recorrência.

[1] Visto $\text{sen}\, x\cos x = \text{tg}\, x\cos^2 x$ poder ser expresso, racionalmente, em função de $\text{tg}\, x$.

Por exemplo, embora o integrando da expressão $\int x^n(\sqrt{1-x^2})^m dx$ possa ser reduzido a forma racional, é mais simples fazer-se $x = \operatorname{sen} u$, transformando-o em $\int \operatorname{sen}^n u \cos^{m+1} u\, du$, já que esta fórmula pode ser fàcilmente tratada pelo método de recorrência da pág. 222 (ou, empregando os teoremas da adição, reduzir as potências dos senos e co-senos a senos e co-senos de ângulos múltiplos).

Para calcular a integral

$$\int \frac{dx}{a \cos x + b \operatorname{sen} x} \quad (a^2 + b^2 > 0),$$

em lugar de aplicar a teoria geral, pode-se determinar uma quantidade A e um ângulo θ, de sorte que

$$a = A \operatorname{sen} \theta, \quad b = A \cos \theta;$$

isto é, podemos escrever

$$A = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \operatorname{sen} \theta = \frac{a}{A}, \quad \cos \theta = \frac{b}{A}.$$

A integral assume, então, a forma

$$\frac{1}{A} \int \frac{dx}{\operatorname{sen}(x + \theta)},$$

e introduzindo a nova variável $x + \theta$ verificaremos (pág. 215) que o valor da integral é

$$\frac{1}{A} \log \left| \operatorname{tg} \frac{x + \theta}{2} \right|.$$

Exemplos

Integrar:

1. $\int \frac{dx}{1 + \operatorname{sen} x}$.
2. $\int \frac{dx}{1 + \cos x}$.
3. $\int \frac{dx}{2 + \operatorname{sen} x}$.
4. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^3 x}$.
5. $\int \frac{dx}{\cos x}$.
6. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3 + \cos x}$.
7. $\int \frac{dx}{1 + \cos^2 x}$.
8. $\int \frac{dx}{3 + \operatorname{sen}^2 x}$.
9. $\int \operatorname{tg}^3 x\, dx$.
10. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x + \cos x}$.
11. $\int \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^3 x}{3 \cos^2 x + \operatorname{sen}^4 x} \operatorname{sen} x\, dx$.
12. $\int \sqrt{(x^2 - 4)}\, dx$.

13. $\int \sqrt{(4 + 9x^2)\,dx}.$

14. $\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x^2 - 4x + 3}}.$

15. $\int x\sqrt{(x^2 + 4x)\,dx}.$

16. $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt{1-x}}.$

17. $\int \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}\,dx.$

18. $\int \frac{\sqrt{x-a}}{1 + \sqrt{x-a+1}}\,dx.$

19. $\int \frac{dx}{\sqrt{x-a} + \sqrt{x-b}}.$

7. OBSERVAÇÕES SÔBRE AS FUNÇÕES NÃO INTEGRÁVEIS PELAS FUNÇÕES ELEMENTARES

1. Definição de funções por meio de integrais. Integrais elípticas.

Com os exemplos apresentados dos tipos de funções integráveis pela redução a funções racionais, esgotamos, pràticamente, a lista das funções que podem ser integradas por meio das funções elementares. As tentativas feitas para exprimir integrais gerais, tais como

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n}}, \quad \int \sqrt{(a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n}\,dx$$

ou $\int \frac{e^x}{x}\,dx$ por meio de funções elementares, falharam sempre e, no século XIX, foi finalmente provado ser de fato impossível realizar tal desiderato.

Se, portanto, o objetivo do cálculo integral fôsse o de integrar funções referidas, ùnicamente, às funções elementares, teríamos chegado, decididamente, a um ponto derradeiro. Tal finalidade, entretanto, tão restrita, não tem justificativa intrínseca, sendo, ao contrário, de natureza um tanto artificial. Sabemos que qualquer função contínua possui integral, sendo a própria integral uma função contínua do limite superior, não indicando êste fato coisa alguma sôbre a possibilidade da integral poder, ou não, ser representada por funções elementares. Os aspectos característicos das funções elementares são baseados na facilidade com que são reconhecidas, na sua aplicação aos problemas numéricos, aplicação simplificada, muitas vêzes, por tábuas convenientes ou, como no caso das funções racionais, pela simplicidade com que podem ser calculadas com o grau de precisão desejado.

No caso em que a integral de uma função não possa ser representada por meio de funções com as quais já estejamos familiarizados, nada nos impede de considerarmos tal integral como uma função "superior" em análise, o que equivale, apenas, a atribuir-lhe uma designação própria. Se a introdução desta nova espécie de funções convém ou não, depende das propriedades que possui, da freqüência com que ocorre, e da facilidade com que possa ser manipulada na teoria e na prática. Desta maneira, o processo de integração serve de base para a formação de novas funções.

Além do mais, já estamos acostumados com êste princípio desde que operamos com as funções elementares. Assim, vimo-nos obrigados a introduzir a integral $1/x$, anteriormente desconhecida, como nova função, que denominamos logaritmo e cujas propriedades foram determinadas com facilidade. Poderíamos ter deduzido as funções trigonométricas de maneira semelhante, fazendo uso, sòmente, das funções racionais e dos processos de integração ou do de inversão. Para tanto, basta apenas tomar uma ou outra das equações

$$\operatorname{arc\,tg} x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} \quad \text{ou} \quad \operatorname{arc\,sen} x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

como *definição* das funções $\operatorname{arc\,tg} x$ ou $\operatorname{arc\,sen} x$, respectivamente, a fim de chegarmos às funções trigonométricas, por inversão. Por êste processo, a definição das funções mencionadas é independente da geometria; resta-nos a tarefa de desenvolver as suas propriedades, também independentemente da geometria (1).

O primeiro e mais importante exemplo que nos leva além da região das funções elementares é fornecido pelas *integrais elípticas*. São integrais em que o integrando é formado de modo racional por meio de uma variável de integração e da raiz quadrada de uma expressão do terceiro ou quarto grau. Entre estas integrais, a função

$$u(s) = \int_0^s \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

se apresenta como tendo particular importância e a sua função inversa, $s(u)$, desempenha papel igualmente importante. Em particular,

(1) Não entraremos no desenvolvimento destas idéias aqui. O essencial é demonstrar os teoremas da adição referentes às funções inversas, isto é, para o seno e a tangente.

se $k = 0$, teremos $u(s) = \operatorname{arc\,sen} x$ e $s(u) = \operatorname{sen} u$, respectivamente. A função $s(u)$ foi estudada detalhadamente, e tabulada, tal como as funções elementares. Isto, entretanto, nos conduz para fora dos limites da presente discussão, levando-nos ao domínio das chamadas funções elípticas, que ocupam posição destacada na teoria das funções de variáveis complexas.

Observaremos, apenas, que a expressão "integral elíptica" se origina do fato destas integrais aparecerem no problema da determinação do comprimento dos arcos da elipse (capítulo V, pág. 289).

Além disso, integrais que à primeira vista têm uma aparência inteiramente diversa, mostram, após uma substituição simples, serem integrais elípticas. Como exemplo, a integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\cos \alpha - \cos x}}$$

transforma-se, pela substituição de $u = \cos \frac{x}{2}$, ná integral

$$-k\sqrt{2} \int \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}, \quad k = \frac{1}{\cos \alpha/2};$$

a integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\cos 2x}}$$

transforma-se em

$$\int \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-2u^2)}}$$

pela substituição de $u = \operatorname{sen} x$;

finalmente a integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2 x}}$$

pela substituição de $u = \operatorname{sen} x$, transforma-se em

$$\int \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}.$$

2. Derivação e integração.

Incluiremos aqui outra observação sôbre a relação existente entre derivação e integração. A derivação pode ser considerada como processo mais elementar do que a integração, visto que, em hipótese alguma, nos conduzirá para fora dos domínios das funções conhecidas. Por outro lado, devemos lembrar que a derivabilidade de uma função contínua arbitrária não é, de modo algum, uma conclusão estabelecida, mas sim uma hipótese adicional muito restrita. Vimos, efetivamente, que existem funções contínuas que não são deriváveis

em pontos isolados, e podemos mencionar que desde o tempo de Weierstrass foram apresentados muitos exemplos de funções contínuas que não possuem derivada em qualquer ponto [1]. (Na definição matemática da continuidade há, portanto, muito menos do que a simples intuição nos levaria a supor.) Em contraste com isto, ainda que a integração por meio das funções elementares nem sempre seja possível, temos certeza de que, em qualquer circunstância, existe a integral de uma função contínua.

Tomadas em conjunto, vemos que a integração e a derivação não podem ser classificadas, simplesmente, como mais elementar ou menos elementar, mas que, sob alguns pontos de vista, o primeiro dos processos citados é mais elementar, ao passo que sob outros, será o segundo.

No que diz respeito ao conceito de integral, veremos na próxima seção que o mesmo não está rìgidamente ligado à hipótese de que o integrando seja uma função contínua, podendo ser estendido a numerosas classes de funções com descontinuidade.

8. Extensão do conceito de integral. Integrais impróprias.

1. Funções descontínuas com saltos.

Em primeiro lugar vemos que não há dificuldade em estender o conceito de integral ao caso em que a função a integrar apresente descontinuidades com salto, em um ou mais pontos, no intervalo de integração. Para tanto devemos, sòmente, considerar a integral da função como a soma das integrais estendidas aos intervalos separados em que a função é contínua [2]. A integral conserva, então, o seu significado intuitivo de área (fig. 4).

Fig. 4.—Integral de uma função descontínua

[1] Titchmarsh, *The Theory of Functions* (Oxford, 1932), § § 11.21-11.23 (págs. 350-354).

[2] Na realidade, deveríamos ter observado que na definição anterior de integral, consideramos o intervalo fechado e a função contínua no intervalo. Esta hipótese não acarreta nenhuma dificuldade, visto que, em cada subintervalo fechado, podemos estender a função de tal modo, que seja contínua, dando-lhe para valor, no ponto extremo, o limite da mesma quando x se aproxima do ponto terminal, partindo do interior do intervalo.

3. Funções com descontinuidades infinitas.

Quando as funções apresentam descontinuidades infinitas, no interior do intervalo ou em algum dos seus extremos, o caso é completamente diferente. A fim de formularmos a noção de integral, mesmo nestes casos, devemos apresentar um processo posterior de limite. Antes, porém, de anunciarmos a definição geral, ilustraremos algumas das suas possibilidades com uns poucos exemplos.

Iniciaremos com a integral $\int \frac{dx}{x^\alpha}$

onde α representa uma quantidade positiva. O integrando $1/x^\alpha$ torna-se infinito quando $x \to 0$, não sendo possível, pois, estendermos a integral ao limite inferior 0. Podemos, porém, indagar o que sucede quando tomamos a integral desde o limite positivo ϵ ao limite 1, digamos, e, finalmente, fazemos ϵ tender para 0. De acôrdo com as regras elementares da integração, desde que $\alpha \neq 1$ obteremos

$$\int_\epsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}(1-\epsilon^{1-\alpha}).$$

Reconhecemos, imediatamente, a ocorrência das seguintes possibilidades: (1) α é maior do que 1; então, quando $\epsilon \to 0$, o segundo membro tende para o ∞; (2) α é menor do que 1; neste caso, o segundo membro tende para o limite $1/(1-\alpha)$. No segundo caso, portanto, adotaremos simplesmente êste valor-limite como a integral entre os limites 0 e 1. No primeiro caso, diremos que a integral entre os limites 0 e 1 não existe. (3) No terceiro caso, quando $\alpha = 1$, a integral valerá $-\log \epsilon$, e quando $\epsilon \to 0$ ela não se aproximará de limite algum, tendendo para o ∞, isto é, a integral entre 0 e 1 não existe.

Outro exemplo da extensão de uma integral além de uma descontinuidade infinita é dado pelo integrando $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Achamos que

$$\int_0^{1-\epsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc sen } (1-\epsilon).$$

Se fizermos ϵ tender para 0, o segundo membro convergirá para um limite definido, $\pi/2$, e chamaremos a êste, o valor da integral $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, embora o integrando se torne infinito no ponto $x = 1$.

Para que possamos extrair um conceito perfeitamente geral dêstes exemplos, notaremos em primeiro lugar que, evidentemente, não haverá diferença essencial se a descontinuidade do intervalo ocorrer no extremo inferior ou no superior do intervalo de integração. Podemos, então, estabelecer o enunciado seguinte:

Se num intervalo $a \leqq x \leqq b$, *a função* $f(x)$ *fôr contínua, com a única exceção do ponto extremo* b, *definimos* $\int_a^b f(x)\,dx$, *como o limite*

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_a^{b-\epsilon} f(x)dx$$

— *em que o ponto* $b - \epsilon$ *se aproxima de* b, *a partir do interior do intervalo — desde que tal limite exista.*

Neste caso, diremos que a *integral imprópria* $\int_a^b f(x)\,dx$ *é convergente.* Se, entretanto, não existir o limite, diremos que a integral não existe, ou não converge, ou ainda, que ela *diverge.*

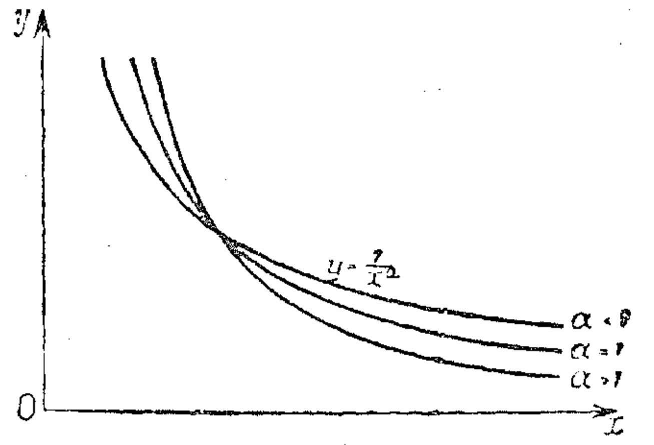


Fig. 5. – Convergência ou divergência de integrais impróprias

Quando o limite inferior, e não o superior, do intervalo de integração fôr o ponto excepcional, verifica-se definição análoga à que estabelecemos acima.

Mesmo as integrais impróprias podem ser interpretadas como áreas. Não forma sentido, naturalmente, falarmos da área de uma região que se estende até o infinito, porém, podemos tentar defini-la por meio da passagem ao limite de uma região limitada, com área finita. Por exemplo, os resultados já obtidos para a função $1/x^\alpha$ indicam que a área limitada pelo eixo dos x, pelas linhas $x = 1$ e $x = \epsilon$ e pela curva $y = 1/x^\alpha$ tende para um limite finito, quando $\epsilon \to 0$, desde que $\alpha < 1$, e que tenderá para o infinito se $\alpha \geqq 1$. Esta constatação pode ser expressa simplesmente, como segue: a área compreendida pelos eixos dos x e dos y, pela curva e pela linha $y = 1$ será finita ou infinita, conforme $\alpha < 1$ ou $\alpha \geqq 1$.

A intuição não pode, como é claro, dar-nos uma informação precisa sôbre a ponderabilidade da área de uma região que se estende ao infinito. Desta região podemos dizer, ùnicamente, que quanto mais os seus lados se aproximarem um do outro, tanto mais provável será que ela tenha uma área finita. A figura 5 explica

o que acabamos de dizer, isto é, a possibilidade da área ser finita para $\alpha < 1$ enquanto que se torna infinita quando $\alpha \geqq 1$.

Para decidir se uma função $f(x)$ que apresenta uma descontinuidade infinita no ponto $x = b$, pode ser integrada até b, podemos, muitas vêzes, evitar uma investigação especial, usando o seguinte critério:

Seja $f(x)$ uma função positiva [1] no intervalo $a \leqq x \leqq b$, e $\lim_{x \to b} f(x) = \infty$. A integral $\int_a^b f(x)\,dx$ convergirá se existirem, tanto um número μ menor do que 1, como um número fixo M, independente de x, tais que, em qualquer ponto do intervalo $a \leqq x < b$ se verifique a desigualdade $f(x) \leqq \dfrac{M}{(b-x)^{\mu}}$. Em outras palavras, a integral será convergente *se no ponto* x = b, *a função* f(x) *tornar-se infinita de ordem menor do que a primeira.* Por outro lado, a integral *será divergente*, se existirem duas quantidades $\nu \geqq 1$ e outra fixa N tais que, em qualquer ponto do intervalo $a \leqq x < b$ se verifique a desigualdade $f(x) \geqq \dfrac{N}{(b-x)^{\nu}}$. Em outras palavras, *a integral divergirá, se no ponto* x = b *a função* f(x) *se tornar infinita, no mínimo, de primeira ordem.*

A demonstração decorre quase imediatamente, por comparação com os casos especiais, muito simples, apresentados acima. Para demonstrar a primeira parte do teorema, observemos que, para $0 < \epsilon < b - a$, teremos

$$0 \leqq \int_a^{b-\epsilon} f(x)dx \leqq \int_a^{b-\epsilon} \frac{M}{(b-x)^{\mu}}\,dx.$$

Como $\epsilon \to 0$, a integral à direita, que é obtida da integral $\int \dfrac{dx}{x^{\alpha}}$ (pág. 128) por simples mudança de notação, tem limite, permanecendo, portanto, restringida. De mais a mais, os valores de $\int_a^{b-\epsilon} f(x)dx$ crescem monòtonamente quando $\epsilon \to 0$, e como êles, também, estão delimitados, devem possuir limite, e a integral $\int_b^a f(x)dx$ será, portanto, convergente.

Deixamos a demonstração paralela da segunda parte do teorema, como exercício, para o leitor resolver.

[1] Veremos, no apêndice do capítulo VIII (pág. 418) que estas restrições, quanto ao sinal, podem ser fàcilmente postas de lado.

De modo semelhante, vemos que teoremas inteiramente análogos têm lugar quando o *limite inferior* da integral fôr o ponto de descontinuidade infinita. Se o ponto em que ocorre a descontinuidade infinita estiver no interior do intervalo de integração, usaremos êste ponto sòmente para subdividir o intervalo em duas partes, aplicando, então, as considerações feitas a cada uma delas separadamente.

Como mais um exemplo, estudemos a integral elíptica

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \quad (k^2 < 1).$$

A identidade $1 - x^2 = (1 - x)(1 + x)$ permite ver que, à medida que $x \to 1$, o integrando se torna infinito de ordem $\frac{1}{2}$, donde se segue que a integral imprópria existe.

3. Intervalo infinito de integração.

Outra extensão importante do conceito de integral consiste em tomar o infinito como um dos limites da integração. A fim de tornarmos precisa tal extensão, introduziremos a seguinte notação: se a integral

$$\int_a^A f(x)\,dx,$$

onde a é fixo, tender para um limite definido, quando A crescer além de qualquer valor, de maneira positiva, designaremos o limite por

$$\int_a^\infty f(x)\,dx,$$

e diremos que a função $f(x)$ é integrada desde a até ∞. Naturalmente, tal integral não precisa, necessàriamente, existir, ou como se diz muitas vêzes, não é *convergente*.

Exemplos simples das diversas possibilidades são novamente fornecidos pelas funções $f(x) = 1/x^\alpha$,

$$\int_1^A \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}(A^{1-\alpha} - 1).$$

Vemos, aqui, que se excluirmos, novamente, o caso em que $\alpha = 1$, a integral no infinito existe para $\alpha > 1$ e, de fato,

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1};$$

ao contrário, quando $\alpha < 1$, a integral não existe. Para $\alpha = 1$ a integral deixa novamente de existir, visto que $\log x$ tende para o infinito juntamente com x. Vemos, além disso, que relativamente à integração sôbre um intervalo infinito.

as funções $1/x^\alpha$ não se comportam da mesma maneira que no caso da integração a partir da origem. Um olhar à figura 5 torna o enunciado plausível, pois vemos que, quanto maior fôr α, tanto mais perto do eixo dos x deverão ser desenhadas as curvas, desde que x seja suficientemente grande, sendo aceitável a suposição de que a área considerada tende para um limite definido, para valores convenientemente grandes de α.

O critério seguinte, para a determinação da existência de integrais como limite infinito é útil, muitas vêzes. Admitiremos novamente que para valores suficientemente grandes de x, digamos $x \geqq a$, o integrando tenha sempre o mesmo sinal que, sem perda de generalidade, podemos escolher positivo [1]. Teremos, então, o seguinte enunciado:

A integral $\int_a^\infty f(x)\,dx$ *convergirá se a função* $f(x)$ *se anular no infinito com ordem superior à primeira*, isto é, se existir uma quantidade $\nu > 1$ tal que, para qualquer valor de x, tão grande quanto quisermos, se verifique a relação $0 < f(x) \leqq \dfrac{M}{x^\nu}$, sendo M uma quantidade fixa, independente de x. *A integral divergirá se a função permanecer positiva e se anular no infinito em ordem não superior à primeira*, isto é, se houver uma quantidade fixa $N > 0$ tal que $x f(x) \geqq N$.

A demonstração dêstes critérios, que é feita paralelamente ao raciocínio anterior, será deixada ao leitor.

Um exemplo muito simples é fornecido pela integral $\int_a^\infty \frac{1}{x^2}dx$ $(a > 0)$, cujo integrando se anula no infinito, na segunda ordem. Efetivamente, vemos, desde logo, que a integral é convergente, pois $\int_a^A \frac{1}{x^2}dx = \frac{1}{a} - \frac{1}{A}$, e portanto

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{1}{a}.$$

Outro exemplo, igualmente simples, é

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{A\to\infty} (\text{arc tg } A - \text{arc tg } 0) = \frac{\pi}{2}.$$

4. **Função-gama.**

Um exemplo de particular importância em análise é oferecido pela chamada função-gama.

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}\,dx \qquad (n > 0).$$

[1] Como veremos no apêndice do capítulo VIII (pág. 418), esta restrição de sinal pode ser fàcilmente removida.

Neste caso, também, o critério de convergência é satisfeito. Por exemplo, se escolhermos $\nu = 2$, teremos $\lim_{x\to\infty} x^\nu . e^{-x}x^{n-1} = 0$, visto a função exponencial e^{-x} tender para zero com ordem superior à de qualquer outra potência $1/x^m$ $(m > 0)$. A função-gama, que pode ser considerada como função do número n (não necessàriamente inteiro), satisfaz uma relação notável, que podemos obter pela seguinte dedução, aplicando o método da integração por partes. Tomaremos, de início,

$$\int e^{-x}x^{n-1}\,dx = -e^{-x}x^{n-1} + (n-1)\int e^{-x}x^{n-2}\,dx.$$

Se considerarmos esta fórmula entre os limites 0 e A e fizermos, então, A crescer além de qualquer limite, obteremos

$$\Gamma(n) = (n-1)\int_0^\infty e^{-x}x^{n-2}\,dx = (n-1)\,\Gamma(n-1),$$

e empregando esta fórmula de recorrência, desde que μ seja inteiro e $0 < \mu < n$,

$$\Gamma(n) = (n-1)(n-2)\ldots(n-\mu)\int_0^\infty e^{-x}x^{n-\mu-1}\,dx.$$

Em particular, se n fôr inteiro e positivo, virá

$$\Gamma(n) = (n-1)(n-2)\ldots 3.2.1\int_0^\infty e^{-x}\,dx,$$

e como

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1,$$

segue-se, finalmente,

$$\Gamma(n) = (n-1)(n-2)\ldots 2.1 = (n-1)!$$

Esta expressão das fatoriais por meio de integrais é de grande importância em diversas aplicações.

As integrais

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx, \quad \int_0^\infty x^n e^{-x^2}\,dx$$

também convergem, como fàcilmente nos certificaremos aplicando o critério exposto.

5. **Integral de Dirichlet.**

Uma integral convergente, importante em muitas aplicações, mas cuja convergência não segue diretamente o nosso critério, e que é um caso simples do tipo estudado por Dirichlet, é

$$I = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx.$$

Como vemos fàcilmente, ela será convergente quando o limite superior fôr finito, pois $\frac{\operatorname{sen} x}{x} \to 1$ quando $x \to 0$. Sua convergência no intervalo infinito é devida à mudança periódica do sinal do integrando, a qual faz com que as contribuições para a integral, relativas a intervalos vizinhos do comprimento π, quase se cancelem mùtuamente. A fim de nos servir desta circunstância, escreveremos a expressão

$$D_{AB} = \int_A^B \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx$$

sob a forma

$$D_{AB} = \int_A^{A+\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx - \int_B^{B+\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx + \int_{A+\pi}^{B+\pi} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt,$$

introduzindo, nas três integrais do segundo membro, a nova variável $x = t - \pi$, donde $\operatorname{sen} t = -\operatorname{sen} x$, e

$$D_{AB} = \int_A^{A+\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx - \int_A^{B+\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx - \int_A^B \frac{\operatorname{sen} x}{x+\pi}\, dx.$$

Somando esta relação com a expressão original de D_{AB}, teremos

$$2D_{AB} = \int_A^{A+\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx - \int_B^{B+\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx + \pi \int_A^B \frac{\operatorname{sen} x}{x(x+\pi)}\, dx.$$

Se admitirmos que $B > A > 0$, segue-se que

$$|2D_{AB}| < \frac{2\pi}{A} + \pi \int_B^A \frac{dx}{x^2}.$$

Podemos empregar o método da página 127, observando que

$$-\frac{1}{x} \leqq \frac{\operatorname{sen} x}{x} \leqq \frac{1}{x}$$

e

$$-\frac{1}{x^3} \leqq \frac{\operatorname{sen} x}{x(x+\pi)} \leqq \frac{1}{x^2}$$

para os valores positivos de x. A integral da direita é convergente, pelo critério conhecido, e a fórmula mostra que $|D_{AB}| \to 0$, à medida que A e B tendem, ambos, para o infinito. Temos, pois,

$$|D_{0B} - D_{0A}| = |D_{AB}|,$$

seguindo-se, pelo critério de convergência de Cauchy, que D_{0B} tende para um limite definido, quando $B \to \infty$. Em outras palavras, a inte-

gral I existe. Outra demonstração será apresentada no apêndice do capítulo VIII (pág. 418), e na pág. 450 mostraremos que I tem o valor $\pi/2$.

6. **Substituição.**

É claro que tôdas as regras para a substituição de novas variáveis, etc., são válidas para as integrais impróprias convergentes. Como exemplo, para calcularmos $\int_0^\infty xe^{-x^2}\,dx$, introduzimos a nova variável $u = x^2$, obtendo

$$\int_0^\infty xe^{2x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-u}\,du = \lim_{A\to\infty} \frac{1}{2}(1 - e^{-A}) = \frac{1}{2}.$$

Outro exemplo do emprêgo da substituição no estudo das integrais impróprias, é oferecido pelas integrais de Fresnel, as quais ocorrem na teoria da difração da luz:

$$F_1 = \int_0^\infty \operatorname{sen}(x^2)\,dx, \quad F_2 = \int_0^\infty \cos(x^2)\,dx.$$

A substituição $x^2 = u$ conduz a

$$F_1 = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} u}{\sqrt{u}}\,du, \quad F_2 = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\cos u}{\sqrt{u}}\,du.$$

Integrando por partes, teremos

$$\int_A^B \frac{\operatorname{sen} u}{\sqrt{u}}\,du = \frac{\cos A}{\sqrt{A}} - \frac{\cos B}{\sqrt{B}} - \frac{1}{2}\int_A^B \frac{\cos u}{u^{3/2}}\,du.$$

Quando A e B tendem para o ∞, os primeiros dois têrmos do segundo membro tendem para 0, e, pelo critério da pág. 250, a própria integral tende para zero. Portanto, empregando o mesmo raciocínio que fizemos para a integral de Dirichlet, vemos que a integral F_1 é convergente. A convergência da integral F_2 é demonstrada de maneira idêntica.

As integrais de Fresnel mostram que uma integral imprópria pode existir, embora o integrando não tenda para zero, quando $x \to \infty$. De fato, uma integral imprópria pode existir mesmo quando o integrando não é limitado, conforme mostra o exemplo

$$\int_0^\infty 2u\cos(u^4)\,du.$$

Quando $u^4 = n\pi$, isto é, quando $u = \sqrt[4]{n\pi}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, o inte-

grando torna-se $2\sqrt{n\pi}\cos n\pi = \pm 2\sqrt{n\pi}$, sendo, pois, ilimitado. Pela substituição $u^2 = x$, entretanto, a integral reduz-se a

$$\int_1^{\infty} \cos(x^2)dx,$$

a qual converge, conforme acabamos de mostrar.

As integrais impróprias podem, por meio de substituições, ser transformadas, muitas vêzes, em integrais próprias. Por exemplo, a transformação $x = \operatorname{sen} u$ dá-nos

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\pi/2} du = \frac{\pi}{2}.$$

Por outro lado, as integrais das funções contínuas podem ser transformadas em integrais impróprias; isto ocorrerá se a transformação $u = \phi(x)$ fôr tal que num dos extremos do intervalo da integração a derivada $\phi'(x)$ se anule, de sorte que dx/du seja infinita.

Exemplos

Comprovar a convergência das integrais impróprias dos exemplos 1-11:

1. $\displaystyle\int_{-3}^{3} \frac{dx}{x^2}$. 2. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$. 3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^6}$.

4. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$. 5. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dx}{1-\cos x}$.

6. $\displaystyle\int_B^A \frac{dx}{\sqrt{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)}}$, onde a_1, a_2, a_3, a_4 são todos diferentes, porém, compreendidos entre A e B.

7. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{1+x^2}\,dx$. 8. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{1-x^3}\,dx$.

9. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{x}{1-e^x}\,dx$. 10. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x}{e^x-1}\,dx$. 11. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \log \operatorname{tg} x\,dx$.

12.* Demonstrar que $\displaystyle\int_0^{\infty} \operatorname{sen}^2\left[\pi\left(x+\frac{1}{x}\right)\right]dx$, não existe.

13.* Demonstrar que $\displaystyle\lim_{k\to\infty}\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+kx^{10}} = 0$.

14. Para quais valores de s as integrais (a) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{1+x}\,dx$, (b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^s}\,dx$, são convergentes?

15.* A integral $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{1+t}\,dt$ é convergente?

16.* (*a*) Se a fôr um número fixo, positivo, demonstrar que

$$\lim_{h\to 0}\int_{-a}^{a}\frac{h}{h^2+x^2}\,dx=\pi.$$

(*b*) Se $f(x)$ fôr contínua no intervalo $-1\leqq x\leqq 1$, demonstrar que

$$\lim_{h\to 0}\int_{-1}^{1}\frac{h}{h^2+x^2}f(x)\,dx=\pi f(0).$$

Exemplos diversos

Calcular as integrais dos Ns. 1-7:

1. $\int e^{\text{arc sen } x}\,dx.$

2. $\int \operatorname{sen}^3 x\cos^6 dx$ (Por um método mais abreviado do que o do texto, empregando identidades trigonométricas.)

3. $\int (\log x)^2\,dx.$ 4. $\int\frac{\operatorname{sen} x\,dx}{3+\operatorname{sen}^2 x}.$ 5. $\int\sqrt{1-e^{-2x}}\,dx.$

6. $\int_{-1}^{+1} x\,e^{-x^2\operatorname{tg}^2 x}\,dx.$ 7. $\int_{1/2}^{2}\frac{1}{x}\operatorname{sen}\left(x-\frac{1}{x}\right)dx.$

8.* Demonstrar que $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\,dt=0.$

9. Admitindo que $|\alpha|\mp|\beta|$, mostrar que

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \operatorname{sen}\alpha x\operatorname{sen}\beta x\,dx=0.$$

10. Calcular $\int_{-1}^{1} x^3 e^{-x^4}\cos 2x\,dx.$

11.* Demonstrar que a substituição $x=\dfrac{\alpha t+\beta}{\gamma t+\delta}$, onde $\alpha\delta-\gamma\beta\mp 0$, transforma a integral

$$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^4+bx^3+cx^2+dx+e}}$$

em outra de tipo semelhante, e que, se o polinômio do 4.º grau

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$$

não tiver fatôres repetidos, o mesmo acontecerá com a nova função do 4.º grau em t, que toma o lugar da anterior.

Demonstrar que o mesmo enunciado se aplica a

$$\int R(x,\sqrt{ax^4+bx^3+cx^2+dx+e})\,dx,$$

onde R é uma função racional.

12. Determinar o limite de $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$, quando $n \to \infty$.

13.* Determinar o limite de

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{n^2 - 0}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 - 4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2 - (n-1)^2}}.$$

14.* Demonstrar que $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \frac{1}{e}$.

15.* Sendo α um número qualquer maior do que -1, calcular

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1^\alpha + 2^\alpha + 3^\alpha + \ldots + n^\alpha}{n^{\alpha+1}}.$$

APÊNDICE AO CAPÍTULO IV

SEGUNDO TEOREMA DO VALOR MÉDIO DO CÁLCULO INTEGRAL

O método de integração por partes faculta-nos um processo simples para provar um importante teorema sôbre o cálculo das integrais, geralmente chamado — segundo teorema do valor médio da cálculo integral.

Suponhamos que a função $\phi(x)$ é monótona e contínua no intervalo $a \leqq x \leqq b$, e que a sua derivada $\phi'(x)$ é contínua. Admitamos, ainda, que $f(x)$ é uma função contínua arbitrária no mesmo intervalo. O segundo teorema do valor médio do cálculo integral será, então, enunciado da seguinte maneira. Existe um número ξ, tal que $a \leqq \xi \leqq b$, para o qual

$$\int_a^b f(x)\phi(x)dx = \phi(a) \int_a^\xi f(x)dx + \phi(b) \int_\xi^b f(x)dx.$$

Para demonstrá-lo, observemos, preliminarmente, que podemos supor que $\phi(b) = 0$, visto que substituindo $\phi(x)$ por $\phi(x) - \phi(b)$, os dois membros da equação são alterados pela mesma quantidade e dão uma função que se anula para $x = b$. Além disso, podemos admitir que $\phi(a) > 0$. Sendo $\phi(a) < 0$, precisamos apenas substituir $\phi(x)$ por $-\phi(x)$, o que muda o sinal de ambos os membros da equação. (O caso em que $\phi(a) = 0$ é trivial, pois se tanto $\phi(a)$ como $\phi(b)$ se anulam, $\phi(x)$ deve ser igualmente nula, e a equação proposta transforma-se

em 0 = 0.) Precisamos sòmente demonstrar que, se $\phi(x)$ fôr contínua e monótona decrescente, e $\phi(b) = 0$, teremos

$$\int_a^b f(x)\phi(x)dx = \phi(a)\int_a^\xi f(x)dx.$$

Faremos, agora, $F(x) = \int_a^x f(x)dx$ e aplicaremos a fórmula da integração por partes ao primeiro membro da última equação. Virá, então,

$$\int_a^b f(x)\phi(x)dx = F(x)\phi(x)\Big|_a^b + \int_a^b F(x)\,[-\phi'(x)\,]\,dx.$$

A parte integrada se anula, já que $F(a)$ e $\phi(b)$ são iguais a zero. A expressão $-\phi'(x)$ é positiva em qualquer posição, de sorte que podemos aplicar o primeiro teorema do valor médio do cálculo integral. Chegaremos, então, ao seguinte valor da integral da direita

$$F(\xi)\int_a^b [-\phi'(x)\,]dx, \quad a \leqq \xi \leqq b.$$

Mas

$$F(\xi) = \int_a^\xi f(x)dx \ \text{ e } \int_a^b [-\phi'(x)\,]\,dx = \phi(a) - \phi(b) = \phi(a),$$

ficando, assim, estabelecido o teorema.

Êste teorema pode ser estendido para classes mais gerais de funções (embora não apresentemos a demonstração), visto permanecer verdadeiro para qualquer função monótona $\phi(x)$, quer admita derivada, quer não. Finalmente, êle se verifica para qualquer função monótona descontínua, para a qual possamos integrar $f(x)\phi(x)$.

Capítulo V

APLICAÇÕES

Neste capítulo, depois de algumas preliminares, mostraremos como se aplica o que aprendemos até aqui, à geometria e à física.

1. Representação das curvas

1. Representação paramétrica.

Como já vimos no capítulo I (pág. 17), na representação das curvas por meio de uma equação $y = f(x)$, devemos nos restringir, sempre, a um ramo unívoco. É, por isso, mais conveniente, especialmente quando se trata de curvas fechadas, estudarmos outros métodos analíticos de representação. A representação mais geral, e, ao mesmo tempo, a mais empregada, das curvas, é a *paramétrica*. Em lugar de se considerar cada uma das coordenadas retangulares como função da outra, tomamos *ambas* as coordenadas x e y como função de uma *terceira* variável independente, o *parâmetro*. O ponto considerado, de coordenadas x e y, descreve pois a curva, à medida que t percorre um intervalo definido. Representações como estas já foram encontradas nos capítulos anteriores. Por exemplo, para o círculo $x^2 + y^2 = a^2$ teremos uma representação paramétrica da forma $x = a \cos t$, $y = a \operatorname{sen} t$, que, como já sabemos, indica, geomètricamente, um ângulo com o vértice no centro do círculo. Para a elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ teremos, de maneira análoga, a representação paramétrica $x = a \cos t$, $y = b \operatorname{sen} t$, onde t é o ângulo excêntrico, isto é, o ângulo central correspondente ao ponto do círculo circunscrito, situado, verticalmente, acima ou abaixo do ponto $P\,(a \cos t,\ b \operatorname{sen} t)$ da elipse (fig. 1). Em ambos os casos, o ponto com coordenadas x, y descreve o círculo completo ou a elipse, quando o parâmetro t percorre o intervalo compreendido entre 0 e 2π.

Em geral, podemos representar uma curva paramétrica, fazendo

$$x = \phi(t) = x(t), \quad y = \psi(t) = y(t),$$

isto é, conhecendo duas funções do parâmetro t. Empregaremos a notação mais condensada $x(t)$ e $y(t)$ quando não houver perigo de confusão. As duas funções $\phi(t)$ e $\psi(t)$ devem ser determinadas para cada curva, de modo que a totalidade de paresfun cionais $x(t)$ e $y(t)$, correspondente a um dado intervalo de valores, dê todos os pontos sôbre a curva, e nenhum fora dela.

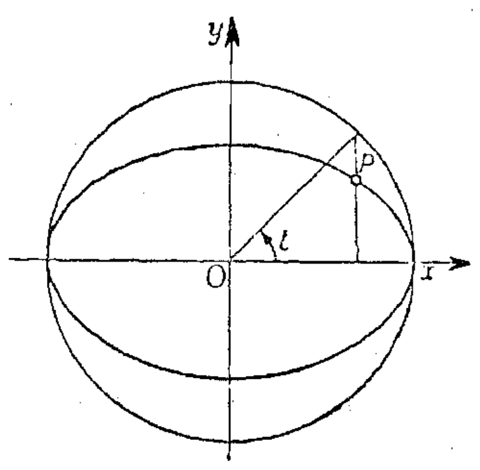


Fig. 1

Se a curva fôr dada sob a forma $y = f(x)$, podemos obter uma representação desta espécie, escrevendo primeiramente $x = \phi(t)$, onde $\phi(t)$ é uma função monótona qualquer, contínua, que, num intervalo definido, passa exatamente uma vez sôbre cada valor de x considerado. Segue-se, então, que $y = f[\phi(t)]$, isto é, a segunda função $\psi(t)$ é obtida compondo-se f e ϕ. Vemos assim que, graças à arbitrariedade da escolha da função ϕ, dispomos de completa liberdade na representação paramétrica de uma curva dada. Em particular, podemos fazer, efetivamente, $t = x$ e assim considerar a representação original $y = f(x)$ como equação paramétrica, com o parâmetro $t = x$.

A vantagem da representação paramétrica reside em se poder aproveitar a arbitrariedade da escolha para fins de simplificação. Por exemplo, representamos a curva $y = \sqrt[3]{x^2}$ fazendo $x = t^3$ e $y = t^2$, de sorte que $\varphi(t) = t^3$, $\psi(t) = t^2$. O ponto de coordenadas x, y descreverá, então, a curva completa (parábola semicúbica), quando t variar de $-\infty$ até $+\infty$.

Se, por outro lado, tivermos inicialmente uma curva dada pelas suas equações paramétricas $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$, e desejarmos obter a representação não paramétrica, isto é, sob a forma $y = f(x)$, basta, apenas, eliminar o parâmetro t nas duas equações. No caso das representações paramétricas do círculo e da elipse, dadas acima, podemos efetuar tal eliminação imediatamente, elevando-se ao quadrado e em-

pregando a equação $\text{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$. (Damos mais abaixo outro exemplo.) Em geral, teríamos que achar uma expressão para t, partindo da equação $x = \phi(t)$, por meio da função inversa $t = \Phi(x)$, substituindo-a em $y = \psi(t)$, para obtermos, finalmente, a representação $y = \psi[\Phi(x)] = f(x)$ [1]. Em tal eliminação, naturalmente, devemo-nos restringir, via de regra, a um segmento da curva, ou, mais precisamente, a uma porção da curva que não seja cortada duas vêzes por uma linha qualquer paralela ao eixo dos y.

A representação paramétrica compreende um *sentido* definido segundo o qual a curva é descrita, e que corresponde à direção em que os valores do parâmetro crescem. Tal direção será denominada *sentido positivo*. Se, por exemplo, o ponto $x = x(t)$, $y = y(t)$ descrever a curva C enquanto t atravessar o intervalo $t_0 \leqq t \leqq t_1$ e os pontos extremos da curva P_0 e P_1 corresponderem, respectivamente, a t_0 e t_1, a linha é gerada positivamente de P_0 para P_1. Se introduzirmos $\tau = -t$ como novo parâmetro, a curva C corresponderá aos valores $-t \leqq \tau \leqq -t_0$ da variável τ, enquanto os pontos extremos P_0 e P_1 corresponderão a $\tau = -t$ e $\tau = -t_1$, respectivamente. Se, agora, percorrermos a curva de P_0 para P_1, prosseguiremos na direção em que os valores do parâmetro τ decrescem, isto é, em sentido negativo. Em geral, uma mudança de parâmetro $t = t(\tau)$ conserva o sentido segundo o qual a curva é descrita se $t(\tau)$ fôr uma função monótona crescente, alterando-o quando $t(\tau)$ fôr uma função monótona decrescente.

2. Interpretação do parâmetro. Mudança de parâmetro.

Em muitos casos podemos atribuir uma interpretação física imediata ao parâmetro t, considerando-o como tempo. Justamente, o fato das coordenadas x, y de um ponto serem dadas em função do tempo, é que permite exprimir-se matemàticamente qualquer movimento do ponto num plano. Estas duas funções determinam, portanto, o *movimento ao longo de um caminho ou trajetória*, sob forma paramétrica.

Como exemplo apresentaremos a ciclóide que se origina quando um círculo rola ao longo de uma linha reta ou de um círculo, sem deslizamento. Limitar-nos-emos aqui ao caso mais simples, isto é, em que um círculo de raio a rola sôbre o

(1) Pode acontecer, entretanto, que a equação $y = f(x)$, obtida desta forma, signifique *mais* do que a representação paramétrica original. Assim, por exemplo, as equações $x = a \,\text{sen}\, t$, $y = b \,\text{sen}\, t$, representam ùnicamente a porção finita da linha $y = bx/a$, situada entre os pontos $x = -a, y = -b$ e $x = a$, $y = b$, ao passo que $y = bx/a$ representa tôda a linha.

eixo dos x, e consideraremos um ponto da sua circunferência. O ponto em questão descreverá uma ciclóide "comum". Se fixarmos a origem do sistema de coordenadas e o tempo inicial de sorte que o ponto correspondente da curva coincida com a origem no tempo $t = 0$, teremos (fig. 2) a representação paramétrica

$$x = a(t - \operatorname{sen} t), \quad y = a(1 - \cos t)$$

para a ciclóide. Nas equações acima, t indica o ângulo do qual o círculo girou, a partir de sua posição inicial; no caso de velocidade de rolamento uniforme, é proporcional ao tempo.

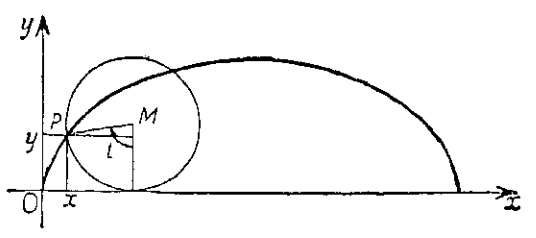


Fig. 2.—Ciclóide

Pela eliminação do parâmetro t podemos obter a equação da curva sob forma não paramétrica, à custa, entretanto, da elegância de expressão. Temos

$$\cos t = \frac{a-y}{a}, \quad t = \operatorname{arc\,cos} \frac{a-y}{a}, \quad \operatorname{sen} t = \pm \sqrt{1 - \frac{(a-y)^2}{a^2}},$$

e, portanto,

$$x = a \operatorname{arc\,cos} \frac{a-y}{a} \mp \sqrt{(2a-y)y},$$

obtendo, assim, x como função de y.

Na representação paramétrica das curvas, dispomos de ampla liberdade na escolha do parâmetro (pág. 259). Por exemplo, em vez do tempo t, podemos tomar a quantidade $\tau = t^2$ como parâmetro, ou até qualquer quantidade arbitrária τ relacionada com o parâmetro original t, por uma equação arbitrária da forma $\tau = \omega(t)$, em que admitimos que a função possua uma única inversa do tipo $t = \kappa(\tau)$ para o intervalo dos valores de t considerados. Se os valores crescentes de τ corresponderem aos valores crescentes de t, é mantido o sentido positivo do percurso; caso contrário, êle é invertido.

A representação paramétrica não é limitada, naturalmente, às coordenadas retangulares, podendo, por exemplo, ser empregada igualmente bem no caso das coordenadas polares r e θ. Estas coordenadas são relacionadas com as retangulares pelas equações já conhecidas

$x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$, ou $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\text{sen}\,\theta = y/r$, $\cos\theta = x/r$. As equações da curva assumirão a forma $r = r(t)$, $\theta = \theta(t)$.

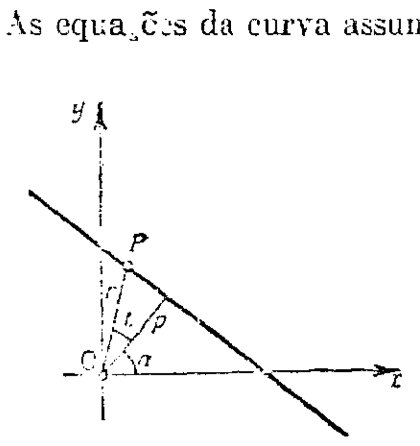


Fig. 3

Como exemplo, a linha reta pode ser representada paramètricamente (fig. 3) pelas equações

$$r = \frac{p}{\cos t}, \quad \theta = \alpha + t$$

(p e α sendo constantes), donde obtemos, em seguida, a equação da linha em coordenadas polares,

$$r = \frac{p}{\cos(\theta-\alpha)},$$

pela eliminação do parâmetro t.

3. Derivadas das curvas representadas paramètricamente.

Se tivermos a equação de uma curva, $y = f(x)$, e por outro lado, a sua representação paramétrica $x = x(t)$, $y = y(t)$, devemos ter $y(t) = f[x(t)]$. Pela regra da cadeia para a derivação, virá

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}$$

ou

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}},$$

onde, como abreviação para as derivações em relação a t, usamos um ponto sôbre a variável (notação de Newton), em lugar de uma linha ($'$), a qual reservamos para as derivadas em relação a x.

Para a ciclóide, por exemplo, teremos

$$\dot{x} = a(1-\cos t) = 2a\,\text{sen}^2\frac{t}{2},$$

$$\dot{y} = a\,\text{sen}\,t = 2a\,\text{sen}\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}.$$

Estas fórmulas mostram que a ciclóide tem um vértice com tangente vertical nos pontos $t = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$, nos quais encontra o eixo dos x, pois, quando nos aproximamos dêstes pontos, a derivada $y' = \dot{y}/\dot{x} = \text{cotg}\,(t/2)$ torna-se infinita. Nestes pontos $y = 0$, ao passo que, em qualquer outra posição, $y > 0$.

A equação da tangente à curva é

$$(\xi - x)\dot{y} - (\eta - y)\dot{x} = 0,$$

onde ξ e η são as coordenadas "correntes", isto é, as coordenadas variáveis, correspondentes a um ponto qualquer da tangente. Para a equação da normal, isto é, da linha reta que passa por um ponto da curva perpendicularmente à tangente, neste ponto, obteremos, de modo análogo,

$$(\xi - x)\dot{x} + (\eta - y)\dot{y} = 0.$$

Os *co-senos diretores da tangente*, ou sejam, os co-senos dos ângulos α e β compreendidos entre a tangente e os eixos dos x e dos y, respectivamente, são dados pelas fórmulas

$$\cos\alpha = \frac{\dot{x}}{\pm\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}, \quad \cos\beta = \frac{\dot{y}}{\pm\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}},$$

como podemos verificar por métodos elementares. Os correspondentes *co-senos diretores da normal* são fornecidos por

$$\cos\alpha' = \frac{-\dot{y}}{\pm\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}, \quad \cos\beta' = \frac{\dot{x}}{\pm\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}.$$

(fig. 4).

Estas fórmulas mostram que em cada ponto em que $\dot{x}$ e $\dot{y}$ forem contínuas, e $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 \neq 0$, a direção da tangente variará continuamente com t. Êste é o caso mais importante para nós, porém não deixará de ser interessante esclarecermos, por meio de exemplos, as várias possibilidades que surgem quando as hipóteses estabelecidas não são preenchidas e quando não é possível afirmar-se, diretamente, que a tangente se conserva girando de modo contínuo. Num ponto em que $\dot{x} = \dot{y} = 0$, a tangente pode girar continuamente ou não. Como exemplo, tomemos a curva $x = t^3$, $y = t^2$, já estudada nas páginas 99 e 259, que tem um vértice na origem, embora $\dot{x}$ e $\dot{y}$ sejam contínuas em tôda a parte. Como outro exemplo, consideremos a curva $x = t^2$, $y = t^3$, que representa a linha reta $y = x$. Esta curva tem a mesma

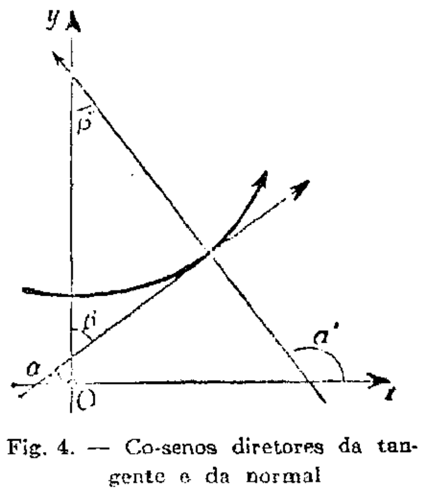


Fig. 4. — Co-senos diretores da tangente e da normal

direção da tangente em tôda parte. A última é, portanto, contínua, embora ambas as derivadas $\dot{x}$ e $\dot{y}$ se anulem para $t = 0$. Além disso, nos pontos em que $\dot{x}$ e $\dot{y}$ forem descontínuas, a direção da tangente pode ou não ser contínua. Seja $\phi(t)$ uma função qualquer, contínua e monótona crescente, definida para $t_1 \leqq t \leqq t_2$, com um vértice em $t = t_3$, $t_1 < t_3 < t_2$. A curva $x = t$, $y = \phi(t)$, que é a mesma curva que $y = \phi(x)$, terá um vértice em $x = t_3$, ao passo que a curva $x = \phi(t)$, $y = \phi(t)$, que é um segmento da linha reta $y = x$, terá direção constante para a tangente, mesmo que as derivadas $\dot{x}$ e $\dot{y}$ não existam para $t = t_3$. Isto indica que se quisermos investigar o comportamento da tangente no ponto em que o teorema citado não se aplica, devemos empregar, primeiramente, as fórmulas que dão $\cos\alpha$ ou $\cos\beta$ como funções de t e, depois, estudar os próprios co-senos diretores.

De uma fórmula conhecida da trigonometria ou da geometria analítica, deduzimos que o ângulo formado pelas duas curvas, representadas paramètricamente por $x = x_1(t)$, $y = y_1(t)$ e $x = x_2(t)$, $y = y_2(t)$ respectivamente (isto é, o ângulo formado pelas suas tangentes ou pelas suas normais), é fornecido pela expressão

$$\cos\delta = \frac{\dot{x}_1\dot{x}_2 + \dot{y}_1\dot{y}_2}{\pm\sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2}\,\sqrt{\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2}}.$$

A indeterminação dos sinais das raízes quadradas nas últimas fórmulas, sugere que os ângulos não são perfeitamente determinados, visto podermos especificar qual o sentido de direção, sôbre a tangente ou a normal, que adotamos como "positivo". Considerando a raiz quadrada como positiva, como se faz habitualmente, isto corresponderá a escolher para direção positiva da tangente, a direção em que o parâmetro cresce, e para direção positiva da normal, a direção obtida pela rotação da tangente de um ângulo igual a $\pi/2$, no sentido positivo [1].

A derivada de segunda ordem, $y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$, é obtida como segue, pelas regras da cadeia e da derivação dos quocientes:

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)\frac{1}{x} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^2}\frac{1}{\dot{x}},$$

[1] Isto é, no sentido contrário ao do movimento dos ponteiros dos relógios.

donde,

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3}.$$

4. Mudança de eixos no caso de curvas representadas paramètricamente.

Se girarmos os eixos de um ângulo α na direção positiva, as novas coordenadas retangulares ξ, η e as antigas x, y, estarão ligadas pelas equações

$$\begin{aligned} x &= \xi \cos\alpha - \eta \operatorname{sen}\alpha, & \xi &= x\cos\alpha + y\operatorname{sen}\alpha, \\ y &= \xi \operatorname{sen}\alpha + \eta\cos\alpha, & \eta &= -x\operatorname{sen}\alpha + y\cos\alpha. \end{aligned}$$

Assim, as novas coordenadas ξ, η ficam definidas, do mesmo modo que x, y, em função do parâmetro t. Derivando, obteremos

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{\xi} \cos\alpha - \dot{\eta} \operatorname{sen}\alpha, & \dot{\xi} &= \dot{x}\cos\alpha + \dot{y}\operatorname{sen}\alpha, \\ \dot{y} &= \dot{\xi} \operatorname{sen}\alpha + \dot{\eta}\cos\alpha, & \dot{\eta} &= -\dot{x}\operatorname{sen}\alpha + \dot{y}\cos\alpha. \end{aligned}$$

Suponhamos que a curva é dada em coordenadas polares e que, tanto as coordenadas polares como as retangulares, são funções do parâmetro t. Derivando em relação a t, as equações $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$, darão as fórmulas

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r}\cos\theta - r\operatorname{sen}\theta.\dot{\theta}, \\ \dot{y} &= \dot{r}\operatorname{sen}\theta + r\cos\theta.\dot{\theta}, \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots\dots \quad (a)$$

freqüentemente empregadas na passagem das coordenadas retangulares às polares. Como exemplo, vejamos a equação polar da curva $r = f(\theta)$, que pode se originar da representação paramétrica $r = r(t)$, $\theta = \theta(t)$, pela eliminação do parâmetro t. O ângulo ψ compreendido pelo raio vector a um ponto da curva e a tangente à curva, no ponto considerado, é dado por

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{f(\theta)}{f'(\theta)}.$$

Podemos verificá-lo, fàcilmente, da maneira seguinte. Se considerarmos a curva representada pela equação $y = F(x)$ e empregarmos o parâmetro θ, de sorte que $\dot{\theta} = 1$ e $\dot{r} = f'(\theta)$, teremos

$$\operatorname{tg}\alpha = y' = \frac{\dot{x}}{\dot{y}} = \frac{\dot{r}\operatorname{tg}\theta + r}{\dot{r} - r\operatorname{tg}\theta}$$

(fig. 5 e equações (a) acima estabelecidas). Além disso, $\psi = \alpha - \theta$ e, portanto,

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{y' - \operatorname{tg} \theta}{1 + y' \operatorname{tg} \theta} = \frac{r + r \operatorname{tg}^2 \theta}{\dot{r} + r \operatorname{tg}^2 \theta} = \frac{r}{\dot{r}}.$$

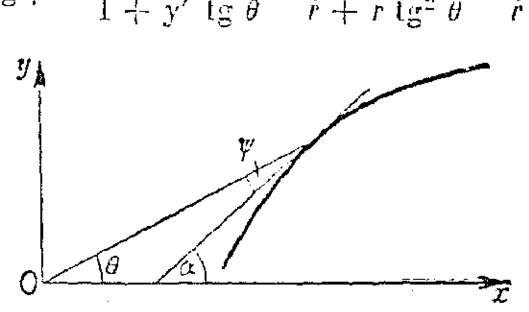


Fig. 5

Esta fórmula pode, igualmente, ser estabelecida por dedução geométrica.

5. Observações gerais.

No estudo de diversas curvas encontramos, por vêzes, propriedades que não proporcionam informação alguma sôbre a forma da própria curva, mas sòmente em relação à sua posição, em face do sistema de eixos coordenados. Tais são, por exemplo, a existência de uma tangente horizontal, expressa pela equação $\dot{y} = 0$, ou de uma tangente vertical, representada por $\dot{x} = 0$. Propriedades desta natureza não persistem, quando os eixos sofrem rotação.

Contrastando com isto, os pontos de inflexão serão sempre pontos de inflexão, qualquer que seja a rotação atribuída aos eixos coordenados. A condição necessária para a existência de um ponto de inflexão é (pág. 265),

$$\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y} = 0.$$

Se substituirmos as expressões $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, do primeiro membro por seus valores em função das novas coordenadas ξ, η, obteremos

$$\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y} = \dot{\xi}\ddot{\eta} - \ddot{\xi}\dot{\eta}.$$

Logo, da equação $\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y} = 0$ segue-se que $\dot{\xi}\ddot{\eta} - \ddot{\xi}\dot{\eta} = 0$, de sorte que a equação traduz uma propriedade de um ponto da curva, a qual é independente do sistema de coordenadas.

Veremos, muitas vêzes, mais tarde, que as propriedades verdadeiramente geométricas são expressas por fórmulas que não se alteram pela rotação dos eixos coordenados.

Exemplos

1. Deduzir a equação da curva

$$x = a \cos 2\theta \cos \theta$$
$$y = a \cos 2\theta \operatorname{sen} \theta.$$

2. Um círculo c, de raio r, rola externamente sôbre um círculo fixo C, de raio R. O ponto P da circunferência de c move-se com o círculo e descreve uma curva denominada *epiciclóide*. Determinar a representação paramétrica da epiciclóide (considere-se a velocidade de c constante e meça-se o tempo de sorte que para $t = 0$, o ponto P esteja em contato com o círculo C).

3. Desenhar a epiciclóide para o caso especial em que $r = R$, determinando as suas equações paramétricas. (Esta epiciclóide particular é denominada *cardióide*.)

4. Se, no exemplo 2, o raio r fôr menor do que R, e c rolar *por dentro* de C, o ponto P descreverá uma *hipociclóide*. Determinar suas equações paramétricas.

5. Desenhar a hipociclóide (a) para $R = 2r$; (b) para $R = 3r$.

6. Desenhar a hipociclóide para $R = 4r$ (*astróide*), deduzindo sua equação não paramétrica.

7. Estabelecer as equações paramétricas da curva $x^3 + y^3 = 3axy$ (*fólio de Descartes*), escolhendo a tangente do ângulo compreendido entre o eixo dos x e o raio vector de origem ao ponto x, y, como parâmetro.

8. Demonstrar que o comprimento da tangente à hipociclóide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ interceptado pelos dois eixos coordenados, é constante.

9. Provar que a tangente e a normal à ciclóide passam pelos pontos mais alto e mais baixo do círculo gerador, em cada posição do mesmo.

10. Estabelecer a fórmula do ângulo α compreendido entre as curvas $r = f(\theta)$ e $r = g(\theta)$, em coordenadas polares.

11. Seja C uma curva fixa e P um ponto fixo com coordenadas x_0, y_0. A *curva pedal* de C em relação a P é definida como sendo o lugar dos pés das perpendiculares baixadas de P sôbre as tangentes à curva dada. Estabelecer a representação paramétrica da curva pedal de C, se a própria curva C fôr dada paramètricamente por $x = f(t)$, $y = g(t)$.

12. Determinar a curva pedal do círculo C, (a) relativamente ao seu centro M, (b) relativamente a um ponto P da sua circunferência.

2. Aplicações à teoria das curvas planas

Ao estudarmos as curvas, consideraremos duas espécies de propriedades geométricas associadas às mesmas. O primeiro tipo consiste em propriedades ou quantidades que dependem, ùnicamente, do comportamento da curva no *sentido restrito*, isto é, na vizinhança imediata de um ponto, e que podem ser expressas analìticamente por meio da derivada no ponto. Propriedades da segunda espécie dependem de

todo o traçado da curva ou sòmente de uma porção dela, e são traduzidas analìticamente pelo conceito de integral. Iniciaremos estudando as propriedades do segundo tipo.

1. Orientação das áreas.

A idéia de área constituiu o nosso ponto de partida para a definição de integral. Entretanto, a conexão entre integral definida e área, permanece algo incompleta. As áreas com as quais estamos habituados na geometria são limitadas por *curvas fechadas* conhecidas; por outro lado, a área representada pela integral $\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$ é limitada só em parte pela curva dada $f(x)$, ficando o resto do contôrno dependendo da escolha do sistema de coordenadas. Se quisermos determinar a área compreendida por uma curva fechada, como um círculo ou uma elipse, por integrais dêste tipo, devemos empregar um artifício, como, por exemplo, a decomposição da área em várias partes, cada uma delas limitada por um ramo unívoco da curva e também pelo eixo dos x, assim como pelas ordenadas correspondentes.

Para a discussão dêste caso geral é conveniente, em primeiro lugar, apresentarmos algumas observações sôbre a determinação do sinal da área considerada. Para qualquer área limitada por uma curva fechada, arbitrária, que não se corte a si mesma, podemos relacionar o sinal da área com a idéia puramente geométrica do sentido segundo o qual a curva é descrita, de acôrdo com a seguinte convenção. Diremos que o contôrno de uma superfície é descrito no *sentido positivo*, quando o interior da área ficar à esquerda [1] de quem percorre o contôrno; o sentido oposto será o negativo. Se, então, considerarmos uma superfície cujo contôrno seja percorrido num dado sentido, superfície esta designada *região orientada*, tomaremos a área como positiva se tal sentido fôr positivo e negativa no caso contrário (fig. 6)

Suponhamos que, em particular, a função $f(x)$ seja positiva em qualquer posição do intervalo $a \leqq x \leqq b$. Consideraremos a curva fechada obtida a partir do ponto $x = b = x_1$, $y = 0$, seguindo pelo eixo dos x para trás, até o ponto $x = a = x_0$, $y = 0$, subindo pela ordenada

(1) Se quisermos evitar as palavras "direita" e "esquerda" nesta definição, diremos que o triângulo cujos vértices são, respectivamente, a origem e os pontos $x = 1$, $y = 0$ e $x = 0$, $y = 1$, é descrito no sentido positivo, se os vértices forem percorridos na ordem mencionada. Para qualquer outra área, o contôrno descrito será positivo se fôr percorrido como o triângulo acima, e negativo no caso contrário.

da curva $y = f(x)$, percorrendo a curva até a ordenada $x = b$, e, finalmente, descendo por esta ordenada até o eixo dos x (fig. 7). O valor absoluto da área interior a esta curva — o número de unidades quadradas contido nela — é, como já sabemos, $\int_a^b f(x)\,dx$. Logo, designando por A_{01} a área com o sinal como foi determinado acima, a integral dá o valor de A_{01}, exceto quanto ao sinal. Para determiná-lo, precisamos

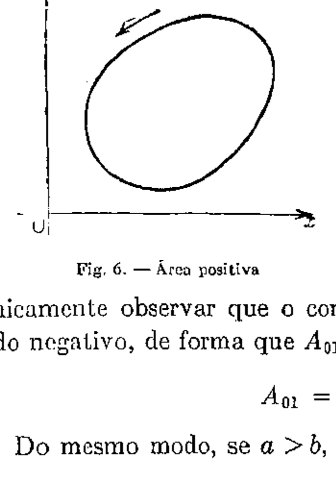


Fig. 6. — Área positiva

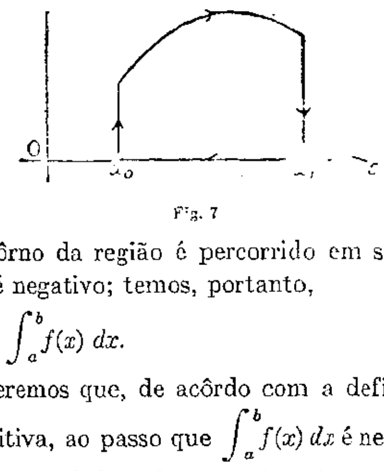


Fig. 7

ùnicamente observar que o contôrno da região é percorrido em sentido negativo, de forma que A_{01} é negativo; temos, portanto,

$$A_{01} = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Do mesmo modo, se $a > b$, veremos que, de acôrdo com a definição que estabelecemos, A_{01} é positiva, ao passo que $\int_a^b f(x)\,dx$ é negativa. Assim, A_{01} é, em qualquer caso, dado pela equação acima.

2. Fórmula geral para a área considerada como integral.

Depois destas preliminares, as dificuldades mencionadas no início podem ser contornadas de forma simples, pela representação paramétrica da curva proposta. Se introduzirmos t, formalmente, como nova variável independente na integral acima, fazendo $x = x(t)$, $y = y(t) = f[x(t)]$, teremos

$$A_{01} = -\int_{t_0}^{t_1} y(t)\dot{x}(t)\,dt,$$

onde t_0 e t_1 são os valores do parâmetro correspondente às abscissas $x_0 = a$ e $x_1 = b$, respectivamente. Admitiremos que o ramo considerado, da curva $y = f(x)$ refere-se ao intervalo $t_0 \leqq t \leqq t_1$ por uma cor-

respondência [1] (1, 1), segundo a qual $f(x)$ é positiva em tôda parte e $\dot{x}(t)$ nunca se anula no intervalo. Como vimos, a expressão estabelecida dá-nos a área da região limitada pela curva, pelas linhas $x = a$ e $x = b$, e pelo eixo dos x. Ela está, naturalmente, sujeita às desvantagens que já mencionamos. Mostraremos, agora, que, se a curva $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t_0 \leqq t \leqq t_1$, fôr fechada, contornando uma região de área A_{01}, esta área será fornecida por uma integral que, na forma, é exatamente igual à que estabelecemos.

Imaginemos, pois, uma curva fechada, representada paramètricamente pelas equações $x = x(t)$, $y = y(t)$, sendo a curva descri-

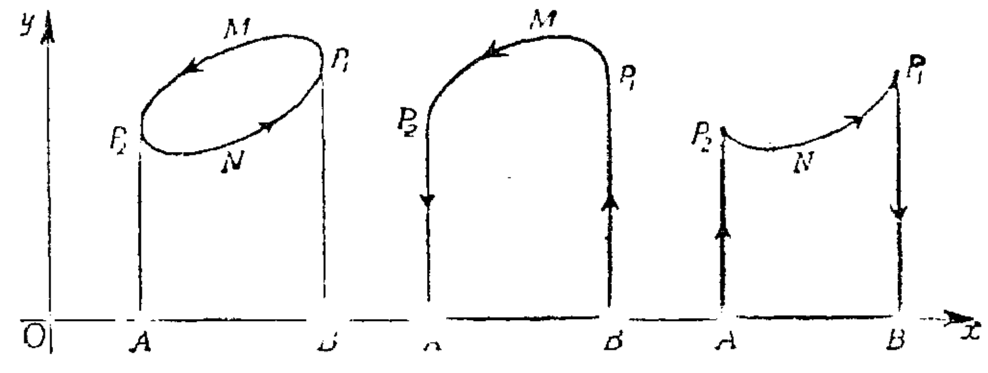


Fig. 8. — Área de uma curva fechada

ta justamente uma vez, quando t percorre o intervalo $t_0 \leqq t \leqq t_1$. A fim de que a curva possa ser fechada, é essencial que $x(t_0) = x(t_1)$ e $y(t_0) = y(t_1)$. Admitiremos que as derivadas são contínuas, exceto para um número finito de descontinuidades com saltos, e, mais ainda, que $\dot{x}^2 + \dot{y}^2$ seja diferente de zero, salvo, talvez, em um número finito de pontos, os quais poderão ser vértices da curva [2].

Estudaremos, em primeiro lugar, uma curva fechada sem vértices, convexa, e de tal tipo que nenhuma linha reta a possa cortar em mais de dois pontos. Designaremos por P_1 e P_2, respectivamente, os pontos em que a curva possui tangentes verticais; estas tangentes são chamadas "linhas de contenção" em P_1 e P_2, porque os pontos da curva na vizinhança de P_1 e P_2 ficam situados inteiramente de um dos lados destas tangentes. Podemos, então (fig. 8), considerar a área limitada

(1) Isto é, tal que cada ponto do mesmo corresponda a um único valor de t no intervalo $t_0 \leqq t \leqq t_1$ e reciprocamente.

(2) Uma curva contínua $x = x(t)$, $y = y(t)$ terá um vértice em $t = t_0$ se a direção positiva da tangente se aproximar de um limite, quando $(t - t_0) \to 0$, através de valores positivos, e se aproximar também de um limite, porém, diferente do primeiro, quando $(t - t_0) \to 0$ através de valores negativos.

pela curva, como a soma da área A_{12} envolvida pela curva fechada $P_1MP_2ABP_1$, formada, como na seção precedente, com a área A_{21} contornada pela curva fechada $P_2NP_1BAP_2$. Admitimos que a curva seja gerada no sentido positivo, como está indicado na figura. Pela convenção de sinais que adotamos, A_{12} será positiva e A_{21} negativa. Suporemos que o ponto $x(t)$, $y(t)$ descreve a parte superior da curva, de P_1 a P_2 quando t se desloca de t_0 a τ, ao passo que a parte inferior de P_2 a P_1 é descrita quando t varia de τ a t_1. Obteremos imediatamente

$$A_{12} = -\int_{t_0}^{\tau} y(t)\dot{x}(t)\,dt$$

$$A_{21} = -\int_{\tau}^{t_1} y(t)(t\dot{x})\,dt;$$

portanto, a área total contornada pela curva convexa será

$$A = -\int_{t_0}^{t_1} y(t)\dot{x}(t)\,dt.$$

Se designarmos por "área absoluta" de uma região o número de quadrados unitários contidos na mesma — e que, naturalmente, nunca pode ser negativo — a expressão acima nos dará sempre a área absoluta, limitada pela curva, exceto, talvez, quanto ao sinal. Para que possamos aquilatar o que acontece quando o sentido em que a curva é gerada é invertido, tomaremos a mesma integral de t_1 a t_0 em vez de t_0 a t_1. Faremos, então,

$$-\int_{t_1}^{t_0} y\dot{x}\,d\tau,$$

que é igual a $-A$. Reconhecemos, então, a veracidade do seguinte enunciado:

A área representada pela fórmula será positiva ou negativa, conforme fôr positivo ou negativo o sentido em que a linha de contôrno fôr descrita (1).

(1) Traçando a figura admitimos que $y > 0$ para todos os pontos da curva. Esta condição, na realidade, não restringe a generalidade do resultado. Se deslocarmos a curva de uma distância a, paralelamente ao eixo dos y, sem girar a mesma, ou, em outras palavras, se substituirmos y por $y + a$, a área não sofre alteração. O valor da integral, da mesma forma, fica inalterado, visto que a integral acima será substituída por

$$-\int_{t_0}^{t_1} (y + a)\dot{x}(t)\,dt,$$

e, como a curva é fechada,

$$\int_{t_0}^{t_1} a\dot{x}\,dt = a\,[x(t_1) - x(t_0)] = 0.$$

Duas observações simples permitem-nos estender os resultados encontrados. Primeiramente, a fórmula continua válida para as curvas fechadas que não se interceptam, mesmo não sendo convexas e apresentando forma mais geral, como indica a figura 9. Em segundo lugar, as derivadas podem ter descontinuidades com saltos, ou podem ambas anular-se em um número finito de pontos, os quais podem ser vértices. De acôrdo com o cap. IV, § 8, pág. 245, a função $y\dot{x}$ continuará sendo integrável. (As ordenadas dos vértices são consideradas linhas de contenção se as curvas, na vizinhança do ponto, ficarem inteiramente de um lado da ordenada.) Admitiremos que a curva possui um número finito de linhas de contenção, correspondendo aos pontos $P_1, P_2, \ldots, P_n$, e subdividiremos a curva nos ramos unívocos

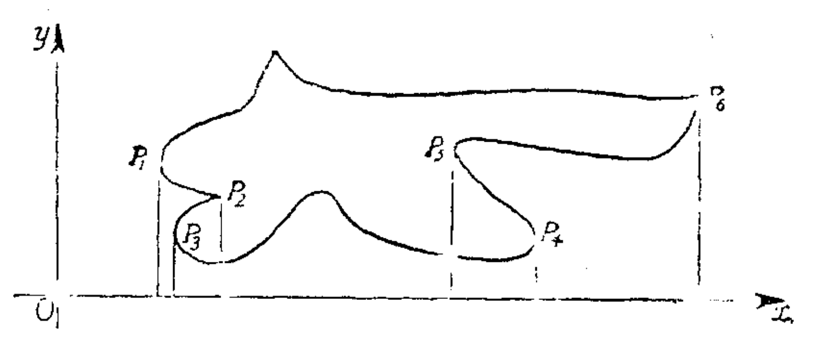


Fig. 9

$P_1P_2, \ldots, P_{n-1}P_n, P_nP_1$. Como vemos (fig. 9), obteremos a área limitada pela curva, sob a forma $A = A_{12} + A_{23} + \ldots + A_{n-1,\,n} + A_{n1}$. (Na fig. 9, $n = 6$.) Se representarmos paramètricamente cada uma dessas porções de área, e combinarmos as equações numa integral única, veremos que a área limitada pela curva é dada por

$$-\int_{t_0}^{t_1} y\dot{x}\,dt,$$

que, como já vimos anteriormente, tem o sinal do sentido em que a curva de contôrno é percorrida.

De certo modo, a fórmula deduzida dá a área das curvas que se interceptam. Deixaremos, porém, de apresentar aqui tal discussão, remetendo o leitor ao § 2 do apêndice dêste capítulo (pág. 311).

Podemos estabelecer a fórmula deduzida para a área de modo mais elegante e simétrico, se, inicialmente, transformarmos a integral mediante integração por partes:

$$\int_{t_0}^{t_1} y\dot{x}\, dt = -\int_{t_0}^{t_1} x\dot{y}\, dt + xy\Big|_{t_0}^{t_1}.$$

Como a curva é fechada

$$x(t_0) = x(t_1), \quad y(t_0) = y(t_1),$$

logo [1],

$$A = -\int_{t_0}^{t_1} y\dot{x}\, dt = \int_{t_0}^{t_1} x\dot{y}\, dt.$$

Se tirarmos a média aritmética das duas expressões, obteremos a *forma simétrica*

$$A = -\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} (y\dot{x} - x\dot{y})\, dt.$$

3. Observações e exemplo.

Juntamente com estas expressões faremos uma observação de natureza fundamental. Tanto a demonstração como o enunciado destas fórmulas dependem de um sistema particular de coordenadas retangulares. O valor da área, porém, é uma quantidade puramente geométrica, que não pode ficar subordinado ao sistema de coordenadas eventualmente escolhido. É, pois, importante mostrar que as integrais encontradas não se alteram quanto ao valor, pela mudança de coordenadas.

Se os eixos sofrerem sòmente um deslocamento, sem rotação, as integrais não mudam (nota da pág. 271). Suponhamos, então, que os eixos sofrem uma rotação igual ao ângulo α. Em vez de x e y teremos as novas variáveis ξ e η, definidas pelas equações $x = \xi \cos \alpha - \eta \operatorname{sen} \alpha$, $y = \xi \operatorname{sen} \alpha + \eta \cos \alpha$, sendo ainda as novas variáveis funções do parâmetro t. Se lembrarmos que $\dot{x} = \dot{\xi} \cos \alpha - \dot{\eta} \operatorname{sen} \alpha$ e $\dot{y} = \dot{\xi} \operatorname{sen} \alpha + \dot{\eta} \cos \alpha$, um cálculo abreviada dá $y\dot{x} - x\dot{y} = \eta\dot{\xi} - \xi\dot{\eta}$, de modo que

$$A = -\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} (y\dot{x} - x\dot{y})\, dt = -\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} (\eta\dot{\xi} - \xi\dot{\eta})\, dt.$$

(1) Em vez de acharmos a segunda expressão da área pela integração por partes, podemos derivá-la baseados na propriedade apresentada pela própria definição de área, que permite trocar os eixos dos x e dos y. Deve-se observar, porém, que o sentido da rotação que leva o eixo dos x para a posição do eixo dos y, pelo caminho mais curto, é oposto ao que o eixo dos y deve perfazer para, pelo caminho mais curto atingir o eixo dos x.

Esta equação mostra que a área é independente do sistema de coordenadas.

A expressão integral que estabelecemos para a área, é igualmente independente da escolha do parâmetro. Suponhamos que introduzimos um novo parâmetro τ pela equação $\tau = \tau(t)$. Teremos, então,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\tau}\frac{d\tau}{dt}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{d\tau}\frac{d\tau}{dt},$$

de modo que

$$-\int_{t_0}^{t_1}\left(y\frac{dx}{dt} - x\frac{dy}{dt}\right)dt = -\int_{t_0}^{t_1}\left(y\frac{dx}{d\tau} - x\frac{dy}{d\tau}\right)\frac{d\tau}{dt}\,dt$$
$$= -\int_{\tau_0}^{\tau_1}\left(y\frac{dx}{d\tau} - x\frac{dy}{d\tau}\right)d\tau,$$

onde τ_0 e τ_1 são os valores inicial e final do novo parâmetro, correspondentes aos valores paramétricos t_0 e t_1, respectivamente [1].

Como exemplo de aplicação da fórmula da área, vejamos a elipse $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$. Para determinarmos a área, tomaremos separadamente as duas metades, superior e inferior, representando a superfície pela integral

$$2\frac{b}{a}\int_{-a}^{+a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx.$$

Se, entretanto, usarmos a representação paramétrica, $x = a\cos t$, $y = b\,\mathrm{sen}\,t$, estabelecemos imediatamente a expressão

$$ab\int_0^{2\pi}\mathrm{sen}^2\,t\,dt$$

que pode ser integrada como na pág. 215, e tendo para valor $ab\pi$.

[1] Nesta seção, baseamos o conceito de área sôbre o de integral e mostramos que esta definição analítica tem caráter verdadeiramente geométrico, visto que proporciona quantidades independentes do sistema de coordenadas. É fácil, entretanto, formular uma definição geométrica direta da área limitada por uma curva fechada que não se intercepta da seguinte maneira: a área é o limite superior das áreas de todos os polígonos situados no interior da curva. A demonstração da equivalência das duas definições, que não apresentaremos aqui, é extremamente simples.

4. Áreas em coordenadas polares.

É conveniente, para muitos fins, que possamos exprimir as áreas em função de coordenadas polares. Seja $r = f(\theta)$ a equação de uma curva em coordenadas polares. Representemos por $A(\theta)$ a área de uma região limitada pelo eixo dos x (isto é, a linha $\theta = 0$), pela linha que passa pela origem e que faz o ângulo θ com o eixo dos x, e pelo segmento da curva compreendido entre estas duas linhas. Teremos, então,

$$A'(\theta) = \frac{1}{2} r^2.$$

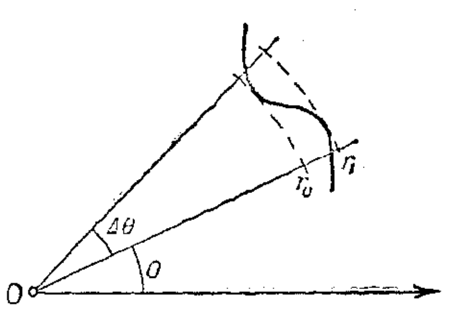


Fig. 10. — Elemento de área em coordenadas polares

Se considerarmos o raio vector correspondente ao ângulo θ e o que corresponde ao ângulo $\theta + \Delta\theta$, representando o menor dêles, neste intervalo angular (fig. 10) por r_0 e o maior por r_1, o setor compreendido pelos raios vectores θ e $\theta + \Delta\theta$ terá a área ΔA, compreendida entre os limites $\frac{1}{2} r_0^2 \Delta\theta$ e $\frac{1}{2} r_1^2 \Delta\theta$. Conseqüentemente,

$$\frac{1}{2} r_0^2 \leqq \frac{\Delta A}{\Delta \theta} \leqq \frac{1}{2} r_1^2,$$

e, passando ao limite quando $\Delta\theta \to 0$, obtemos a relação acima. Pelo teorema fundamental do cálculo integral, a área do setor compreendido entre os ângulos polares α e β é dada pela expressão

$$\frac{1}{2} \int_\alpha^\beta r^2 \, d\theta.$$

Se $\beta > \alpha$, esta expressão não pode ser menor do que zero. Como vemos imediatamente que, à medida que θ cresce, o ponto com coordenadas (r, θ) descreve o contôrno da área no sentido positivo, isto está de acôrdo com a nossa convenção prévia sôbre o sinal.

Como exemplo, consideremos a área limitada por um laço da lemniscata. A equação da lemniscata é (pág. 73) $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$, obtendo-se um laço, fazendo θ variar de $-\pi/4$ até $+\pi/4$. Teremos, então, a expressão

$$a^2 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos 2\theta \, d\theta$$

para a área. Podemos integrá-la imediatamente, introduzindo a nova variável $u = 2\theta$, obtendo para valor da área, a^2.

5. Comprimento das curvas.

O *comprimento de um arco de curva* é outro conceito geométrico importante que nos leva à integração.

Primeiramente exporemos, geomètricamente, como fomos levados à definição do comprimento de uma curva arbitrária. O processo elementar para a medida de comprimento consiste na comparação da extensão a ser medida com padrões retilíneos de comprimento. O método mais simples consistiria, portanto, em aplicar o padrão de comprimento à curva, com os seus extremos sôbre a mesma, e contar quantas vêzes o processo deve ser repetido, do princípio ao fim da curva. O processo seria tornado mais preciso, empregando-se unidades de comprimento cada vez menores. Por analogia com esta idéia intuitiva elementar, definiremos o comprimento de uma curva da maneira seguinte. Suporemos que a curva é dada pelas equações $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\alpha \leqq t \leqq \beta$. (O que inclui as curvas da forma $y = f(x)$, desde que se possa escrever $y = f(t)$, $x = t$.) No intervalo compreendido entre α e β, escolheremos os pontos $t_0 = \alpha$, t_1, t_2, $\ldots$, $t_n = \beta$, na ordem em que estão escritos. Os pontos da curva que correspondem a êstes valores t, serão unidos por retas, segundo a sua ordem natural, formando assim parte de um polígono inscrito na curva. Mediremos, agora, o perímetro dêste polígono. Êste comprimento dependerá do modo como os pontos t_ν, ou, como podemos dizer ainda, os vértices do polígono, forem escolhidos. Deixemos o número de pontos t_ν crescer indefinidamente, de sorte que o comprimento do maior subintervalo, no intervalo $\alpha \leqq t \leqq \beta$ tenda simultâneamente para zero. Isto faz com que o número de lados do polígono cresça sem limite, ao passo que o comprimento do maior lado tende para 0. O comprimento da curva poderá, portanto, ser definido como o limite para o qual tendem os polígonos inscritos, desde que tal limite exista e seja independente da maneira particular pela qual os polígonos foram escolhidos. Sòmente quando se verifica a existência dêste limite (hipótese de *retificação*) é que se pode falar em comprimento da curva. Veremos, em breve, que classes muito extensas de curvas podem ter a sua retificação demonstrada.

Para exprimir analìticamente o comprimento por meio de uma integral, consideraremos a curva, de fato, como representada pela função

$y = f(x)$, com uma derivada contínua y'. Pelos pontos $a = x_1, x_2, \ldots, x_n = b$, dividimos o intervalo $a \leqq x \leqq b$ do eixo dos x, acima do qual está situada a curva em estudo, em $(n-1)$ subintervalos de comprimento $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_{n-1}$. Inscreveremos então um polígono na curva, cujos vértices correspondam, verticalmente, aos pontos de divisão. O comprimento total dêsse polígono inscrito será, de acôrdo com o teorema de Pitágoras (fig. 11), dado pela expressão

$$\sum_{\nu=1}^{n-1} \sqrt{\Delta x_\nu^2 + \Delta y_\nu^2} = \sum_{\nu=1}^{n-1} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_\nu}{\Delta x_\nu}\right)^2}\, \Delta x_\nu.$$

Mas o teorema do valor médio do cálculo diferencial diz que o quociente das diferenças $\Delta y_\nu / \Delta x_\nu$ é igual a $f'(\xi_\nu)$, sendo ξ_ν um valor intermediário do intervalo Δx_ν. Se, agora, n crescer além de qualquer

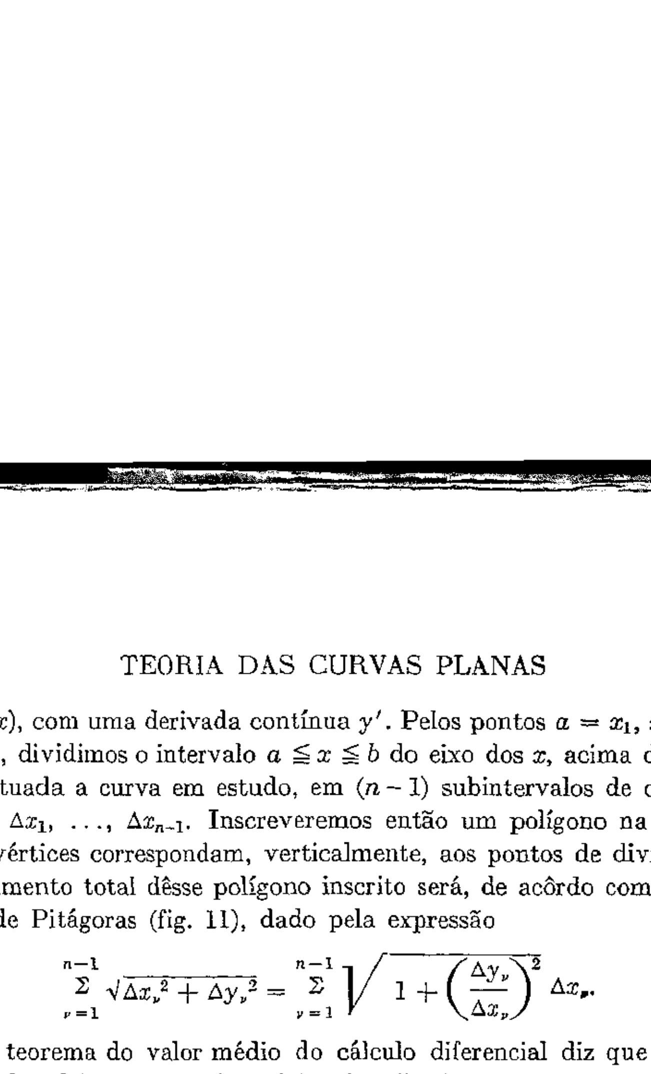


Fig. 11. — Retificação de curvas

limite e, ao mesmo tempo, o comprimento do maior subintervalo Δx_ν tender para zero, pela definição de integral, a expressão enunciada tenderá para o limite

$$\int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, dx.$$

Visto a passagem ao limite nos conduzir sempre ao mesmo resultado, a saber, a integral, qualquer que seja a forma pela qual o intervalo foi subdividido, podemos estabelecer o seguinte teorema:

Tôda a curva $y = f(x)$, *para a qual a derivada* $f'(x)$ *é contínua, é retificável e o seu comprimento entre* $x = a$ *e* $x = b$ $(b \geqq a)$ *é dado pela fórmula*

$$s(a, b) = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, dx.$$

Se designarmos por s o comprimento do arco, medido a partir de um ponto fixo arbitrário até o ponto de abscissa x, a equação acima dá-nos a seguinte expressão para a derivada do comprimento do arco, em relação a x:

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + y'^2}.$$

A expressão obtida para o comprimento do arco está, ainda, sujeita à hipótese especial e artificial de que a curva consiste em um ramo unívoco, acima do eixo dos x. A representação paramétrica, porém, livra-nos desta restrição. Se a curva da espécie que estamos considerando fôr dada sob forma paramétrica, pelas equações $x = x(t)$, $y = y(t)$, obteremos a forma paramétrica do comprimento do arco, introduzindo o parâmetro t na expressão encontrada

$$s(\alpha, \beta) = \int_\alpha^\beta \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt,$$

onde α e β são os valores de t que correspondem, respectivamente, aos pontos da curva $x = a$ e $x = b$.

A expressão paramétrica do comprimento da curva apresenta uma considerável vantagem sôbre a forma primitiva, a qual consite em não ficar restrita ùnicamente aos ramos unívocos das curvas representadas por $y = f(x)$, mas verificar-se igualmente para arcos arbitrários, inclusive das curvas fechadas, desde que as derivadas $\dot{x}$ e $\dot{y}$ sejam contínuas ao longo dos arcos.

Reconheceremos esta afirmação mais fàcilmente, se retornarmos à fórmula do comprimento do polígono inscrito. Supomos que $\dot{x}$ e $\dot{y}$ sejam contínuas ao longo do arco. Como na definição, subdividiremos o intervalo $\alpha \leqq t \leqq \beta$ pelos pontos $t_0 = \alpha, t_1, \ldots, t_n = \beta$, com as diferenças Δt_ν, e faremos dos pontos correspondentes sôbre a curva vértices de um polígono inscrito; na passagem ao limite $n \to \infty$, admitimos que a maior diferença Δt_ν tende para 0. Se escrevermos o comprimento do polígono sob a forma

$$\sum_{\nu=1}^{n} \sqrt{\Delta x_\nu^2 + \Delta y_\nu^2} = \sum_{\nu=1}^{n} \sqrt{\left(\frac{\Delta x_\nu}{\Delta t_\nu}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y_\nu}{\Delta t_\nu}\right)^2}\, \Delta t_\nu,$$

veremos logo que a soma tende para a integral $\int_\alpha^\beta \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt$; basta, ùnicamente, lembrar o método geral de formação das integrais

(pág. 133). Se a curva fôr composta de vários arcos dêste tipo, os quais podem unir-se nos vértices, um ao outro, a expressão do comprimento da curva será dada pela soma das integrais correspondentes. Reunindo êstes resultados, podemos estabelecer o seguinte enunciado:

Se as funções x(t) *e* y(t) *forem contínuas no intervalo* $\alpha \leqq t \leqq \beta$ *e se as suas derivadas* $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$, *também forem contínuas, exceto, talvez, para um número finito de descontinuidades com saltos, o arco da curva* $x = x(t)$, $y = y(t)$ *terá para comprimento a expressão*

$$\int_\alpha^\beta \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt,$$

onde a integral, se necessário, pode ser tomada como imprópria, no sentido do Capítulo IV (pág. 245). Em virtude desta fórmula, na qual α deve ser menor que β, há um significado em atribuir um comprimento negativo ao arco de curva percorrido na direção em que o valor do parâmetro t decresce. O sinal do comprimento do arco dependerá, assim, da escolha do parâmetro. Se introduzirmos nova expressão paramétrica para a mesma curva, que não altere o sentido do percurso, isto é, se introduzirmos novo parâmetro pela equação $\tau = \tau(t)$, onde $d\tau/dt < 0$, vemos *a priori* que a fórmula integral que deduzimos daria o mesmo valor, qualquer que fôsse o parâmetro empregado, t ou τ; as duas integrais dando o comprimento da mesma curva devem, forçosamente, ser iguais. Isto, entretanto, pode ser verificado diretamente por

$$\int \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt = \int \sqrt{\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2}\, dt$$
$$= \int \sqrt{\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2}\, d\tau.$$

Deduziremos agora a expressão do comprimento do arco, quando a curva fôr expressa em *coordenadas polares*. Para isto basta substituirmos $\dot{x}$ e $\dot{y}$ por seus valores dados pela fórmula (*a*) (pág. 265) na última equação para obtermos

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2,$$

donde

$$s(\alpha, \beta) = \int_\beta^\alpha \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2}\, dt.$$

Se agora passarmos da expressão paramétrica para a equação sob a forma $r = f(\theta)$, introduzindo o próprio parâmetro $t = \theta$, de sorte que $\dot\theta = 1$, teremos

$$s(\theta_0,\ \theta_1) = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{\dot r^2 + r^2}\, d\theta$$

para expressão do comprimento do arco.

Um exemplo simples do cálculo do comprimento do arco é dado pela parábola $y = \frac{1}{2}x^2$. O comprimento dêste arco é dado imediatamente pela integral $\int_a^b \sqrt{1 + x^2}\, dx$, que, com a substituição $x = \operatorname{Sh} u$, transforma-se em

$$\int_{\operatorname{Arc\,Sh} a}^{\operatorname{Arc\,Sh} b} \operatorname{Ch}^2 u\, du = \frac{1}{2}\int_{\operatorname{Arc\,Sh} a}^{\operatorname{Arc\,Sh} b} (1 + \operatorname{Ch} 2u)\, du = \frac{1}{2}\,(u + \operatorname{Sh} u \operatorname{Ch} u)\Big|_{\operatorname{Arc\,Sh} a}^{\operatorname{Arc\,Sh} b},$$

de modo que o comprimento do arco da parábola entre as abscissas $x = a$ e $x = b$ será dado por

$$s(a,\ b) = \tfrac{1}{2}(\operatorname{Arc\,Sh} b + b\sqrt{1 - b^2} - \operatorname{Arc\,Sh} a - a\sqrt{1 + a^2}).$$

Para a catenária $y = \operatorname{Ch} x$, achamos que

$$s(a,\ b) = \int_a^b \sqrt{1 + \operatorname{Sh}^2 x}\, dx = \int_a^b \operatorname{Ch} x\, dx, \text{ ou } s(a,\ b) = \operatorname{Sh} b - \operatorname{Sh} a.$$

Finalmente, deve ser observado que em muitos casos é conveniente introduzir como parâmetro o comprimento do arco, medido a partir de um ponto fixo P_0 sôbre a curva, isto é, $x = x(s)$ e $y = y(s)$. Os pontos situados em lados opostos da curva, em relação a P_0 corresponderão aos mesmos valores de s, porém, com sinais diferentes. Neste caso, teremos

$$\dot x^2 + \dot y^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 1,$$

donde, por derivação,

$$\dot x\ddot x + \dot y\ddot y = 0;$$

Estas duas últimas fórmulas são de freqüente aplicação.

6. Curvatura das curvas.

A área e o comprimento do arco de uma curva dependem do traçado completo da mesma. Discutiremos um conceito que se refere ao comportamento da curva sòmente na vizinhança de um ponto, a saber, a *curvatura*.

Se imaginarmos a curva descrita uniformemente no sentido positivo, de sorte que iguais comprimentos de arco sejam percorridos em tempos iguais, a direção da curva variará numa razão definida, que tomaremos como medida da curvatura. Se, portanto, designarmos o ângulo compreendido entre a direção positiva da tangente (pág. 264) e a direção positiva do eixo dos x, por α, e se considerarmos α como função do comprimento do arco s, podemos definir a curvatura k pela equação $k = d\alpha/ds$, no ponto correspondente ao comprimento do arco s. Sabemos, porém, que $\alpha = \operatorname{arc\,tg} y'$, logo, pela regra da cadeia,

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\alpha}{dx} \div \frac{ds}{dx} = \frac{y''}{1 + y'^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}}$$

(onde o sinal positivo da raiz quadrada significa que os valores crescentes de x correspondem aos valores crescentes de s). A curvatura será pois, conseqüentemente, dada pela expressão

$$k = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}.$$

Usando a forma paramétrica para y' e y'' obteremos a seguinte expressão simples para a curvatura das curvas representadas paramètricamente:

$$k = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}},$$

a qual, como é lógico, pode ser diretamente deduzida da equação

$$\alpha = \operatorname{arc\,tg} \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \operatorname{arc\,cotg} \frac{\dot{x}}{\dot{y}}.$$

Em contraste com a expressão anterior que depende da equação $y = f(x)$, envolvendo, por conseqüência, uma hipótese especial sôbre a posição do arco em relação ao eixo dos x, a fórmula paramétrica da curvatura tem lugar para todos os arcos ao longo dos quais $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\ddot{x}$ e $\ddot{y}$ são funções contínuas de t e $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 \neq 0$. Em particular, ela é válida para os pontos em que $\dot{x} = 0$, isto é, nos quais dy/dx se torna infinita.

Se introduzirmos o comprimento do arco s como parâmetro, lembrando que $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 1$ e $\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} = 0$, teremos

$$k = \dot{x}\ddot{y} - \dot{x}\ddot{y} = \ddot{y}\left(\dot{x} + \dot{y}\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right) = \frac{\ddot{y}}{\dot{x}} = -\frac{\ddot{x}}{\dot{y}}.$$

Obtivemos, assim, uma expressão particularmente simples para a curvatura.

O *sinal* da curvatura será mudado se invertermos o sentido do percurso da curva, isto é, se substituirmos o parâmetro t ou s pelo novo parâmetro $\tau = -t$ ou $\sigma = -s$. Neste caso $\dot{x}$ e $\dot{y}$ mudam de sinal, porém, $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\dot{x}^2$ ou $\dot{y}^2$ não mudam de sinal, como mostra o cálculo seguinte:

$$\frac{d}{d\tau} x\,[t(\tau)] = \frac{dx}{dt}\,\frac{dt}{d\tau} = (\dot{x})\,(-1);$$

$$\frac{d^2}{d\tau^2} x\,[t(\tau)] = \frac{d}{d\tau}[-\dot{x}\,[(t(\tau)]] = -\frac{d\dot{x}}{dt}\,\frac{dt}{d\tau} = (-\ddot{x})\,(-1).$$

(Dedução semelhante pode ser feita para y.) No caso da expressão $k = \dfrac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}$, estabelecida na página anterior, êste fato está subentendido, pois é natural e comum considerar a curva como descrita da esquerda para a direita, caso em que a raiz quadrada sòmente pode ser positiva.

Como exemplo, estudemos a curvatura do círculo descrito no sentido positivo, com o raio a. Se partirmos da representação paramétrica $x = a\cos t$, $y = a \operatorname{sen} t$, obteremos imediatamente

$$k = \frac{1}{a}.$$

A curvatura do círculo descrito no sentido positivo é a recíproca do próprio raio. Tal resultado assegura-nos que a definição que estabelecemos para a curvatura é realmente apropriada, pois no caso do círculo pensamos, naturalmente, na recíproca do raio como medida da curvatura.

Façamos $\rho = \dfrac{1}{k}$. A quantidade $|\rho| = \dfrac{1}{|k|}$ é, em geral, chamada o *raio de curvatura* da curva, no ponto considerado. Para um determinado ponto da curva, o círculo que a toca neste lugar, que tem o mesmo sentido de percurso e a mesma curvatura, com o centro, além disso, sôbre o lado positivo ou negativo da normal, conforme k seja positivo ou negativo, é denominado *círculo de curvatura* correspondente ao ponto. Suponhamos que a equação do círculo (ou de um arco de círculo contendo o ponto em questão) é dado sob a forma $y = g(x)$.

No ponto considerado teremos, não só $f(x) = g(x)$ e $f'(x) = g'(x)$ como se deduz do fato do círculo e a curva se tocarem, mas, em face da relação

$$\frac{f''(x)}{\sqrt{[1 + f'(x)^2]^3}} = k = \frac{g''(x)}{\sqrt{[1 + g'(x)^2]^3}}$$

teremos, também,

$$f''(x) = g''(x).$$

O centro do círculo de curvatura é denominado *centro de curvatura.* Suas coordenadas são expressas, paramètricamente, por

$$\xi = x - \frac{\rho \dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}, \quad \eta = y + \frac{\rho \dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}.$$

Para demonstrá-lo, basta apenas empregar as fórmulas dos co-senos diretores da normal, sôbre a qual cai o centro de curvatura, a uma distância $1/|k| = |\rho|$ da tangente. Estas fórmulas dão uma expressão para o centro de curvatura em função do parâmetro t. À medida que t descreve o seu percurso, o centro de curvatura vai gerando uma curva, a *evoluta* da curva dada. Visto que com x e y devemos considerar $\dot{x}$, $\dot{y}$ e ρ como funções conhecidas de t, as expressões acima proporcionam as equações paramétricas desta evoluta.

Para exemplos especiais, o leitor pode recorrer ao § 3 (págs. 287 e seguintes) e ao apêndice dêste capítulo (págs. 307 e seguintes).

7. Centro de massa e momento das curvas.

Estudaremos, agora, algumas aplicações, que nos conduzem aos domínios da mecânica. Imaginemos um sistema de n partículas num plano. Sejam $m_1, m_2, \ldots, m_n$ as massas dessas partículas e $y_1, y_2, \ldots, y_n$ suas ordenadas respectivas. Chamaremos, então,

$$T = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu y_\nu = m_1 y_1 + m_2 y_2 + \ldots + m_n y_n$$

o *momento do sistema de partículas em relação ao eixo* x. A expressão $\eta = T/M$, onde M significa a massa total $m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ do sistema, dá-nos a *altura do centro de massa* do sistema de partículas, acima do eixo dos x. O momento em relação ao eixo dos y e a abscissa do centro de massa são determinados de maneira semelhante.

Veremos que esta concepção pode ser fàcilmente generalizada, a fim de proporcionar uma definição do momento de uma curva ao longo da qual a massa está distribuída uniformemente, e das coordenadas ξ e η do seu centro de massa. Sòmente por questão de brevidade, admitiremos que a densidade é constante ao longo da curva, digamos μ. Qualquer distribuição contínua, porém, poderia ser discutida do mesmo modo.

Para atingirmos a generalização necessária, retrocedamos à consideração de um sistema de um número finito de partículas passando, depois, ao limite. Para isto, suponhamos que o comprimento do arco s é introduzido como parâmetro da curva a qual, por sua vez, é subdividida por $(n-1)$ pontos de divisão em arcos de comprimentos Δs_1, Δs_2, ..., Δs_n. A massa $\mu \Delta s_i$ de cada arco Δs_i é suposta concentrada num ponto arbitrário do arco, por exemplo, no de ordenada y_i.

Por definição, o momento dêste sistema de partículas, em relação ao eixo dos x, tem para valor

$$T = \mu \Sigma y_i \Delta s_i.$$

Se a maior parte das quantidades Δs_i tender para 0, a soma tenderá para um limite definido, fornecido pela expressão

$$T = \mu \int_{s_0}^{s_1} y\, ds = \mu \int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1 + y'^2}\, dx,$$

a qual aceitaremos, naturalmente, como definição do momento da curva em relação ao eixo dos x. Desde que a massa total da curva é igual ao seu comprimento multiplicado por μ,

$$\mu \int_{s_0}^{s_1} ds = \mu(s_1 - s_0),$$

somos levados, imediatamente, às seguintes expressões das coordenadas do centro de massa:

$$\eta = \frac{\int_{s_0}^{s_1} y\, ds}{s_1 - s_0}, \quad \xi = \frac{\int_{s_0}^{s_1} x\, ds}{s_1 - s_0}.$$

Êstes enunciados são, efetivamente, *definições* do momento e do centro de massa da curva. Por outro lado, porém, são generalizações tão evidentes do caso mais simples de um certo número de partículas,

que esperamos naturalmente — como acontece na realidade — que qualquer enunciado da mecânica que envolva o centro de massa ou o momento de um sistema de partículas, seja igualmente válido para as curvas. Em particular, a posição do centro de massa, em relação à curva, é independente do sistema de coordenadas.

8. Área e volume das superfícies de revolução.

Se efetuarmos a rotação da curva $y = f(x)$, para a qual $f(x) \geqq 0$, em tôrno do eixo dos x, ela descreverá uma *superfície de revolução.* A área desta superfície, cujas abscissas supomos compreendidas entre os limites x_0 e $x_1 > x_0$, pode ser obtida por discussão análoga à precedente. Se substituirmos a curva por um polígono inscrito, teremos uma figura composta de certo número de cones delgados e truncados, em vez de uma superfície curva. Desenvolvendo a sugestão intuitiva, definiremos a área das superfícies de revolução como o limite das áreas das superfícies cônicas mencionadas, quando o comprimento do maior lado do polígono inscrito tender para 0. Sabemos da geometria elementar que a área de cada cone truncado é igual ao seu apótema multiplicado pela circunferência da seção circular do raio médio. Adicionando estas expressões e efetuando, então, a passagem ao limite, obteremos a expressão

$$A = 2\pi\int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1 + y'^2}\, dx = 2\pi\int_{s_0}^{s_1} y\, ds$$

para a área. Em palavras, êste resultado significa que a área de uma superfície de revolução é igual ao comprimento da curva geradora, multiplicado pela distância percorrida pelo centro de massa (regra de Guldin).

Da mesma forma acharemos que o volume compreendido pela superfície de revolução, limitado nos extremos pelos planos $x = x_0$ e $x = x_1 > x_0$ será

$$V = \pi\int_{x_0}^{x_1} y^2\, dx.$$

Esta fórmula foi deduzida seguindo-se a sugestão intuitiva que apresenta o volume em questão, como o limite dos volumes das figuras já descritas, que consistem em cones truncados. A conclusão da demonstração será atribuição do leitor.

9. **Momento de inércia.**

No estudo do movimento de rotação, na mecânica, certas quantidades chamadas "momentos de inércia" desempenham um papel muito importante. Trataremos aqui, ràpidamente, destas expressões.

Suponhamos que uma partícula m, situada a uma distância y do eixo dos x, gira uniformemente em tôrno dêste eixo com a velocidade angular ω (isto é, gira de um ângulo ω na unidade de tempo). A *energia cinética* da partícula, representada pela metade do produto da massa pelo quadrado da velocidade, é, lògicamente,

$$\frac{m}{2}(y\omega)^2.$$

Chamaremos o coeficiente de $\frac{1}{2}\omega^2$, isto é, a quantidade my^2, o *momento de inércia da partícula, em tôrno do eixo dos* x.

Da mesma forma, se tivermos n partículas de massas $m_1, m_2, \ldots, m_n$, com as ordenadas $y_1, y_2, \ldots, y_n$, denominaremos a expressão

$$T = \sum_i m_i y_i^2$$

momento de inércia do sistema de massas em tôrno do eixo dos x. O momento de inércia é uma quantidade que pertence ao próprio sistema de massas, independentemente do seu movimento. Sua importância reside no fato de que se todo o sistema entrar em movimento rígido em tôrno de um eixo, sem alteração das distâncias existentes entre os pares de partículas, a energia cinética será obtida multiplicando-se o momento de inércia em tôrno do eixo considerado pela metade do quadrado da velocidade angular. Vemos, assim, que o momento de inércia representa o mesmo papel, na rotação em tôrno de um eixo, que a massa, no movimento retilíneo.

Suponhamos que temos uma curva arbitrária. $y = f(x)$, situada entre as abscissas x_0 e x_1 ($> x_0$), ao longo da qual se distribui a massa uniformemente, com densidade unitária. Para definirmos o momento de inércia de tal curva, procederemos como o fizemos na subseção 7 (pág. 284). Como naquela ocasião, chegaremos a uma expressão para o momento de inércia em tôrno do eixo dos x, a saber,

$$T_x = \int_{s_0}^{s_1} y^2\,ds = \int_{x_0}^{x_1} y^2\sqrt{1 + y'^2}\,dx.$$

Para o momento de inércia em tôrno do eixo dos y teremos a expressão correspondente:

$$T_y = \int_{s_0}^{s_1} x^2\,ds = \int_{x_0}^{x_1} x^2\sqrt{1 + y'^2}\,dx.$$

3. Exemplos

A teoria das curvas planas, com sua grande variedade de formas e propriedades especiais, apresenta uma rica coleção de exemplos dêstes conceitos abstratos. Para evitar, porém, que nos percamos no vulto dos pormenores, limitar-nos-emos a algumas poucas aplicações típicas.

1. Ciclóide comum.

Das equações $x = a(t - \operatorname{sen} t)$, $y = a(1 - \cos t)$ (pág. 261), obtemos desde logo, $\dot{x} = a(1 - \cos t)$, $\dot{y} = a \operatorname{sen} t$. O comprimento do arco será, portanto,

$$s = \int_0^\alpha \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt = \int_0^\alpha \sqrt{2a^2(1 - \cos t)}\, dt.$$

Como, porém, $1 - \cos t = 2 \operatorname{sen}^2 \frac{t}{2}$, o integrando é igual a $2a \operatorname{sen} \frac{t}{2}$, e para $0 \leqq \alpha \leqq 2\pi$,

$$s = 2a \int_0^\alpha \operatorname{sen} \frac{t}{2}\, dt = -4a \cos \frac{t}{2}\Big|_0^\alpha = 4a\left(1 - \cos \frac{\alpha}{2}\right) = 8a \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{4}.$$

Se, em particular, considerarmos o comprimento do arco compreendido entre dois vértices sucessivos, podemos escrever $\alpha = 2\pi$, visto que o intervalo $0 \leqq t \leqq 2\pi$ de valores do parâmetro corresponde a uma revolução completa do círculo gerador. Obteremos, assim, o valor $8a$, isto é, o comprimento do arco da ciclóide, compreendido entre os vértices sucessivos, é igual a quatro vêzes o diâmetro do círculo gerador.

Da mesma forma, calcularemos a área limitada pelo arco da ciclóide e pelo eixo dos x:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} y\dot{x}\, dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2\, dt \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t)\, dt \\ &= a^2 \left(t - 2 \operatorname{sen} t + \frac{t}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2t}{4}\right)\Big|_0^{2\pi} = 3a^2\pi. \end{aligned}$$

Esta área vale, portanto, três vêzes a área do círculo gerador.

O raio de curvatura $\rho = 1/k$ será representado por

$$\rho = \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}} = -2a\sqrt{2(1 - \cos t)} = -4a\left|\operatorname{sen} \frac{t}{2}\right|.$$

Nos pontos $t = 0$, $t = \pm 2\pi$, ... esta expressão se anula. Nestes pontos, efetivamente, acham-se os vértices, onde a ciclóide encontra o eixo dos x sob ângulos retos.

A área da superfície de revolução gerada pela rotação de um arco da ciclóide em tôrno do eixo dos x é dada, de acôrdo com a fórmula já deduzida (pág. 285), por

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_0^{8a} y\, ds = 2\pi \int_0^{2\pi} a(1-\cos t).2a \operatorname{sen} \frac{t}{2} dt \\ &= 8a^2\pi \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^3 \frac{t}{2} dt = 16a^2\pi \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3 u\, du \\ &= 16a^2\pi \int_0^{\pi} (1-\cos^2 u) \operatorname{sen} u\, du. \end{aligned}$$

A última integral pode ser calculada pela substituição de $\cos u = v$. Acharemos, então, que

$$A = 16a^2\pi\left(-\cos u + \frac{1}{3}\cos^3 u\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{64a^2\pi}{3}.$$

Como exercício, o leitor poderá determinar a altura η do centro de massa da ciclóide acima do eixo dos x, assim como o movimento de inércia desta curva, T_x. Os resultados são

$$\eta = \frac{4}{3}a = \frac{A}{2\pi s} \quad \text{e} \quad T_x = \frac{256}{15}a^3.$$

2. Catenária.

O comprimento do arco da catenária já foi determinado num exemplo da seção precedente (pág. 280), tendo sido encontrado para seu valor

$$s = \int_a^b \operatorname{Ch} x\, dx = \operatorname{Sh} b - \operatorname{Sh} a.$$

A área da superfície de revolução gerada pela rotação da catenária em tôrno do eixo dos x, a chamada *catenóide*, é dada por

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_a^b \operatorname{Ch}^2 x\, dx = 2\pi \int_a^b \frac{1+\operatorname{Ch} 2x}{2} dx \\ &= \pi\left(b - a + \frac{1}{2}\operatorname{Sh} 2b - \frac{1}{2}\operatorname{Sh} 2a\right). \end{aligned}$$

Desta expressão obtemos a altura do centro de massa do arco que se estende de a até b:

$$\eta = \frac{A}{2\pi s} = \frac{b - a + \frac{1}{2}\operatorname{Sh} 2b - \frac{1}{2}\operatorname{Sh} 2a}{2(\operatorname{Sh} b - \operatorname{Sh} a)}.$$

Finalmente, a curvatura é fornecida pela equação

$$k = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} = \frac{\operatorname{Ch} x}{\operatorname{Ch}^3 x} = \frac{1}{\operatorname{Ch}^2 x}.$$

3. Elipse e lemniscata.

O comprimento dos arcos destas duas curvas não pode ser reduzido a funções elementares, visto pertencer à classe das "integrais elípticas", mencionadas na pág. 243.

Para a elipse $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, teremos:

$$s = \frac{1}{a}\int\sqrt{\frac{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}{a^2 - x^2}}\,dx = a\int\frac{1 - \chi^2\xi^2}{\sqrt{(1 - \xi^2)(1 - \chi^2\xi^2)}}\,d\xi,$$

onde fizemos $x/a = \xi$ e $1 - b^2/a^2 = \chi^2$. Pela substituição $\xi = \operatorname{sen}\varphi$ esta integral pode ser expressa pela fórmula

$$s = \int\sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)\operatorname{sen}^2\varphi}\,d\varphi = a\int\sqrt{1 - \chi^2\operatorname{sen}^2\varphi}\,d\varphi.$$

Para se obter o semiperímetro da elipse, fazemos x percorrer o intervalo de $-a$ até $+a$, correspondente a

$$-1 \leqq \xi \leqq +1 \quad \text{ou} \quad -\pi/2 \leqq \varphi \leqq +\pi/2.$$

Para a lemniscata, cuja equação em coordenadas polares é $r^2 = a^2\cos 2t$ teremos, anàlogamente,

$$s = \int\sqrt{r^2 + \dot{r}^2}\,dt = \int\sqrt{2a^2\cos 2t + 2a^2\frac{\operatorname{sen}^2 2t}{\cos 2t}}\,dt$$
$$= a\sqrt{2}\int\frac{dt}{\sqrt{\cos 2t}} = a\sqrt{2}\int\frac{dt}{\sqrt{1 - 2\operatorname{sen}^2 t}}.$$

Se introduzirmos $u = \operatorname{tg} t$ como variável independente, na última integral, virá

$$\operatorname{sen}^2 t = \frac{u^2}{1 + u^2}, \quad dt = \frac{du}{1 + u^2},$$

e, por conseqüência,

$$s = a\sqrt{2}\int\frac{du}{\sqrt{1 - u^4}}.$$

Em cada laço completo da lemniscata u varia desde -1 até $+1$ e o comprimento do arco será, então, igual a

$$a\sqrt{2}\int_{-1}^{+1}\frac{du}{\sqrt{1 - u^4}},$$

integral elíptica especial, que representou papel importantíssimo nas pesquisas de Gauss.

EXEMPLOS

1. Determinar a área limitada pela parábola semicúbica $y = x^{3/2}$, pelo eixo dos x, e pelas linhas $x = a$ e $x = b$.

2. Calcular a área da região limitada pela linha $y = x$ e pela metade inferior do laço do fólio de Descartes. (Empregar a representação paramétrica estabelecida no exemplo 7 da pág. 267.)

3. Calcular a área de um setor da espiral de Arquimedes $r = a\theta$, $(a > 0)$.

4. Determinar a área da cardióide (ex. 3, pág. 267) empregando coordenadas polares.

5. Calcular a área da astróide (ex. 6, pág. 267).

6. Determinar a área da curva pedal do círculo $x^2 + y^2 = 1$ em relação ao ponto $P(x_0, 0)$ do eixo dos x. Provar que tal área é mínima, quando P coincide com a origem.

7. Fazer o mesmo para a elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

8. Estabelecer a representação paramétrica da cardióide, empregando o comprimento do arco como parâmetro.

9. Fazer o mesmo para a ciclóide.

10. Calcular o comprimento do arco da parábola semicúbica $y = x^{3/2}$.

11. Calcular o comprimento da astróide.

12. Determinar o comprimento do arco:

(a) da espiral de Arquimedes $r = a\theta$, $(a > \theta)$.
(b) da espiral logarítmica $r = e^{m\theta}$.
(c) da cardióide (ex. 3, pág. 267).
(d) da curva $r = a(\theta^2 - 1)$.

13. Achar o raio de curvatura (a) da parábola $y = x^2$; (b) da elipse $x = a\cos\varphi$, $y = b \operatorname{sen}\varphi$, como função de x e de φ, respectivamente. Calcular os raios de curvatura máximo e mínimo, determinando os pontos em que êles ocorrem.

14. Desenhar a curva

$$x = \int_0^t \frac{\cos u}{\sqrt{u}}\, du, \quad y = \int_0^t \frac{\operatorname{sen} u}{\sqrt{u}}\, du,$$

determinando seu raio de curvatura.

15. Demonstrar que a fórmula da curvatura da curva $x = x(t)$, $y = y(t)$ conserva-se inalterada pela rotação dos eixos, e também pela mudança do parâmetro dado por $t = \varphi(\tau)$, onde $\varphi'(\tau) > 0$.

16. Seja a equação de uma curva em coordenadas polares $r = f(\theta)$. Demonstrar que a curvatura é fornecida pela fórmula

$$k = \frac{2r'^2 - rr'' + r^2}{(r'^2 + r^2)^{3/2}},$$

onde

$$r' = \frac{df}{d\theta}, \quad r'' = \frac{d^2f}{d\theta^2}.$$

17. Determinar o volume e a área superficial de uma zona esférica de raio r, isto é, da porção da esfera limitada por dois planos paralelos distantes h_2, h_1, respectivamente, do centro.

18. Calcular o volume e a área superficial do *toro* ou *anel*, gerado pela rotação de um círculo em tôrno de uma linha que não o corte.

19. Calcular a área da *catenóide*, ou seja, a superfície obtida pela rotação de um arco da catenária, $y = \operatorname{Ch} x$, em tôrno do eixo dos x.

20. Desenhar as curvas definidas pelas equações

$$x = \int_0^t \cos(\tfrac{1}{2}\pi t^2)\, dt, \quad y = \int_0^t \operatorname{sen}(\tfrac{1}{2}\pi t^2)\, dt.$$

Qual o comportamento da curva quando t varia desde $-\infty$ até $+\infty$? Calcular a curvatura k em função do comprimento do arco.

21. A curva para a qual o comprimento da tangente, compreendido entre o ponto de contacto e o eixo dos y, é sempre igual a 1, é denominada *tratória*. Estabelecer a sua equação. Mostrar que o raio de curvatura em cada ponto da curva é inversamente proporcional ao comprimento da normal compreendida entre o ponto da curva e o eixo dos y. Calcular o comprimento do arco da tratória, estabelecendo as equações paramétricas em função do comprimento do arco.

22. Seja $x = x(t)$, $y = y(t)$ uma curva fechada. Mede-se um comprimento constante p sôbre a normal à curva. A extremidade dêste segmento descreve uma curva denominada *curva paralela* à original. Achar a área, o comprimento do arco e o raio de curvatura da curva paralela.

23. Determinar o centro de massa de um arco arbitrário (*a*) de um círculo de raio r; (*b*) da catenária.

24. Calcular o momento de inércia em tôrno do eixo dos x do contôrno do retângulo $a \leqq x \leqq b$, $\alpha \leqq y \leqq \beta$.

25. Determinar o momento de inércia de um arco da catenária $y = \operatorname{Ch} x$ (*a*) em tôrno do eixo dos x; (*b*) em tôrno do eixo dos y.

26. A equação $y = f(x) + \alpha$, $a \leqq x \leqq b$, representa uma família de curvas, uma para cada valor do parâmetro α. Demonstrar que, em tal família de curvas, a que tem o momento de inércia mínimo, em tôrno do eixo dos x, é aquela cujo centro de massa está situado no eixo dos x.

4. PROBLEMAS SIMPLES SÔBRE A MECÂNICA DAS PARTÍCULAS

O cálculo diferencial e integral deve à ciência da mecânica o seu posterior desenvolvimento, além da geometria. A mecânica assenta sôbre certos princípios básicos, que foram primeiramente divulgados por Newton. O enunciado dêstes princípios já envolve o conceito de derivada, e as suas aplicações requerem a teoria da integração. Sem analisar minuciosamente êstes princípios, ilustraremos, por intermédio de alguns exemplos simples, como o cálculo diferencial e integral é aplicado na mecânica.

1. Hipóteses fundamentais da mecânica.

Restringiremos o nosso estudo à consideração de uma única partícula, isto é, um ponto no qual se supõe concentrada a massa m. Admitiremos, além disso, que o movimento sòmente se processa segundo uma curva fixa sôbre a qual a posição da partícula é caracterizada pelo comprimento do arco s, medido a partir de um ponto fixo da curva. Em particular, a curva pode ser uma linha reta, caso em que empregaremos a abscissa x como coordenada da partícula, em vez do comprimento s. O movimento do ponto é determinado exprimindo a coordenada $s = \phi(t)$ em função do tempo. Por *velocidade do movimento* compreendemos a derivada $\phi'(t)$ ou, como podemos escrever,

$$\frac{ds}{dt} = \phi'(t) = \dot{s}.$$

A segunda derivada

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \phi''(t) = \ddot{s},$$

será denominada *aceleração*.

Na mecânica, parte-se da hipótese de que o movimento de um ponto pode ser representado por meio de *fôrças* de direção e grandeza definidas. A segunda lei fundamental de Newton, no caso do movimento sôbre a curva que mencionamos, pode ser enunciada como segue:

A massa multiplicada pela aceleração é igual à fôrça que atua sôbre a partícula na direção da curva. Em símbolos

$$m\ddot{s} = F.$$

Assim, a fôrça e a aceleração têm sempre a mesma direção, a qual será a dos valores crescentes de s se a velocidade fôr crescente neste sentido ou a oposta, no caso contrário.

A lei de Newton nada mais é, em primeira instância, do que uma definição do conceito de fôrça. O primeiro membro da equação apresentada é uma quantidade passível de determinação, pela observação do movimento, por meio da qual medimos a fôrça. A equação citada, porém, tem significado bem mais profundo. Efetivamente, em muitos casos, podemos determinar a fôrça que age, baseados em outras hipóteses físicas, abstraindo-nos de levar em consideração o movimento correspondente. A lei fundamental de Newton que enunciamos não é, portanto, uma simples *definição de fôrça*, mas, ao contrário, uma relação da qual podemos tirar importantes conclusões acêrca do movimento.

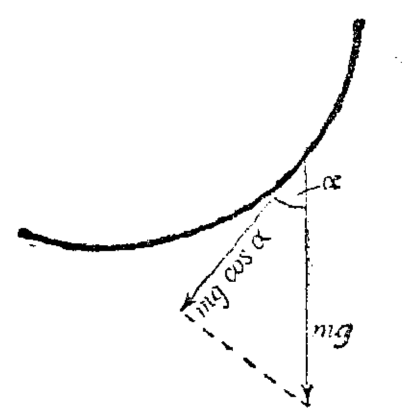


Fig. 12. — Movimento de uma partícula sôbre uma curva dada, sob a ação da gravidade

O exemplo mais importante de uma fôrça conhecida nos é dado pela *gravidade*. Sabemos, por medida direta, que tal fôrça age sôbre a massa m e é dirigida verticalmente de cima para baixo, sendo sua intensidade igual a mg, onde g, a denominada gravitação universal, é constante para cada lugar e igual a, aproximadamente, 981 se o tempo fôr medido em segundos e os comprimentos em centímetros. Quando a massa se move sôbre uma determinada curva, aprendemos por experiência que a fôrça da gravidade, na direção da curva, é igual a $mg \cos \alpha$, onde α indica o ângulo formado pela vertical e pela tangente à curva no ponto considerado (fig. 12).

O problema básico da mecânica, no caso do movimento sôbre uma curva dada, é o seguinte: conhecendo-se a fôrça que atua sôbre a partícula (por exemplo, a fôrça da gravidade), determinar a posição do ponto, isto é, sua coordenada s ou x, em função do tempo.

Se nos restringirmos ao caso mais simples, no qual a fôrça $mf(s)$ [1] é conhecida, de início, em função do comprimento do arco,— de modo

[1] A separação do fator m na expressão em que a fôrça é dada não é essencial, mas torna a fórmula mais simples.

que a fôrça seja independente do tempo, — veremos como o movimento ao longo da curva pode ser determinado pela equação

$$\ddot{s} = \frac{1}{m}F = f(s).$$

Deparamos aqui com uma *equação diferencial*, isto é, uma equação na qual ocorrem, tanto a função como a sua derivada, e pela qual devemos determinar uma função desconhecida, — neste caso, $s(t)$ — (cap. III, § 7, pág. 178).

2. Queda livre dos corpos. Resistência do ar.

No caso da queda livre de uma partícula ao longo do eixo dos x, em posição vertical, e lei de Newton dá a equação diferencial

$$\ddot{x} = g.$$

Daí se deduz que $\dot{x}(t) = gt = v_0$ é uma constante de integração. É fácil encontrar-se o seu significado, fazendo-se $t = 0$. Achamos, então, $\dot{x}(0) = v_0$; isto é, v_0 é a velocidade da partícula no instante a partir do qual se começa a contar o tempo, ou seja, a *velocidade inicial*. Efetuando outra integração, teremos

$$x(t) = \tfrac{1}{2}gt^2 + v_0t + x_0,$$

onde x_0 é, também, uma constante de integração, cujo valor é ainda determinado fazendo-se $t = 0$. Vemos, assim, que x_0 é a *posição inicial*, isto é, a coordenada do ponto de início do movimento.

Inversamente, podemos escolher a posição inicial x_0 e a velocidade inicial v_0 arbitràriamente, obtendo então a representação completa do movimento partindo da equação $x = \tfrac{1}{2}gt^2 + v_0t + x_0$.

Se levarmos em conta o efeito do *atrito* ou *resistência do ar* sôbre a partícula, considerá-lo-emos como uma fôrça de direção oposta à do movimento, de acôrdo com o que devemos estabelecer hipóteses físicas definidas (¹). Analisaremos os resultados provenientes de diferentes suposições: (a) a resistência é proporcional à velocidade, sendo dada por uma expressão da forma $-r\dot{x}$, onde r é uma constante positiva; (b) a resistência é proporcional ao quadrado da velocidade, sendo a fórmula $-rx^2$. De acôrdo com a lei de Newton, as equações do movimento serão

$$(a)\ m\ddot{x} = mg - r\dot{x}, \quad (b)\ m\ddot{x} = mg - r\dot{x}^2.$$

Se considerarmos primeiramente $x = u(t)$ como a função procurada, teremos $\ddot{x}(t) = \ddot{u}(t)$, de sorte que

$$(a)\ m\dot{u} = mg - ru, \quad (b)\ m\dot{u} = mg - ru^2.$$

(¹) Estas hipóteses devem ser escolhidas, tendo-se em vista o sistema particular estudado. Por exemplo, a lei da resistência para velocidades baixas não é a mesma que para as grandes velocidades (velocidade de projéteis, para concretizar).

Em lugar de determinar u em função de t, por estas equações, podemos deduzir t em função de u, escrevendo as equações diferenciais sob a forma

$$(a)\ \frac{dt}{du} = \frac{1}{g - ru/m}, \qquad (b)\ \frac{dt}{du} = \frac{1}{g - ru^2/m}.$$

Com o auxílio dos métodos apresentados no capítulo anterior, podemos efetuar a integração imediatamente, obtendo

$$(a)\ t(u) = -\frac{m}{r}\log\left(1 - \frac{r}{mg}u\right) + t_0,$$

$$(b)\ t(u) = -\frac{1}{2}k\log\frac{kg - u}{kg + u} + t_0,$$

onde fizemos $\sqrt{m/rg} = k$ e onde t_0 é uma constante de integração. Resolvendo estas equações em relação a u, virá

$$(a)\ u(t) = -\frac{mg}{r}(e^{-r(t-t_0)/m} - 1),$$

$$(b)\ u(t) = -gk\frac{e^{-2(t-t_0)/k} - 1}{e^{-2(t-t_0)/k} + 1}.$$

Estas relações revelam uma importante propriedade do movimento. A velocidade não cresce com o tempo além de qualquer limite, mas converge para um limite determinado, dependente da massa m. Assim,

$$(a)\ \lim_{t\to\infty} u(t) = \frac{mg}{r}, \qquad (b)\ \lim_{t\to\infty} u(t) = \sqrt{\frac{mg}{r}}.$$

Uma segunda integração, operada sôbre as expressões para $u(t) = \dot{x}$, com o auxílio dos métodos expostos no capítulo precedente, dá os resultados (que podem ser verificados por derivação)

$$(a)\ x(t) = \frac{m^2}{r^2}ge^{-r(t-t_0)/m} + \frac{mg}{r}t + c,$$

$$(b)\ x(t) = \frac{m}{r}\log\operatorname{ch}\sqrt{\frac{rg}{m}}(t - t_0) + c,$$

onde c é uma nova constante de integração. As duas constantes de integração, t_0 e c, são determinadas prontamente, conhecendo-se a posição inicial $x(0) = x_0$ e a velocidade, também inicial, $\dot{x}(0) = u(0) = v_0$ da partícula que cai.

3. Tipo mais simples de vibração elástica.

Como segundo exemplo estudaremos o movimento de uma partícula que se desloca ao longo do eixo dos x, sendo atraída para a origem por uma fôrça elástica. Relativamente a esta fôrça elástica, admitiremos que seja sempre dirigida para a origem e que sua intensidade seja proporcional à sua distância da origem. Em outras palavras, faremos tal fôrça igual a $-kx$, onde o coeficiente k exprime a

medida da resistência da ligação elástica. Como supomos que k é positivo, a fôrça será negativa quando x fôr positivo, e positiva, quando x fôr negativo. A lei de Newton diz que

$$m\ddot{x} = -kx.$$

Não podemos esperar que esta equação diferencial determine completamente o movimento, mas é plausível supor que num dado instante de tempo, digamos, $t = 0$, possamos determinar arbitràriamente a posição inicial $x(0) = x_0$, assim como a velocidade inicial $\dot{x}(0) = v_0$. Em linguagem física, isto quer dizer que a partícula pode partir de uma posição arbitrária com uma velocidade qualquer, ficando o movimento determinado, depois disto, pela equação diferencial. Matemàticamente, esta possibilidade é traduzida pelo fato de que a solução geral da equação diferencial proposta contém duas constantes de integração, à primeira vista indeterminadas, cujos valores são estabelecidos em face das condições iniciais, como demonstraremos a seguir.

Podemos encontrar, com facilidade, uma solução dêste tipo, diretamente. Se fizermos $\omega = \sqrt{k/m}$, verificaremos imediatamente que a nossa equação diferencial será satisfeita por tôdas as funções da forma

$$x(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \operatorname{sen} \omega t,$$

onde c_1 e c_2 são constantes arbitràriamente escolhidas. Veremos, na pág. 297, que não existem outras soluções para a equação diferencial proposta e, portanto, cada movimento dêste tipo, sob a influência de uma fôrça elástica, é representado pela expressão acima. Esta equação pode ser transformada com facilidade, vindo

$$x(t) = a \operatorname{sen} \omega(t - \delta) = -a \operatorname{sen} \omega\delta \cos \omega t + a \cos \omega\delta \operatorname{sen} \omega t;$$

basta, ùnicamente, fazer $-a \operatorname{sen} \omega\delta = c_1$ e $a \cos \omega\delta = c_2$, empregando as novas constantes a e δ em vez de c_1 e c_2. Os movimentos dêste tipo são *senoidais* ou *harmônicos simples*. São periódicos; qualquer estado, (isto é, posição $x(t)$ e velocidade $\dot{x}(t)$) é repetido depois do tempo $T = 2\pi/\omega$, que é denominado *período*, visto as funções sen ωt e cos ωt terem o período T. O número a é chamado *deslocamento máximo* ou *amplitude* da oscilação. O número $1/T = \omega/2\pi$ é a *freqüência* da oscilação, indicando o número de oscilações na unidade de tempo. Voltaremos à teoria das oscilações no capítulo XI (pág. 501).

4. Movimento sôbre uma curva dada.

Discutiremos, por fim, a forma mais geral do problema enunciado, a saber, o problema do movimento sôbre uma curva dada, sob a ação de uma fôrça predeterminada qualquer $mf(s)$.

Buscamos a determinação da função $s(t)$ em função de t por intermédio da equação diferencial

$$\ddot{s} = f(s),$$

onde $f(s)$ é uma função dada. Esta equação diferencial em s pode ser completamente resolvida, pelo seguinte artifício.

Iniciaremos considerando qualquer função primitiva $F(s)$ de $f(s)$, de tal sorte

que $F'(s) = f(s)$ e multipliquemos ambos os membros da equação $\ddot{s} = f(s) = F'(s)$ por $\dot{s}$. Podemos, então, escrever o primeiro membro sob a forma $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{s}^2\right)$, como vemos imediatamente, derivando a expressão $\dot{s}^2$. O segundo membro, entretanto, $F'(s)\dot{s}$, é a derivada de $F(s)$ em relação ao tempo t, se considerarmos s como função de t, em $F(s)$. Teremos, pois,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{s}^2\right) = \frac{d}{dt}F(s),$$

ou, integrando,

$$\frac{1}{2}\dot{s}^2 = F(s) + c,$$

onde c representa uma constante a determinar.

Escrevamos esta equação sob a forma $\frac{ds}{dt} = \sqrt{2[F(s) + c]}$. Observamos logo que não podemos deduzir s em função de t desta relação, por integração. Se, porém, nos contentarmos em determinar primeiramente a função inversa $t(s)$, isto é, o tempo gasto pela partícula para alcançar uma posição definida s, chegaremos à solução do problema. Para tal, tomemos a equação

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2[F(s) + c]}},$$

ficando assim conhecida a derivada da função $t(s)$. Temos, ainda,

$$t = \int \frac{ds}{\sqrt{2[F(s) + c]}} + c_1,$$

onde c_1 representa outra constante de integração. Logo que tivermos resolvido esta última integração teremos resolvido o problema, pois, embora não tenhamos determinado a posição s em função de t, ficará, ao contrário, conhecido o tempo t em função de s. Como ainda dispomos das duas constantes de integração c e c_1, podemos tornar geral a solução estabelecida sob condições iniciais particulares.

No exemplo acima, do movimento elástico, tivemos que identificar x com s. Temos $f(s) = -\omega^2 s$ e correspondentemente, digamos, $F(s) = -\frac{1}{2}\omega^2 s^2$. Obteremos, então,

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2c - \omega^2 s^2}},$$

e em seguida

$$t = \int \frac{ds}{\sqrt{2c - \omega^2 s^2}} + c_1.$$

Esta integral pode ser fàcilmente calculada, introduzindo-se $\omega/s\sqrt{2c}$ como nova variável. Virá, pois,

$$t = \frac{1}{\omega}\operatorname{arc\,sen}\frac{\omega s}{\sqrt{2c}} + c_1,$$

ou, formando a função inversa,

$$s = \frac{\sqrt{2c}}{\omega} \operatorname{sen} \omega(t - c_1).$$

Somos, assim, levados exatamente ao mesmo enunciado da solução, como anteriormente.

Por êste exemplo vimos, também, o que significam as constantes de integração e como podem ser determinadas. Se, por exemplo, estabelecermos que no tempo $t = 0$ a partícula deve estar no ponto $s = 0$, animada da velocidade $\dot{s}(0) = 1$, teremos as duas equações

$$0 = \frac{\sqrt{2c}}{\omega} \operatorname{sen} \omega c_1, \quad 1 = \sqrt{2c} \cos \omega c_1,$$

das quais tiramos o valor das constantes $c = 0$ e $c_1 = \frac{1}{2}$.

As constantes de integração podem ser determinadas da mesma forma quando a posição inicial s_0 e a velocidade inicial $\dot{s}_0$ (no tempo $t = 0$) forem arbitràriamente fixadas.

Exemplos

1. Um ponto A se move com a velocidade 1, constante, sôbre um círculo de raio r, com o centro na origem. O ponto A está ligado ao ponto B por uma linha de comprimento constante $l(>r)$. O ponto B é obrigado a mover-se sôbre o eixo dos x (manivela, biela e pistão de máquinas a vapor). Calcular a velocidade e a aceleração de B, em função do tempo.

2. Uma partícula parte da origem com a velocidade 4, e sob a influência da gravidade desliza, por um fio reto, até atingir a linha vertical $x = 2$. Qual deve ser a inclinação da trajetória, para que o ponto atinja a linha vertical no menor tempo possível?

3. Uma partícula se move sôbre uma linha reta submetida a uma resistência que produz o retardamento ku^2, onde u é a velocidade e k uma constante. Deduzir as expressões para a velocidade (u) e para o tempo (t) em função de s, distância da posição inicial, e v_0, velocidade inicial.

4. Uma partícula de massa unitária se move ao longo do eixo dos x, sob influência da fôrça $f(x) = -\operatorname{sen} x$.

(a) Determinar o movimento do ponto, sabendo que no tempo $t = 0$ êle está no ponto $x = 0$, animado da velocidade $v_0 = 2$. Mostrar que quando $t \to \infty$ a partícula se aproxima de uma posição limite e determinar a mesma.

(b) Para condições idênticas, exceto quanto a v_0 que pode assumir qualquer valor, mostrar que se $v_0 > 2$ o ponto caminha para uma distância infinita quando $t \to \infty$, e que se $v_0 < 2$, êle oscila em tôrno da origem.

5. Estabeleçamos um sistema de eixos com a origem no centro da terra, cujo raio designaremos por R. De acôrdo com a lei da gravitação de Newton, uma partícula de massa unitária situada sôbre o eixo dos y é atraída pela terra com a fôrça $\frac{-\mu M}{\mu^2}$, onde μ é a "constante de gravitação" e M a massa da terra.

(a) Calcular o movimento da partícula depois que a mesma é abandonada no ponto $y_0(>R)$, isto é, se no instante $t = 0$ ela estiver no ponto $y = y_0$, animada com a velocidade $v_0 = 0$.

(b) Determinar a velocidade com que a partícula acima toca a terra.

(c) Usando o resultado de (b), calcular a velocidade com que uma partícula, caindo do infinito, toca a terra (1).

6.* Uma partícula de massa m se move sôbre a elipse $r = k/(1 - e\cos\theta)$. A fôrça que atua sôbre a partícula, dirigida para a origem, é cm/r^2. Descrever o movimento do ponto, determinar o seu período e mostrar que o raio vector do mesmo descreve áreas iguais em tempos iguais.

5. Outras aplicações. Partículas deslizando ao longo de curvas.

1. Observações gerais.

O caso de uma partícula que desliza ao longo de uma curva, sem atrito, sob a influência da gravidade, pode ser estudado muito simplesmente, pelo método que acabamos de expor. Primeiramente, discutiremos êste movimento em geral, e depois com referência especial aos casos do pêndulo comum e do pêndulo cicloidal. Estabeleceremos os eixos de modo que o eixo dos x fique dirigido verticalmente para cima, isto é, oposto à direção da fôrça da gravidade, e consideremos a curva como dada em função do parâmetro θ, pelas equações paramétricas $x = \varphi(\theta) = x(\theta)$, $y = \psi(\theta) = y(\theta)$. A figura 13 indica o segmento da curva para o qual estudaremos o movimento. Em todos os pontos da curva a fôrça da gravidade atua para baixo (isto é, na direção dos y decrescentes), sendo sua intensidade, sôbre a partícula, igual a mg. Se designarmos o ângulo formado pelo eixo dos x negativos e pela tangente à curva, por α, de acôrdo com a hipótese estabelecida na pág. 293, a fôrça que age na direção da curva será

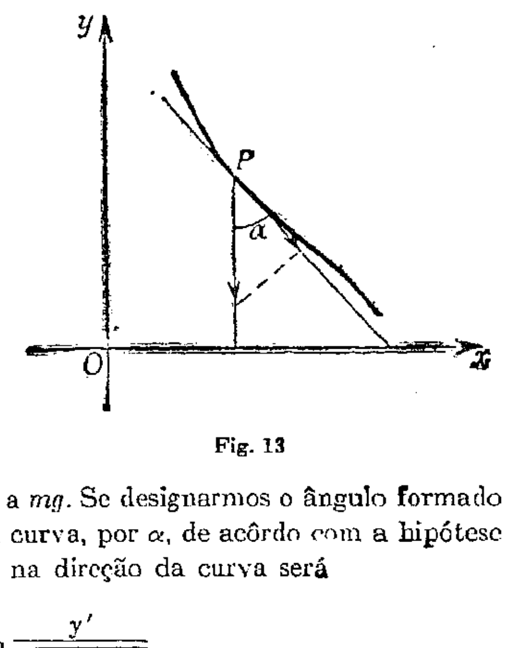


Fig. 13

$$mg\cos\alpha = -mg\frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}},$$

onde

$$x' = \frac{d\varphi}{d\theta} = \varphi'(\theta), \quad y' = \frac{d\psi}{d\theta} = \psi'(0).$$

(Note-se que a linha indica, aqui, a derivada em relação a θ e não em relação a x.) Se, em particular, introduzirmos o comprimento do arco s como parâmetro, em

(1) Esta é igual à velocidade mínima que deveria ser imprimida a um projétil para que, disparado da terra, não voltasse mais.

lugar de θ, obteremos a expressão $-mg\dfrac{dy}{ds}$ para a fôrça ao longo da curva. Pela lei de Newton, entretanto, a função $s(t)$ satisfaz a equação diferencial

$$\ddot{s} = -g\frac{dy}{ds}.$$

O segundo membro desta equação é uma função conhecida de s, visto conhecermos a curva, devendo, portanto, considerarmos x e y como funções conhecidas de s.

Como na seção precedente, multipliquemos ambos os membros desta equação por $\dot{s}$. O primeiro membro será, então, a derivada de $\frac{1}{2}\dot{s}^2$ em relação a t. Se considerarmos s como função de t na função $y(s)$, o segundo membro da equação será a derivada de $-gy$, em relação a t. Integrando, teremos

$$\tfrac{1}{2}\dot{s}^2 = -gy + c.$$

onde c é uma constante de integração. A fim de fixar o significado desta constante, suporemos que no tempo $t = 0$ a partícula que estamos considerando está no ponto da curva para o qual o valor do parâmetro é θ_0 e cujas coordenadas são $x_0 = \varphi(\theta_0)$, $y_0 = \psi(\theta_0)$, e ainda, que neste instante sua velocidade seja nula, isto é, $\dot{s}(0) = 0$. Fazendo, então, $t = 0$, temos imediatamente $-gy_0 + c = 0$, de sorte que

$$\tfrac{1}{2}\dot{s}^2 = -g(y - y_0).$$

Agora, em vez de considerar s como função de t, consideraremos a função inversa $t(s)$, obtendo para ela

$$\frac{dt}{ds} = \pm\frac{1}{\sqrt{2g(y_0 - y)}},$$

que é equivalente a

$$t = c_1 \pm \int \frac{ds}{\sqrt{2g(y_0 - y)}},$$

onde c_1 é uma nova constante de integração. Com relação ao sinal da raiz quadrada, o qual é o mesmo de $\dot{s}$, chamamos a atenção para o seguinte fato. Se a partícula se mover sôbre um arco que está mais baixo do que y_0, em tôda a parte, exceto nos extremos, o sinal não pode mudar, pois o sinal de $\dot{s}$ muda sòmente quando $\dot{s} = 0$, isto é, quando $y - y_0 = 0$. O integrando da direita é conhecido em função do parâmetro θ, visto a curva ser conhecida. Introduzindo θ como variável independente, obtemos

$$t = c_1 \pm \int \frac{ds}{d\theta}\frac{d\theta}{\sqrt{2g(y_0 - y)}} = c_1 \pm \int \sqrt{\frac{x'^2 + y'^2}{2g(y_0 - y)}}\,d\theta,$$

onde as funções $x' = \phi'(\theta)$, $y' = \psi'(\theta)$, $y = \psi(\theta)$ são conhecidas. A fim de determinar a constante de integração c_1 observaremos que para $t = 0$ o valor

do parâmetro deve ser θ_0. Esta consideração nos dá a solução, imediatamente, sob a forma

$$t = \pm \int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{\frac{x'^2 + y'^2}{2g(y_0 - y)}}\, d\theta.$$

Uma vez integrada, esta equação representa o tempo que a partícula gasta para deslocar-se do valor do parâmetro θ_0 para o do parâmetro θ. A função inversa $\theta(t)$ da função $t(\theta)$ permite-nos descrever completamente o movimento, visto que a cada instante t podemos determinar o ponto $x = \varphi[\theta(t)]$, $y = \psi[\theta(t)]$ pelo qual a partícula está passando.

2. Discussão do movimento.

Das equações que acabamos de estabelecer, embora sem uma expressão explícita para o resultado da integração, podemos deduzir a natureza geral do movimento por um simples raciocínio intuitivo. Suponhamos que a curva estudada seja do tipo indicado na figura 14, isto é, que consista em um arco cuja convexidade esteja voltada para baixo. Tomemos s como crescendo da esquerda para a direita. Se, inicialmente, abandonarmos a partícula no ponto A de coordenadas $x = x_0$, $y = y_0$, correspondentes a $\theta = \theta_0$, a velocidade cresce, visto a aceleração $\ddot{s}$ ser positiva. A partícula desloca-se de A ao ponto mais baixo com velocidade sempre crescente. Uma vez passado o ponto mais baixo, porém, a aceleração é negativa, porque o segundo membro $-g\dfrac{dy}{ds}$ da equação do movimento é negativo. A velocidade, portanto, decresce. Vemos logo na equação $\dot{s}^2 = -2g(y - y_0)$ que a velocidade atingirá o valor 0 quando a partícula alcançar o ponto B, cuja altura é a mesma que a da posição inicial A. Desde que a aceleração ainda é negativa, o movimento da partícula deve ser invertido neste ponto, de sorte que ela volta ao ponto A, repetindo-se esta ação indefinidamente. (O leitor por certo observou que o atrito foi desprezado.) Neste movimento oscilatório, o tempo que o ponto leva para voltar de B para A deve ser, lògicamente, o mesmo que êle leva para se transportar de A até B. Se designarmos o tempo requerido para uma viagem completa de A até B e a volta de B até A por T, o movimento será òbviamente periódico, com o período igual a T. Se θ_0 e θ_1 forem os valores do parâmetro correspondentes aos pontos A e B, respectivamente, o semiperíodo será dado pela expressão

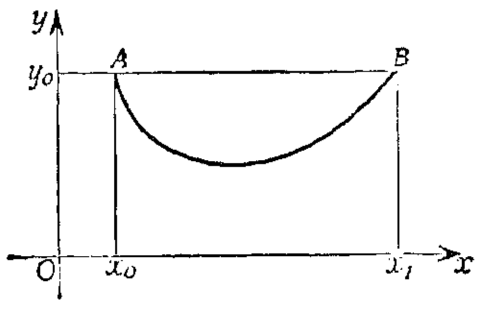


Fig. 14

$$\frac{T}{2} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \left| \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{\frac{x'^2 + y'^2}{y_0 - y}}\, d\theta \right|$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2g}} \left| \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{\frac{\varphi'^2(\theta) + \psi'^2(\theta)}{\psi(\theta_0) - \psi(\theta)}}\, d\theta \right|.$$

Se θ_2 fôr o valor do parâmetro correspondente ao ponto mais baixo da curva, o tempo que a partícula leva para cair de A até êste ponto mais baixo será

$$\frac{1}{\sqrt{2g}}\left|\int_{\theta_0}^{\theta_2}\sqrt{\frac{x'^2+y'^2}{y_0-y}}\,d\theta\right|.$$

3. Pêndulo comum.

O exemplo mais fácil é fornecido pelo chamado pêndulo simples. A curva a considerar, neste caso, é o círculo de raio l:

$$x = l\,\mathrm{sen}\,\theta,\quad y = -l\cos\theta,$$

em que o ângulo θ é medido no sentido positivo, a partir da posição de repouso. Da expressão geral, dada acima, obtemos

$$T = \sqrt{\frac{2l}{g}}\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta-\cos\alpha}} = \sqrt{\frac{l}{g}}\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{d\theta}{\sqrt{\mathrm{sen}^2\frac{\alpha}{2}-\mathrm{sen}^2\frac{\theta}{2}}},$$

onde $\alpha(0<\alpha<\pi)$ representa a amplitude da oscilação do pêndulo, isto é, a posição angular a partir da qual a partícula é abandonada, no tempo $t = 0$, com a velocidade 0. Pela substituição

$$u = \frac{\mathrm{sen}\,(\theta/2)}{\mathrm{sen}\,(\alpha/2)},\quad \frac{du}{d\theta} = \frac{\cos\,(\theta/2)}{2\,\mathrm{sen}\,(\alpha/2)}$$

a expressão do período de oscilação do pêndulo transforma-se em

$$T = 2\sqrt{\frac{l}{g}}\int_{-1}^{1}\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)\,[1-u^2\,\mathrm{sen}^2(\alpha/2)]}}.$$

Obtemos, assim, o período de oscilação do pêndulo, expresso por uma integral, elíptica.

Se admitirmos que a amplitude da oscilação é pequena, de sorte que possamos com um grau de precisão suficiente, substituir o segundo fator sob a raiz quadrada por 1, teremos a expressão

$$2\sqrt{\frac{l}{g}}\int_{-1}^{1}\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

como aproximação para o período de oscilação. Podemos calcular esta última integral pela fórmula 13 da tábua de integrais (pág. 206), obtendo $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ para valor aproximado de T.

4. Pêndulo cicloidal.

O fato do período de oscilação do pêndulo comum não ser completamente independente da amplitude da oscilação levou Christian Huygens, nos seus prolongados esforços para construir relógios de precisão, a procurar uma curva tal que o período de oscilação fôsse inteiramente independente da posição particular

em que a partícula oscilante inicia o seu movimento sôbre a curva [1]. Huygens estabeleceu que tal curva é a ciclóide.

A fim de que a partícula possa, efetivamente, oscilar sôbre a ciclóide, a crista da curva deve estar dirigida segundo direção oposta à da fôrça da gravidade, isto é, a ciclóide conhecida (pág. 261) deve sofrer uma rotação em tôrno do eixo dos x (fig. 15). Escrevemos, pois, as equações da curva sob a forma

$$x = a(\theta - \operatorname{sen} \theta),$$
$$y = a(1 + \cos \theta),$$

as quais incluem, também, a translação da curva numa distância $2a$ na direção dos y positivos. O tempo dispendido pela partícula para percorrer o espaço compreendido entre a altura

$$y_0 = a(1 + \cos \alpha) \quad (0 < \alpha < \pi)$$

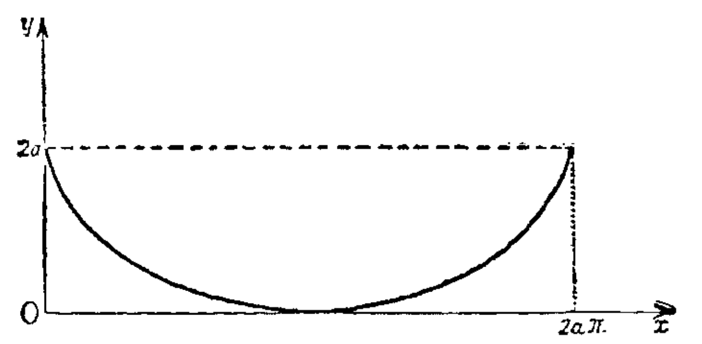


Fig. 15. — Trajetória descrita pelo pêndulo cicloidal

e o ponto mais baixo da trajetória, é dado pela fórmula transformada na página 301

$$\frac{T}{4} = \sqrt{\frac{1}{2g}} \int_\alpha^\pi \sqrt{\frac{x'^2 + y'^2}{y_0 - y}}\, d\theta = \sqrt{\frac{a}{g}} \int_\alpha^\pi \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{\cos \alpha - \cos \theta}}\, d\theta.$$

Empregando a equação

$$\cos \alpha - \cos \theta = 2\left(\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2}\right),$$

obteremos

$$\frac{T}{4} = \sqrt{\frac{a}{g}} \int_\alpha^\pi \frac{\operatorname{sen} \frac{\theta}{2}}{\sqrt{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2}}}\, d\theta.$$

Transformaremos a integral definida, aplicando a substituição

$$\cos \frac{\theta}{2} = u \cos \frac{\alpha}{2}, \ \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}\, d\theta = -2 \cos \frac{\alpha}{2}\, du.$$

[1] Neste caso, as oscilações são chamadas *isócronas*.

Obtemos, então,

$$\frac{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}{\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\cos^2\frac{\theta}{2}}}\,d\theta = -2\int\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = -2 \operatorname{arc\,sen} u,$$

donde, finalmente,

$$T = -8\sqrt{\frac{a}{g}}\operatorname{arc\,sen}\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\Bigg|_{\alpha}^{\pi} = 4\pi\sqrt{\frac{a}{g}}.$$

O período de oscilação T é, portanto, independente da amplitude α.

6. Trabalho

1. Observações gerais.

O conceito de *trabalho* lança nova luz sôbre as considerações da última seção e sôbre muitos outros problemas da mecânica e da física.

Consideremos novamente a partícula em movimento sôbre uma curva, sob a ação de uma fôrça atuando na direção da trajetória, e suponhamos que a sua posição seja determinada pelo comprimento do arco a partir de um ponto fixo, inicial, qualquer. A própria fôrça será, então, via de regra, uma função de s. Admitiremos que seja uma função contínua $f(s)$ do comprimento do arco. Esta função terá valores positivos quando a direção da fôrça fôr a mesma que a dos valores crescentes de s, e negativos quando a direção da fôrça fôr oposta à dos valores crescentes de s.

Se a intensidade da fôrça fôr constante ao longo da trajetória, entenderemos por *trabalho realizado pela fôrça*, o produto da fôrça pela distância percorrida $(s_1 - s_0)$, onde s_1 representa a posição final e s_0 a inicial do movimento. Se a fôrça não fôr constante, definiremos o trabalho por um processo de limite. Subdividiremos o intervalo entre s_0 e s_1 em n subintervalos, iguais ou desiguais, observando que, se os subintervalos forem suficientemente pequenos, a fôrça será aproximadamente constante em cada um dêles. Sendo σ_ν um ponto escolhido arbitràriamente no subintervalo σ, a fôrça, neste subintervalo, será aproximadamente $f(\sigma_\nu)$. Se a fôrça fôsse exatamente $f(\sigma_\nu)$ neste subintervalo, o trabalho por ela realizado valeria, precisamente,

$$\sum_{\nu=1}^{n} f(\sigma_\nu)\Delta s_\nu,$$

onde Δs_ν representa, como de costume, o comprimento do subintervalo de ordem ν. Se passarmos agora ao limite, deixando n crescer além de qualquer medida, ao passo que o comprimento do maior subintervalo tende para zero, pela definição de integral, a nossa soma tenderá para

$$W = \int_{s_0}^{s_1} f(s)\,ds,$$

que, naturalmente, denominaremos o trabalho realizado pela fôrça.

Se as direções da fôrça e do movimento coincidirem, o trabalho realizado pela fôrça será positivo; dizemos, então, que a fôrça *produz trabalho*. Por outro lado, se as direções da fôrça e do movimento forem opostas, o trabalho realizado pela fôrça será negativo; dizemos, neste caso, que o *trabalho é produzido contra a fôrça* [1].

Se considerarmos as coordenadas da posição s como função do tempo t, de modo que a fôrça $f(s) = p$ seja também uma função de t, podemos, num plano de coordenadas retangulares s e p, marcar o ponto de coordenadas $s = s(t)$, $p = p(t)$, em função do tempo. Êste ponto descreverá uma curva, que será denominada o diagrama do trabalho do movimento. Se o movimento de que nos ocupamos fôr periódico, como no caso de qualquer máquina, depois de um certo tempo T (um período) o ponto móvel $s(t)$, $p(t)$ voltará ao ponto de origem; isto é, o diagrama do trabalho será uma curva fechada. Neste caso, a curva poderá consistir em um só e mesmo arco, percorrido, primeiramente, para a frente e, depois, para trás. Verifica-se êste procedimento, por exemplo, nas óscilações elásticas. Também é possível que o diagrama seja representado por uma curva fechada mais geral, limitando uma área. Tal é o caso, por exemplo, das máquinas de pistão, em que a pressão sôbre o êmbolo não é a mesma durante o percurso para a frente e para trás. O trabalho produzido em um ciclo, isto é, no tempo T, será, então, dado simplesmente pela área negativa do diagrama do trabalho, ou em outras palavras, pela integral

$$\int_{t_0}^{t_0+T} p(t)\frac{ds}{dt}\,dt,$$

em que o intervalo de tempo entre t_0 e $t_0 + T$ representa exatamente um período do movimento. Quando o contôrno da área fôr percorrido no sentido positivo, o trabalho realizado será negativo, e quando o limite fôr percorrido no sentido negativo, o trabalho será positivo. A curva consistindo em diversos laços, uns percorridos positiva e outros negativamente, o trabalho produzido será a soma das áreas dos laços, cada uma delas com o seu sinal trocado.

Estas considerações são perfeitamente ilustradas, na prática, pelo *diagrama indicador* das máquinas a vapor. Por meio de um aparelho mecânico, convenientemente escolhido, um lápis é obrigado a mover-se sôbre uma tira de papel; o movimento horizontal do lápis em relação ao papel é proporcional à distância do pistão à sua posição extrema, enquanto o movimento vertical é proporcional à pressão do vapor, portanto, à fôrça p exercida pelo vapor sôbre o êmbolo. O pistão, portanto, descreve o diagrama de trabalho da máquina, em escala conhecida. Mede-se a área do diagrama (geralmente com um planímetro), achando-se o trabalho do vapor sôbre o pistão. Vemos aqui, novamente, que a convenção que adotamos para o sinal de uma área, como exposta no § 2, n.º 1, dêste capítulo (pág. 271), não se reveste apenas de interêsse teórico. Efetivamente, acontece às vêzes, quando a máquina está trabalhando a vazio, que o vapor altamente expandido no fim do

(1) Notemos que é preciso distinguir, cuidadosamente, a fôrça a que nos referimos. Por exemplo, levantando um pêso, o trabalho produzido pela fôrça da gravidade é negativo; o trabalho é produzido contra a gravidade. A pessoa, porém, que levanta o pêso, produz um trabalho positivo, visto que o esfôrço é feito em direção oposta à da gravidade.

curso, tem pressão mais baixa do que a necessária para expeli-lo na volta do pistão. O diagrama indica tal ocorrência por um laço percorrido positivamente. A máquina está retirando energia do volante, em vez de fornecê-la.

2. Atração mútua de duas massas.

Suponhamos que uma partícula atrai outra, de acôrdo com a lei da atração de Newton; como primeiro exemplo consideraremos o trabalho realizado pela fôrça de atração quando a segunda partícula se move sôbre a linha que une as duas. Pela lei da gravitação de Newton, sabemos que a fôrça atrativa é inversamente proporcional ao quadrado da distância. Se imaginarmos a primeira partícula em repouso, na origem, e a segunda a uma distância r do ponto inicial, a fôrça de atração será dada por

$$f(r) = -\mu \frac{1}{r^2},$$

onde μ representa uma constante positiva. O trabalho produzido por esta fôrça quando a partícula se move da distância r para $r_1 (< r)$ é, portanto, positivo, e igual à integral

$$-\mu \int_r^{r_1} \frac{ds}{s^2} = \mu \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}\right).$$

Se uma fôrça oposta fizer com que a partícula ultrapasse a origem, indo da distância r a $r_1 > r$, o trabalho realizado pela fôrça de atração será, naturalmente, expresso pela mesma integral (neste caso, negativa). O trabalho produzido pela fôrça oposta tem o mesmo valor numérico, porém, com o sinal contrário, sendo, então, igual a $\mu \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right)$. Imaginando-se a posição final como cada vez mais afastada, ela se aproximará do valor limite μ/r, que podemos tomar como o trabalho que deve ser realizado contra a fôrça de atração para mover a partícula da distância r ao "infinito". Esta importante expressão é denominada *potencial mútuo* das duas partículas. Neste caso, porém, o potencial é definido como o trabalho necessário para separar duas massas que se atraem; por exemplo, o trabalho preciso para arrancar um eletrônio do átomo (potencial de ionização).

3. Distensão das molas.

Como segundo exemplo estudaremos o trabalho produzido no estiramento das molas. Como é usual na teoria da elasticidade, admitiremos (como já o fizemos na pág. 295) que a fôrça necessária para distender a mola seja proporcional a x, que representa o acréscimo do comprimento da mola, isto é, $p = kx$, sendo k uma constante. O trabalho que deve ser realizado para que possamos distender a mola da posição de repouso, $x = 0$, até a posição final, $x = x_1$, será pois fornecido pela integral

$$\int_0^{x_1} kx\, dx = \tfrac{1}{2} k x_1^2.$$

4. Carga dos condensadores.

O conceito de trabalho em outros ramos da física pode ser tratado de maneira semelhante. Vejamos, por exemplo, o carregamento dos condensadores. Se chamarmos Q a quantidade de eletricidade no condensador, C sua capacidade e V a diferença de potencial (voltagem) através do condensador, sabemos da física que $Q = CV$. Ademais, o trabalho produzido para movimentar a carga Q através duma diferença de potencial V, é igual a QV. A diferença de potencial V não sendo constante durante o carregamento do condensador, porém, crescendo com Q, permite-nos efetuar uma passagem ao limite, análoga à que realizamos na pág. 304, obtendo-se para o trabalho realizado no carregamento do condensador a seguinte expressão

$$\int_0^{Q_1} V\,dQ = \frac{1}{C}\int_0^{Q_1} Q\,dQ = \frac{1}{2}\frac{Q_1^2}{C} = \frac{1}{2}Q_1V_1,$$

onde Q_1 é a quantidade total de eletricidade que passa para o condensador e V_1 a diferença de potencial no fim do processo de carga.

APÊNDICE AO CAPÍTULO V

1. Propriedades da evoluta

As equações paramétricas

$$\xi = x - \rho\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}, \quad \eta = y + \rho\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}},$$

da evoluta de uma curva dada, $x = x(t)$, $y = y(t)$, (pág. 283), permitem-nos deduzir algumas relações geométricas interessantes entre ela e a própria curva. Por conveniência, empregaremos o comprimento do arco s como parâmetro, de sorte que

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 1 \quad \text{e} \quad \dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} = 0,$$

$$\frac{1}{\rho} = k = \frac{\ddot{y}}{\dot{x}} = -\frac{\ddot{x}}{\dot{y}},$$

ou
$$\rho\ddot{y} = \dot{x} \quad \text{e} \quad \rho\ddot{x} = -\dot{y}.$$

Teremos, então,
$$\xi = x - \rho\dot{y}, \quad \eta = y + \rho\dot{x};$$

que, derivadas, dão

$$\dot{\xi} = \dot{x} - \rho\ddot{y} - \dot{\rho}\dot{y} = -\dot{\rho}\dot{y}, \quad \dot{\eta} = \dot{y} + \rho\ddot{x} + \dot{\rho}\dot{x} = \dot{\rho}\dot{x},$$

e, portanto,
$$\dot{\xi}\dot{x} + \dot{\eta}\dot{y} = 0.$$

Como os co-senos diretores da normal à curva são dados por $-\dot{y}$ e $\dot{x}$, segue-se que *a normal à curva é tangente à evoluta no centro da curvatura*; ou, as tangentes à evoluta são normais à curva original. Podemos ainda dizer que *a evoluta é a envoltória das normais* (fig. 16).

Designando-se o comprimento do arco da evoluta, medido a partir de um ponto fixo, arbitrário, por σ, teremos

$$\left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^2 = \dot{\sigma}^2 = \dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2.$$

Visto que $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 1$, obteremos da fórmula acima

$$\dot{\sigma}^2 = \dot{\rho}^2,$$

de modo que, se escolhermos de maneira conveniente a direção na qual σ é medido, virá

$$\dot{\sigma} = \dot{\rho},$$

desde que $\sigma \mp 0$,

ou, integrando,

$$\sigma_1 - \sigma_0 = \rho_1 - \rho_0.$$

Vemos, assim, que *o comprimento do arco da evoluta, compreendido entre dois pontos, é igual à diferença entre os raios de curvatura correspondentes, uma vez que $\dot{\rho}$ seja diferente de zero, para o arco considerado.*

Esta última condição não é supérflua. Se $\dot{\rho}$ mudar de sinal, vemos pela fórmula $\dot{\sigma} = \dot{\rho}$, que passando o ponto correspondente da evoluta, o comprimento do arco σ tem um máximo ou um mínimo, ou seja, passando êste ponto, não continuaremos, simplesmente, a calcular σ, porém, devemos inverter o sentido segundo o qual o mesmo é medido. Se quisermos evitá-lo, ao passar por um ponto desta espécie, devemos mudar o sinal na fórmula acima, escrevendo $\dot{\sigma} = -\dot{\rho}$.

Podemos ainda observar que os centros de curvatura correspondentes aos máximos e mínimos dos raios de curvatura são *pontos duplos da evoluta*. (Não o demonstraremos aqui.)

As relações geométricas que acabamos de estabelecer podem, ainda, ser expressas sob outra forma. Imaginemos um fio flexível, inextensível, colocado sôbre um arco de evoluta e estirado de tal modo que uma parte se estenda para fora da curva, tangenciando-a, e além disso, que a extremidade do fio Q fique sôbre a curva original C. À medida que o fio fôr sendo desenrolado, o ponto Q descreverá a curva C. Êste

modo de geração justifica o nome da curva (*evolvere*, desenrolar). A curva C é a evolvente da evoluta E. Por outro lado, pode-se partir de uma curva qualquer E e construir a sua evolvente C pelo processo de desenrolamento.

Para demonstrá-lo, consideremos a curva E que, agora, é a curva conhecida, representada pelas equações $\xi = \xi(\sigma)$, $\eta = \eta(\sigma)$, onde as coordenadas retangulares comuns são designadas por ξ e η e o parâmetro σ é o comprimento do arco. O enrolamento é feito como indica a figura 17. Quando o fio estiver completamente enrolado sôbre a evoluta E, sua extremidade Q coincidirá com o ponto A de E, correspondente ao comprimento de arco a. Se, agora, desenrolarmos o fio

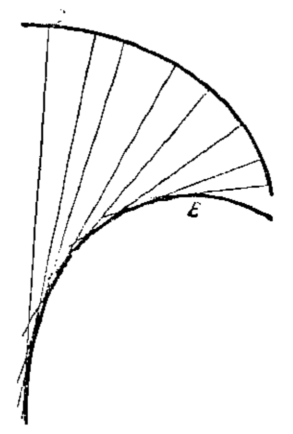


Fig. 16.—Evoluta (E)

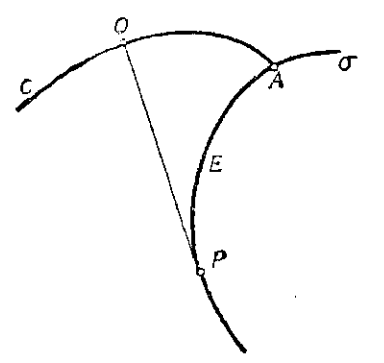


Fig. 17.—Evolvente (C)

até que êle tangencie a evoluta em P, ponto êste correspondente ao comprimento de arco $\sigma \leqq a$, a extensão do segmento PQ será $(a - \sigma)$ e seus co-senos diretores serão $\dot{\xi}$ e $\dot{\eta}$, o ponto superior indicando derivação em relação a σ. Para as ordenadas x e y do ponto Q teremos as expressões

$$x = \xi + (a - \sigma)\dot{\xi}, \quad y = \eta + (a - \sigma)\dot{\eta},$$

que dão as equações da evolvente descrita por Q, em função do parâmetro σ. Derivando em relação a σ segue-se que

$$\dot{x} = \dot{\xi} - \dot{\xi} + (a - \sigma)\ddot{\xi} = (a - \gamma)\ddot{\xi},$$
$$\dot{y} = \dot{\eta} - \dot{\eta} + (a - \sigma)\ddot{\eta} = (a - \sigma)\ddot{\eta}.$$

Uma vez que $\xi\dot{\xi} + \eta\dot{\eta} = 0$, achamos logo que

$$\xi\dot{x} + \eta\dot{y} = 0,$$

o que significa que a linha PQ é normal à evolvente C. Podemos, portanto, dizer que as normais à curva C são tangentes à curva E. Isto, entretanto, é uma propriedade característica de E, a evoluta de C. Logo, *uma curva qualquer é a evoluta de tôdas as suas evolventes.*

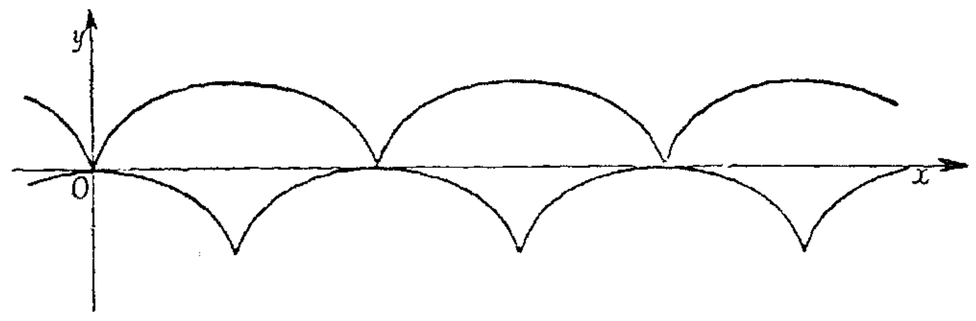


Fig. 18.—A ciclóide como evoluta e evolvente

Como caso particular consideraremos a evoluta da ciclóide $x = t - \operatorname{sen} t$, $y = 1 - \cos t$. O que estabelecemos nas páginas 281, 283, nos dá

$$\xi = x - \dot{y}\frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}, \quad \eta = y + \dot{x}\frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}};$$

obtemos, pois, a evoluta sob a forma $\xi = t + \operatorname{sen} t$, $\eta = -1 + \cos t$. Se fizermos $t = \tau + \pi$, virá $\xi - \pi = \tau - \operatorname{sen} \tau$ e $\eta + 2 = 1 - \cos \tau$. Estas equações mostram que a própria evoluta é uma ciclóide, semelhante à curva original, podendo ser obtida por simples translação, como indicamos na figura 18.

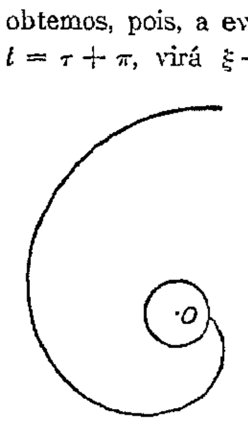


Fig. 19.—Evolvente do círculo

Como mais um exemplo, transformaremos a equação da evoluta do círculo. Iniciaremos com o círculo $\xi = \cos t$, $\eta = \operatorname{sen} t$ e desenvolveremos a tangente respectiva (fig. 19). A evolvente do círculo assumirá a forma

$$x = \cos t + t \operatorname{sen} t, \quad y = -\operatorname{sen} t + t \cos t.$$

Finalmente, determinaremos a evoluta da elipse $x = a \cos t$, $y = b \operatorname{sen} t$. Temos, imediatamente,

$$\xi = x - \dot{y}\frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}} = \frac{a^2 - b^2}{a}\cos^3 t$$

$$\eta = y + \dot{x}\frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}} = -\frac{a^2 - b^2}{b}\operatorname{sen}^3 t,$$

que é a representação paramétrica da evoluta. Podemos eliminar t destas equações

pelo método usual, obtendo a equação da evoluta sob a forma não paramétrica:

$$(a\xi)^{2/3} + (b\eta)^{2/3} = (a^2 - b^2)^{2/3}.$$

Esta curva, cuja representação está consignada na figura 20, é denominada a *astróide*. Pelas equações paramétricas vemos, ràpidamente, que os centros de curvatura correspondentes à elipse são, efetivamente, os vértices da astróide.

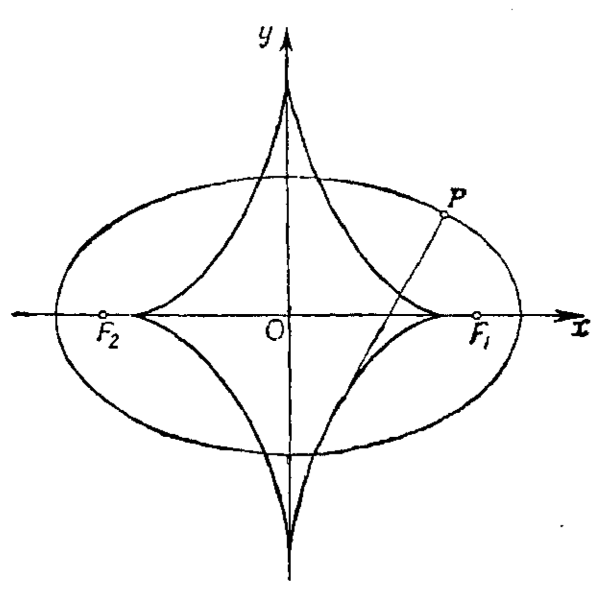


Fig. 20.—Evoluta da elipse

Exemplos

1. Provar que a evoluta da epiciclóide (exemplo 2, pág. 267) é outra epiciclóide semelhante à primeira, podendo ser obtida dela por rotação e contração.

2 Mostrar que a evoluta da hipociclóide (exemplo 4, pág. 267) é outra hipociclóide, que pode ser obtida da primeira por rotação e expansão.

2. Áreas limitadas por curvas fechadas

Já vimos no § 2 (pág. 271) que a área limitada por uma curva fechada $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t_0 \leqq t \leqq t_1$, que não se intercepta (chamada curva fechada simples) é dada pela integral

$$-\int_{t_0}^{t_1} y(t)\,\dot{x}(t)\,dt,$$

onde o valor obtido será positivo ou negativo, conforme o sentido segundo o qual a curva de contôrno é descrita seja positivo ou negativo. Podemos, agora, estender êste resultado a curvas mais gerais. Supo-

nhamos que a curva C, dada pelas equações $x = x(t)$, $y = y(t)$, se intercepte a si mesma em um número finito de pontos, dividindo, assim, o plano em um número finito de porções R_1, R_2, ... Suponhamos, mais, que as derivadas sejam contínuas, exceto, talvez, para um número finito de saltos com descontinuidades, e que $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 \neq 0$, exceto, possìvelmente, para um número finito de valores de t correspondentes aos vértices. Finalmente, admitamos que a curva possui um número finito de linhas de suporte (pág. 270).

Atribuiremos, pois, a cada uma das regiões R_i, um índice μ_i assim definido: escolhamos um ponto arbitrário Q em R_i, não situado sôbre qualquer linha de suporte, e elevemos a linha que se estende de Q para cima, na direção do eixo dos y positivos. Contemos o número de

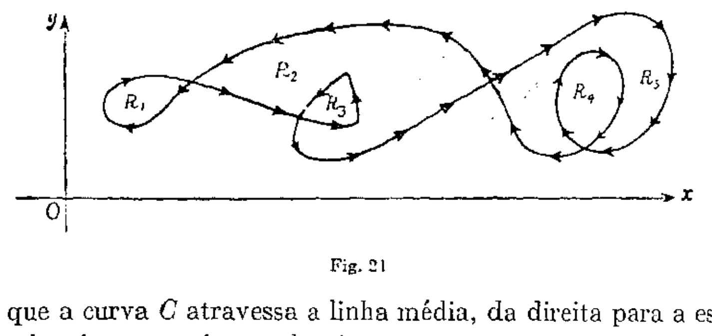


Fig. 21

vêzes que a curva C atravessa a linha média, da direita para a esquerda, e subtraiamos o número de vêzes que a curva atravessa a referida linha da esquerda para a direita. A diferença será o índice μ_i. Por exemplo, o interior da curva ilustrada na figura 6 (pág. 269) tem o índice $\mu = +1$. Na figura 21 as regiões R_1, ..., R_5 têm os índices $\mu_1 = -1$, $\mu_2 = +1$, $\mu_3 = +2$, $\mu_4 = -2$, $\mu_5 = -1$. O número μ_i depende, efetivamente, da região R_i e não do ponto particular Q, escolhido em R_i, como podemos constatar da seguinte maneira. Escolhamos outro ponto Q' em R_i, situado fora de qualquer linha de suporte, e liguemos Q e Q' por uma linha quebrada, localizada inteiramente em R_i. Se percorrermos esta linha de Q para Q', o número de cruzamentos da direita para a esquerda menos o número de cruzamentos da esquerda para a direita será constante, pois, entre as linhas de suporte o número de cruzamentos de qualquer tipo é inalterável, ao passo que na travessia de uma destas linhas de suporte o número de cruzamento em ambas as direções, ou cresce ou decresce de uma unidade. Em qualquer caso, porém, a diferença permanece inalterada. No caso

em que a linha de suporte encontre a curva em muitos pontos diferentes, digamos, $A, B, \ldots, H$, consideramo-la como várias linhas de suporte diferentes $FA, FB, \ldots, FH$, onde F indica o ponto do eixo dos x que fica verticalmente abaixo de todos os pontos citados. O raciocínio feito se aplica, então, a cada uma destas linhas. Logo, o número μ_i tem o mesmo valor, quer usemos Q, quer Q', para a sua determinação.

Em particular, se a curva proposta não se interceptar, a área que ela contorna consistirá em uma única região R, cujo índice será $+1$ ou -1, conforme o contôrno fôr descrito no sentido positivo ou no negativo. Para mostrá-lo basta traçar qualquer linha vertical (exceto as de suporte) que intercepte a curva. Marquemos sôbre a linha assim obtida, o ponto mais alto de interseção (P) com a curva, e escolhamos o ponto Q em R, situado abaixo de P, mas tão próximo dêle que nenhum outro ponto de interseção possa existir entre P e Q. Assim, acima de Q existe um cruzamento da curva que será da direita para a esquerda se a curva fôr percorrida no sentido positivo, de modo que $\mu = +1$. De outra forma $\mu = -1$. Como acabamos de constatar, o mesmo valor de μ vale para todos os pontos de R. Para uma curva desta espécie, e na realidade, para tôdas as curvas fechadas, uma das regiões, a "exterior" ao contôrno, se estende ilimitadamente em tôdas as direções. Tal região terá, naturalmente, o índice 0 e, portanto, a deixaremos de lado.

O teorema que estabelecemos acêrca da área assume, pois, o seguinte enunciado: o valor da integral $-\int_{t_0}^{t_1} y\dot{x}\,dt$ é igual à soma das áreas absolutas da região R_i, sendo cada uma das áreas R_i repetida μ_i vêzes. Em símbolos,

$$-\int_{t_0}^{t_1} y\dot{x}\,dt = \Sigma\mu_i\,|\,\text{área } R_i\,|.$$

A demonstração é simples. Admitiremos, como estamos autorizados a fazer, que tôda a curva esteja localizada acima do eixo dos x (nota da pág. 271). As linhas de suporte dividem R_i em um número finito de porções; seja r uma delas. Estabelecendo, então, a integral $-\int y\dot{x}\,dt$ para cada ramo unívoco da curva, veremos que a área absoluta de r é tomada $+1$ vêzes para cada ramo dirigido da direita para a esquerda, acima de r, e -1 vêzes para cada ramo da esquerda para a direita,

acima de r, perfazendo, no total, μ_i vêzes. O mesmo se verifica para qualquer outra porção de R_i; logo, R_i será considerado μ_i vêzes. A integral de tôda a curva valerá, pois, $\Sigma\mu_i \mid \text{área } R_i \mid$, como tínhamos enunciado. Esta fórmula coincide com a que achamos para as curvas simples fechadas, como podemos verificar pela discussão dos valores de μ para tais curvas.

A definição do índice μ_i apresenta a desvantagem de ter sido estabelecida em função de um sistema particular de coordenadas. Na realidade, porém, pode ser demonstrado que o valor de μ_i é independente do sistema de coordenadas, dependendo sòmente da curva. Esta demonstração, entretanto, não será apresentada aqui.

Capítulo VI

TEOREMA DE TAYLOR E REPRESENTAÇÃO APROXIMADA DAS FUNÇÕES POR MEIO DE POLINÔMIOS

As funções racionais são, sob muitos aspectos, as mais simples da análise. Formam-se com um número finito de aplicações das operações racionais de cálculo, diferindo, em sua gênese, de qualquer outra função que envolva uma passagem, mais ou menos encoberta, ao limite, a partir das funções racionais. Os problemas que visam estabelecer se, e de que modo, uma função dada pode ser expressa, aproximadamente, por funções racionais, especialmente por polinômios, são, pois, de grande importância, tanto na teoria como na prática.

1. Logaritmo e função inversa da tangente

1. Logaritmo.

Estudaremos, de início, alguns casos especiais em que a integração das progressões geométricas conduzem, quase imediatamente, às aproximações desejadas. Recordemos que para $q \neq 1$ e para n inteiro e positivo, temos

$$\frac{1}{1-q} = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} + r_n,$$

onde

$$r_n = \frac{q^n}{1-q}.$$

Se $|q| < 1$ o resto r_n tende para 0 quando n cresce, obtendo-se, então, as *séries geométricas infinitas*

$$1 + q + q^2 + \ldots \text{ com a soma } \frac{1}{1-q}.$$

Tomaremos, como ponto de partida, a fórmula

$$\log(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t}$$

e desenvolveremos o integrando de acôrdo com a fórmula acima, fazendo $q = -t$. Por integração, obtemos imediatamente

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_n,$$

onde
$$R_n = \int_0^x r_n\,dt = (-1)^n \int_0^x \frac{t^n\,dt}{1+t}.$$

Assim, para qualquer inteiro positivo n, conseguimos exprimir a função $\log(1+x)$ aproximadamente, por um polinômio de grau n, a saber,

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n};$$

ao mesmo tempo, a quantidade R_n, o *resto*, representa a grandeza do *êrro* cometido na aproximação.

Para se estimar a precisão da aproximação feita, basta calcular o resto R_n. Êste cálculo é feito segundo o método apresentado à página 126 para avaliar a integral. Suporemos, primeiro, que $x \geqq 0$, verificando que no intervalo total da integração o integrando não é negativo em parte alguma, jamais excedendo t^n. Conseqüentemente

$$|R_n| \leqq \int_0^x t^n\,dt = \frac{x^{n+1}}{n+1},$$

mostrando que, para cada valor de x contido no intervalo $0 \leqq x \leqq 1$, êste resto pode tornar-se tão pequeno quanto quisermos, pela escolha de n suficientemente grande (pág. 32). Se, por outro lado, a quantidade x estiver contida no intervalo $-1 < x \leqq 0$, o integrando não mudará de sinal e seu valor absoluto não excederá $|t|^n/(1+x)$, permitindo estabelecer o seguinte valor para o resto

$$|R_n| \leqq \frac{1}{1+x}\int_0^{|x|} t_n\,dt = \frac{|x|^{n+1}}{(1+x)(n+1)}.$$

Vemos, assim, que também neste caso o resto será arbitràriamente pequeno, quando n fôr suficientemente grande. Por conseqüência, a avaliação não tem significado quando fizermos $x = -1$.

Recapitulando, podemos dizer que

$$\log (1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + R_n,$$

onde o resto R_n tende para zero quando n cresce, desde que x esteja contido no intervalo [1] $-1 < x \leqq 1$. Das desigualdades acima podemos, efetivamente, deduzir o valor do resto independentemente de x, o qual valerá para todos os valores de x contidos no intervalo $-1+h \leqq x \leqq 1$, onde h é um número tal que $0 < h \leqq 1$. Neste caso teremos

$$| R_n | \leqq \frac{1}{h} \frac{1}{n+1},$$

mostrando esta fórmula que no intervalo completo a função $\log(1+x)$ é representada, aproximadamente, pelo polinômio de grau n que apresentamos, não sendo o êrro em parte alguma maior do que $\frac{1}{h} \frac{1}{n+1}$. Deixamos ao leitor verificar por si mesmo que, para qualquer valor de x para o qual $| x | > 1$, o resto não sòmente cessa de se aproximar de zero, mas, efetivamente, cresce numèricamente além de qualquer valor, à medida que n vai crescendo, de forma que para tais valores de x o polinômio proposto não fornece uma aproximação da função logarítmica.

A convergência do resto R_n para zero, no intervalo acima citado, pode ser traduzida dizendo-se que temos uma *série infinita* como representação da função logarítmica neste intervalo [2].

$$\log (1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + - \ldots$$

Introduzindo o valor particular $x = 1$, nestas séries, obteremos a fórmula notável

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \ldots$$

Esta foi uma das relações cuja descoberta causou profunda impressão nos espíritos dos pioneiros do cálculo diferencial e integral.

(1) Devemos notar que êste intervalo é aberto à esquerda e fechado à direita.

(2) Estudaremos as séries infinitas. detalhadamente, no cap. VIII (pág. 365).

A aproximação estabelecida para a função logarítmica conduz-nos a outra fórmula de grande utilidade, principalmente nos cálculos numéricos. Desde que $-1 < x < 1$, precisamos apenas escrever $-x$ em lugar de x na expressão acima para obtermos

$$\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots - S_n.$$

Supondo n par e subtraindo, temos

$$\frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{n-1} + \overline{R}_n,$$

onde $\overline{R}_n$ é dado pela expressão

$$\overline{R}_n = \frac{1}{2}(R_n + S_n) = \frac{1}{2}\int_0^x t^n\left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t}\right)dt$$
$$= \int_0^x \frac{t^n}{1-t^2}\,dt.$$

Devido à relação

$$|\overline{R}^n| \leq \frac{|x^{n+1}|}{n+1}\,\frac{1}{1-x^2},$$

o resto tenderá para zero à medida que n cresce, o que podemos exprimir, novamente, escrevendo o desenvolvimento sob forma de série infinita:

$$\frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x} = \text{Arc Th}\,x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \ldots,$$

para todos os valores de x, tais que $|x| < 1$.

A vantagem apresentada pela expressão acima é que, à medida que x percorre o intervalo de -1 até 1, a relação $\frac{1+x}{1-x}$ representa todos os números positivos. Logo, se o valor de x fôr convenientemente escolhido, esta série permite calcular o logaritmo de qualquer número positivo, com um êrro que não excederá R_n.

2. **Função inversa da tangente.**

Podemos considerar a inversa da tangente de modo análogo, se partirmos da fórmula, verdadeira para todos os valores inteiros e positivos de n,

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - + \ldots + (-1)^{n-1}t^{2n-2} + r_n,$$

onde
$$r_n = (-1)^n \frac{t^{2n}}{1+t^2}.$$

Integrando, obtemos,

$$\operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + R_n,$$

$$R_n = (-1)^n \int_0^x \frac{t^{2n}}{1+t^2}\, dt,$$

vendo logo que no intervalo $-1 \leqq x \leqq 1$ o resto tende para zero à medida que n cresce, visto que

$$|R_n| \leqq \int_0^{|x|} t^{2n}\, dt = \frac{|x|^{2n+1}}{2n+1}.$$

Da fórmula do resto podemos também deduzir fàcilmente que, para $|x| > 1$, o valor absoluto de resto cresce além de qualquer limite, à medida que n cresce. Conseqüentemente, deduzimos a série infinita

$$\operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - + \ldots,$$

válida para $|x| \leqq 1$. Para $x = 1$, desde que $\operatorname{arc\,tg} 1 = \pi/4$, temos

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - + \ldots,$$

fórmula notável, tão importante como a que estabelecemos anteriormente para log 2.

Exemplos

1. Demonstrar que $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3(1+x)} < \log(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\ (x > 0)$.

Daí achar $\log \frac{4}{3}$ com 2 decimais.

2. Calcular $\log \frac{6}{5}$ com 3 decimais, empregando a série

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots.$$

Provar que o resultado é exato até a terceira decimal.

3. Quantos têrmos da série $\log(1+x)$ devem ser usados para se obter $\log(1+x)$ com êrro inferior a 10 por cento, se $30 \leqq x \leqq 31$?

2. TEOREMA DE TAYLOR

As funções arbitrárias $f(x)$ podem, também, ser representadas aproximadamente por funções racionais, como o foram os casos especiais que estudamos. Basta, para isto, admitirmos que, para todos os valores da variável independente, contidos num intervalo fechado, a função possua derivadas contínuas, no mínimo, até a ordem $(n + 1)$. Na maioria dos casos que efetivamente ocorrem, a existência e a continuidade de *tôdas* as derivadas são conhecidas de início, de sorte que se pode escolher para n um número qualquer inteiro.

A fórmula de aproximação que deduziremos a seguir, foi descoberta nos primórdios do cálculo diferencial e integral por Taylor, aluno de Newton, e é conhecida pelo nome de teorema de Taylor [1].

1. Teorema de Taylor para os polinômios.

Para têrmos uma idéia clara do problema, começaremos estudando o caso em que $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ é um polinômio de grau n. Podemos, então, exprimir fàcilmente os coeficientes respectivos, por meio das derivadas de $f(x)$ no ponto $x = 0$. Assim, derivando ambos os membros da equação, uma, duas vêzes, etc., em relação a x, e se fizermos, então, $x = 0$, os coeficientes valerão

$$a_0 = f(0), \quad a_1 = f'(0), \quad a_2 = \frac{1}{2!}f''(0), \ \ldots, \quad a_n = \frac{1}{n!}f^{(n)}(0).$$

Qualquer polinômio do grau n pode, então, ser escrito sob a forma

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0).$$

A fórmula acima indica, simplesmente, que os coeficientes a_ν podem ser expressos em função das derivadas em $x = 0$, dando a constituição dos mesmos.

Podemos generalizar ligeiramente esta "série de Taylor" para polinômios, substituindo x por $\xi = x + h$ e considerando a função

(1) Um caso especial dêste teorema é muitas vêzes citado, aliás, sem justificação histórica, como *teorema de Mac-Laurin*. Não adotaremos tal designação

$f(\xi) = f(x + h) = g(h)$ como contínua em h; admitindo por um momento que x seja fixo e h a variável independente, segue-se que

$$g'(h) = f'(\xi), \ \ldots, \ g^{(n)}(h) = f^{(n)}(\xi);$$

logo, se fizermos $h = 0$,

$$g'(0) = f'(x), \ \ldots, \ g^{(n)}(0) = f^{(n)}(x).$$

Aplicando a fórmula anterior à função $f(x + h) = g(h)$, que é, ela própria, um polinômio em h de grau n, obtemos imediatamente a série de Taylor

$$f(\xi) = f(x + h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \ldots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x).$$

2. Teorema de Taylor para funções arbitrárias.

As fórmulas acima sugerem que procuremos uma relação semelhante para os casos em que a função arbitrária $f(x)$ não seja, necessàriamente, um polinômio. Nestes casos, entretanto, a fórmula sòmente poderá conduzir à aproximação da função, por meio de um polinômio.

Comparemos os valores da função f nos pontos x e $\xi = x + h$, de sorte que $h = \xi - x$. Considerando-se n como um inteiro positivo qualquer, a expressão

$$f(x) + (\xi - x)f'(x) + \ldots + \frac{(\xi - x)^n}{n!}f^{(n)}(x)$$

não será, via de regra, uma representação exata do valor da função $f(\xi)$. Devemos, portanto, fazer

$$f(\xi) = f(x) + (\xi - x)f'(x) + \frac{(\xi - x)^2}{2!}f''(x) + \ldots + \frac{(\xi - x)^n}{n!}f^{(n)}(x) + R_n,$$

onde R_n representa o *resto*, quando $f(\xi)$ é substituída por $f(x) + f'(x)(\xi - x) + \ldots$. Em primeira instância, esta equação nada mais é do que uma definição explícita de R_n. A sua importância reside no fato de possibilitar a dedução de uma expressão simples e de emprêgo constante, do resto R_n. Para isto, imaginemos a quantidade ξ fixa e

x como variável independente. O resto será, então, a função $R_n(x)$. Pela equação estabelecida, esta função se anula para $x = \xi$:

$$R_n(\xi) = 0.$$

Ademais, obtemos por derivação

$$R_n'(x) = -\frac{(\xi - x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x).$$

Se derivarmos a equação que dá o resto, em relação a x, obteremos 0 no primeiro membro, visto $f(\xi)$ não depender de x, sendo, portanto, considerada constante. Derivando cada têrmo do segundo membro pela regra dos produtos, vemos que todos se cancelam, com exceção do último, o qual está escrito na fórmula acima com o sinal menos.

Pelo teorema fundamental do cálculo integral

$$R_n(x) = R_n(x) - R_n(\xi) = \int_\xi^x R_n'(t)\, dt = -\int_x^\xi R_n'(t)\, dt,$$

de modo que obteremos a expressão

$$R_n(x) = \int_x^{x+h} \frac{(x + h - t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt.$$

Introduzindo a nova variável de integração τ, por meio da equação $\tau = t - x$, virá

$$R_n = \frac{1}{n!} \int_0^h (h - \tau)^n f^{(n+1)}(x + \tau)\, d\tau.$$

Reunindo êstes resultados, temos o seguinte enunciado:

Se a função f(x) *tiver derivadas contínuas até a ordem* (n + 1) *no intervalo considerado, teremos*

$$f(x + h) = f(x) + hf'(x) + \frac{2^2}{h!} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \dots$$
$$+ \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x) + R_n,$$

ou (expressão equivalente para h = ξ − x)

$$f(\xi) = f(x) + (\xi - x) f'(x) + \frac{(\xi - x)^2}{2!} f''(x) + \dots$$
$$+ \frac{(\xi - x)^n}{n!} f^{(n)}(x) + R_n,$$

onde o resto R_n é dado pela fórmula

$$R_n = \frac{1}{n!}\int_0^h (h-\tau)^n f^{(n+1)}(x+\tau)\,d\tau.$$

Fazendo-se, em particular, $x = 0$ e substituindo, então, h por x, virá

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + R_n$$

com o resto

$$R_n = \frac{1}{n!}\int_0^x (x-\tau)^n f^{(n+1)}(\tau)\,d\tau.$$

Estas fórmulas são denominadas, geralmente, teorema de Taylor. Elas dão os valores de $f(x+h)$ e de $f(x)$, ordenadamente, em polinômios de grau n em h e x, respectivamente (os chamados polinômios de aproximação), e o resto. Os polinômios de aproximação são caracterizados pelo fato de que, quando $h = 0$ (ou $x = 0$, conforme o caso), o seu valor e o das suas n primeiras derivadas, coincide com os da função dada e das suas n primeiras derivadas. Em contraste com a série de Taylor para os polinômios [1], o resto e a sua fórmula, no caso das funções arbitrárias, são *essenciais*. A importância da fórmula reside em que o resto, embora apresentando forma mais complicada que os outros têrmos da relação, fornece, não obstante, um meio seguro para se estimar a precisão com que a soma dos $n+1$ primeiros têrmos

$$f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0),$$

representa a função $f(x)$.

3. Avaliação do resto.

Para que a aproximação fornecida pelos $n+1$ primeiros têrmos da série de Taylor seja considerada suficiente, é preciso que o resto seja convenientemente pequeno. Voltaremos, pois, nossa atenção para o cálculo do resto. Êste cálculo é feito da maneira mais simples, recorrendo-se ao teorema do valor médio do cálculo integral (Cap. II, § 7, pág. 127).

[1] Cuja representação não cogita do resto.

Empregaremos êste teorema sob a forma

$$\int_0^h p(\tau)\,\phi(\tau)\,d\tau = \phi(\theta h)\int_0^h p(\tau)\,d\tau,$$

onde $p(\tau)$ representa uma função contínua, que em parte alguma do intervalo de integração é negativa, e $\phi(\tau)$, simplesmente, uma função contínua, ao passo que θ é um número do intervalo [1] $0 \leqq \theta \leqq 1$. Se, na fórmula do resto, fizermos $(h-\tau)^n = p(\tau)$, teremos

$$R_n = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x+\theta h);$$

enquanto que, se fizermos $p(\tau) = 1$, obteremos a expressão

$$R_n = \frac{h^{n+1}}{n!}(1-\theta)^n f^{(n+1)}(x+\theta h),$$

que é de somenos importância para o nosso estudo, porém, foi deduzida para completar a exposição. Nestas fórmulas θ representa um certo número no intervalo $0 \leqq \theta \leqq 1$, cujo valor, via de regra, não podemos especificar mais claramente. Em geral, porém, é claro que tal valor é diferente nas duas fórmulas do resto, e depende, além disso, de n, x e de h. A primeira fórmula do resto foi deduzida por Lagrange e a segunda por Cauchy, sendo ambas conhecidas por êstes nomes. [2]

O nosso principal interêsse está em descobrir se o resto tende para zero, à medida que n cresce. Se isto se verificar, quanto maior escolhermos n, tanto mais exatamente a função $f(x+h)$ será representada

[1] Podemos admitir, efetivamente, que $0 < \theta < 1$, mas, no caso presente, isto não tem importância.

[2] Tanto esta como outras expressões para o resto podem ser deduzidas do teorema do valor médio do cálculo diferencial e do teorema generalizado do valor médio (pág. 203), respectivamente. Aplicamos êstes teoremas à função $R_n(x) = R_n(x) - R_n(\xi)$ e ao par de funções $R_n(x)$ e $(x-\xi)^{n+1}$, onde consideramos ξ fixo, e empregamos a fórmula

$$R_n'(x) = -\frac{(\xi - x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x).$$

Os métodos apresentados para a determinação das fórmulas do resto emprestam maior importância ao fato do teorema de Taylor constituir uma generalização do teorema do valor médio. Além disso, oferecem a vantagem, importante para fins teóricos, de sòmente necessitarmos admitir a *existência* e não a *continuidade* da derivada de ordem $n+1$ da função. Por outro lado, porém, perdemos a representação exata que tínhamos para o resto, sob a forma de integral.

pelo correspondente polinômio em h. Neste caso dizemos que *desenvolvemos a função segundo a série infinita de Taylor*.

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1!}f'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \dots,$$

ou, em particular, se fizermos inicialmente $x = 0$, e então substituirmos h por x,

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + \dots.$$

Na próxima seção apresentaremos os exemplos respectivos.

Antes disso, porém, queremos assinalar a segunda dedução importante decorrente do estudo da série de Taylor. Na primeira fórmula, imaginando-se que a quantidade h diminui progressivamente, tendendo para zero, os vários têrmos da série tenderão para zero com diferentes ordens de grandeza (cap. III, § 9, pág. 195). Conseqüentemente, denominaremos a expressão $f(x)$ o têrmo de ordem zero da série de Taylor; $hf'(x)$ será o têrmo de primeira ordem, $\frac{h^2}{2!}f''(x)$ o de segunda ordem, e assim sucessivamente. Da fórmula do resto deduzimos:

Desenvolvendo uma função até o têrmo de ordem n, *cometemos um êrro que tende para zero, na ordem* $(n+1)$, *quando* $h \to 0$.

Muitas aplicações importantes são baseadas nesta propriedade. Ela mostra, por exemplo, que o polinômio de aproximação representará a função $f(x+h)$ tanto mais precisamente, quanto mais próximo de $x+h$ estiver o ponto x. Ao mesmo tempo, num caso dado, a aproximação na vizinhança imediata do ponto x pode ser mais apurada, pelo crescimento do valor de n.

Exemplos

1. Seja $f(x)$ uma função que possui derivada contínua no intervalo $a \leqq x \leqq b$, e $f''(x) \geqq 0$ para qualquer valor de x. Sendo ξ um ponto qualquer do intervalo, a curva nunca passará abaixo da tangente no ponto $x = \xi$, $y = f(\xi)$. (Empregar a série de Taylor com três têrmos.)

2. Calcular o valor de θ pela fórmula de Lagrange, para o resto R_n, para $\frac{1}{1-x}$ e $\frac{1}{1+x}$, desenvolvidas segundo as potências de x.

3. APLICAÇÕES. DESENVOLVIMENTO DAS FUNÇÕES ELEMENTARES

Empregaremos, agora, os resultados gerais obtidos na seção anterior, para representar as funções elementares, aproximadamente, por polinômios, desenvolvendo-as, então, segundo a série de Taylor. Limitaremos, entretanto, o nosso estudo às funções cujos coeficientes do desenvolvimento em série sejam obtidos por leis simples. As séries correspondentes a algumas outras funções serão apresentadas no capítulo VIII (págs. 405 e seguintes).

1. Função exponencial.

O exemplo mais simples é oferecido pela função exponencial $f(x) = e^x$. Neste caso, tôdas as derivadas são idênticas à função original $f(x)$, dando-nos, portanto, o valor 1 para $x = 0$. Logo, usando a fórmula de Lagrange para o resto, obteremos a expressão

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{x+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}$$

de acôrdo com o § 2 (págs. 320 e seguintes). Se, agora, fizermos n crescer além de qualquer limite, o resto tenderá para zero, qualquer que tenha sido o valor fixo de x que tenhamos escolhido, visto que, de início, $|e^{\theta x}| \leqq e^{|x|}$. Então, para $n \geqq m$, virá

$$\frac{|x|}{n} < \frac{1}{2}; \quad \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right| = \frac{|x^m|}{m!} \cdot \frac{|x|}{m+1} \cdots \frac{|x|}{n+1}$$

$$\leqq \frac{|x^m|}{m!} \frac{1}{2^{n+1-m}} \leqq \frac{|2x|^m}{m!} \frac{1}{2^n},$$

de sorte que $$|R_n| \leqq \frac{|2x|^m}{m!} e^{|x|} \frac{1}{2^n}.$$

Como os dois primeiros fatôres da direita são independentes de n, e $1|2_n$ tende para zero à medida que n cresce, o enunciado se verifica. Se imaginarmos que o número x não é fixo, mas sim podendo variar livremente no intervalo $-a \leqq x \leqq a$, onde a é um número fixo positivo, deduz-se do que foi exposto que, se escolhermos $m > 2a$, a estimativa

$$|R_n| \leqq \frac{|2a|^m}{m!} e^a \frac{1}{2^n}$$

será válida, desde que $n \geqq m$. Estabelecemos, assim, um limite para o resto, que se verifica para todos os valores de x no intervalo $-a \leqq x \leqq a$, e que tende para zero quando $n \to \infty$. Podemos, pois, escrever o desenvolvimento de e^x em série infinita, como segue

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^\nu}{\nu!},$$

sendo a última expressão apenas uma representação abreviada do desenvolvimento em série. Tal desenvolvimento aplica-se para todos os valores de x. Provamos, assim, novamente, que o número e, já estudado no cap. I (pág. 43), é a própria base dos logaritmos naturais (cap. III, § 6). Nos cálculos numéricos empregaremos, como é lógico, a forma finita da série de Taylor, com o respectivo resto. Para $x = 1$, por exemplo, virá

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{e^\theta}{(n+1)!}.$$

Se quisermos calcular e com êrro inferior a 1/10 000, precisamos apenas escolher n tão grande que o resto seja efetivamente menor do que 1/10 000 e, já que o resto é realmente menor [1] que $3/(n+1)!$, basta fazer $n = 7$, visto que $8! > 30\,000$. Obteremos então o valor aproximado

$$e = 2{,}718\,22$$

com êrro inferior a 0,000 1. Não levamos em conta, neste caso, o êrro devido à supressão da sexta casa decimal.

2. **Sen x, cos x, Sh x, Ch x.**

Para as funções sen x, cos x, Sh x, Sh x, achamos as seguintes fórmulas [2]:

$f(x)$	$=$	sen x	cos x	Sh x	Ch x,
$f'(x)$	$=$	cos x	—sen x	Ch x	Sh x,
$f''(x)$	$=$	—sen x	—cos x	Sh x	Ch x,
$f'''(x)$	$=$	—cos x	sen x	Ch x	Sh x,
$f''''(x)$	$=$	sen x	cos x	Sh x	Ch x.
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

(1) Sabemos que $e < 3$, o que se deduz imediatamente (pág. 43) da série estabelecida para e. Verifica-se, em qualquer caso, que $\frac{1}{n!} \leqq \frac{1}{2^{n-1}}$, e

$$e < 1 + 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \ldots = 1 + 1/(1 - \tfrac{1}{2}) = 3.$$

(2) Se $f(x) = \text{sen}\, x$ ou $f(x) = \cos x$, a derivada de ordem n pode sempre ser representada pela expressão

$$f^{(n)}(x) = f(x + \tfrac{1}{2} n\pi).$$

Logo, nos polinômios de aproximação para $\operatorname{sen} x$ e $\operatorname{Sh} x$, os coeficientes das potências pares de x se anulam, ao passo que, nos polinômios de aproximação para $\cos x$ e $\operatorname{Ch} x$, são os coeficientes de ordem ímpar que se anulam. Assim, no primeiro caso, os polinômios de ordem $(2n + 1)$ e $(2n + 2)$ são idênticos, enquanto que, no segundo, são idênticos aos de ordem $2n$ e $(2n + 1)$. Se, em cada caso, usarmos o polinômio de ordem mais elevada, obtemos logo, empregando a fórmula de Lagrange para o resto,

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$+ (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} \cos(\theta x),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$+ (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cos(\theta x),$$

$$\operatorname{sen} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$+ \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} \operatorname{Ch}(\theta x),$$

$$\operatorname{Ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$+ \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \operatorname{Ch}(\theta x),$$

onde, em cada uma das quatro fórmulas, θ representa, naturalmente, um número diferente, contido no intervalo $0 \leqq \theta \leqq 1$, número êste que, além disso, depende de n e de x. Nestas fórmulas podemos também levar a aproximação tão longe quanto quisermos, para cada valor de x, visto que o resto tende para 0 quando n cresce. Obteremos, então, as quatro séries

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \dots = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{x^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!},$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \dots = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{x^{2\nu}}{(2\nu)!},$$

$$\operatorname{Sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \quad \ldots = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!},$$

$$\operatorname{Ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \quad \ldots = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^{2\nu}}{(2\nu)!}.$$

As duas últimas fórmulas podem, também, ser obtidas da série e^x desenvolvida de acôrdo com as definições das funções hiperbólicas.

3. Série binômia.

Podemos pôr de lado a série de Taylor para as funções $\log(1 + x)$ e $\operatorname{arc\,tg} x$, as quais já foram tratadas diretamente no § 1 (pág. 315). Devemos, porém, ocupar-nos da generalização do teorema do binômio para expoentes arbitrários, que é uma das mais proveitosas descobertas matemáticas de Newton, representando um dos casos mais importantes de desenvolvimento em série, pelo teorema de Taylor. Visamos desenvolver a função

$$f(x) = (1 + x)^\alpha$$

segundo a série de Taylor, sendo $x > -1$ e α um número arbitrário, positivo ou negativo, racional ou irracional. Escolhemos a função $(1 + x)^\alpha$ em vez de x^α porque no ponto $x = 0$ nem tôdas as derivadas de x^α devem ser necessàriamente contínuas, exceto no caso ordinário de valores inteiros, não-negativos de α. Em primeiro lugar calculamos as derivadas de $f(x)$, obtendo

$$f'(x) = \alpha(1 + x)^{\alpha-1}, \quad f''(x) = \alpha(\alpha - 1)(1 + x)^{\alpha-2}, \ldots,$$
$$f^{(\nu)}(x) = \alpha(\alpha - 1) \ldots (\alpha - \nu + 1)(1 + x)^{\alpha-\nu}.$$

Em particular, para $x = 0$, temos

$$f'(0) = \alpha, f''(0) = \alpha(\alpha - 1), \ \ldots, f^{(\nu)}(0) = \alpha(\alpha - 1)(\alpha - \nu + 1).$$

O teorema de Taylor dá, então,

$$(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2!} x^2 + \ldots$$
$$+ \frac{\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2) \ldots (\alpha - n + 1)}{n!} x^n + R_n.$$

Devemos ainda estudar o resto. Êste problema não apresenta grande dificuldade, porém, não é tão simples como o dos casos anteriormente estudados. Deixamos de lado a avaliação do resto, uma vez que o teorema do binômio, generalizado, será demonstrado completamente

de forma algo diferente e mais simples no capítulo VIII (págs. 406 e seguintes; também, pág. 336). O resultado que damos desde já, é que em todos os casos onde $|x| < 1$ o resto tende para 0 e, portanto, a expressão $(1 + x)^\alpha$ pode ser desenvolvida segundo a *série binômia infinita*

$$(1 + x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2!}x^2 + \ldots = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\alpha}{\nu} x^\nu,$$

em que, por brevidade, introduzimos os coeficientes gerais

$$\binom{\alpha}{\nu} = \frac{\alpha(\alpha - 1) \ldots (\alpha - \nu + 1)}{\nu!} \text{ (para } \nu > 0), \binom{\alpha}{0} = 1.$$

Exemplos

1. Desenvolver $(1 + x)^{1/2}$ até os dois primeiros têrmos, mais o resto. Calcular o resto.

2. Empregando a série do exemplo 1 (desprezando o resto), calcular $\sqrt{2}$. Qual o grau de precisão desta aproximação?

3. Qual a função linear que mais se aproxima de $\sqrt[3]{1 + x}$ na vizinhança do ponto $x = 0$? Entre que valores de x o êrro de aproximação é menor do que 0,01?

4. Qual a função quadrática que mais se aproxima de $\sqrt[3]{1 + x}$ na vizinhança de $x = 0$? Qual é o maior êrro cometido no intervalo $-0,1 \leqq x \leqq 0,1$?

5. (*a*) Qual a função linear, (*b*) qual a função quadrática que mais se aproxima de $\sqrt[n]{1 + x}$, na vizinhança de $x = 0$? Estabelecer o êrro máximo quando $-0,1 \leqq x \leqq 0,1$.

6. Calcular sen (0,01) com 4 decimais.

7. Fazer o mesmo para (*a*) cos (0,01) (*b*) $\sqrt[3]{126}$, (*c*) $\sqrt{97}$.

8. Desenvolver sen $(x + h)$ segundo a série de Taylor, em relação às potências de h. Determinar sen $31°$ [= sen $(30° + 1°)$] por êste método, com 3 decimais.

Desenvolver as funções dos exemplos 9-18 na vizinhança de $x = 0$, com três têrmos mais o resto (estabelecer o resto pela fórmula de Lagrange).

9. $\operatorname{sen}^2 x$.

10. $\cos^3 x$.

11. $\log \cos x$.

12. $\operatorname{tg} x$.

13. $\log \dfrac{1}{\cos x}$.

14. $e^{x^{-2}}$.

15. $\dfrac{1}{\cos x}$.

16. $\operatorname{cotg} x - \dfrac{1}{x}$.

17. $\dfrac{1}{\operatorname{sen} x} - \dfrac{1}{x}$.

18. $\dfrac{\log(1 + x)}{1 + x}$.

19. (*a*) Desenvolver) $e^{\operatorname{sen} x}$ até cinco têrmos mais o resto; (*b*) na série ... substituir z por sen x, tomando um número suficiente de têrmos a fim de assegurar que o coeficiente de x^4 está correto. Comparar o resultado com (*a*).

20. Determinar o polinômio de quarto grau que mais se aproxima de tg x na vizinhança de $x = 0$. Em que intervalo êste polinômio representará tg x com êrro inferior a 5%?

21. Achar os 6 primeiros têrmos da série de Taylor para y, segundo as potências de x, no caso das funções definidas por

(*a*) $x^2 + y^2 = y$, $y(0) = 0$; (*b*) $x^2 + y^2 = y$, $y(0) = 1$;
(*c*) $x^3 + y^3 = y$, $y(0) = 0$.

4. Aplicações geométricas

O comportamento de uma função $f(x)$ na vizinhança de um ponto $x = a$, ou o comportamento de uma curva dada na vizinhança de um ponto, pode ser estudado com precisão cada vez maior pelo teorema de Taylor, visto êle decompor o acréscimo que a função sofre quando passa a um ponto vizinho, $x = a + h$, em uma soma de quantidades de primeira, segunda, ... ordem.

1. Contato das curvas.

Empregaremos êste método para investigar o conceito de *contato* de duas curvas.

Quando em um ponto, digamos, $x = a$, duas curvas, $y = f(x)$ e $y = g(x)$ não sòmente cortam, mas têm ainda tangente comum, diremos que elas se tocam mùtuamente neste ponto, ou que têm um *contato de primeira ordem*. Os desenvolvimentos pela série de Taylor das funções $f(a + h)$ e $g(a + h)$ terão, portanto, os mesmos têrmos de ordem zero e de primeira ordem em h. Se no ponto $x = a$ as segundas derivadas de $f(x)$ e de $g(x)$ também forem iguais, diremos que as curvas têm *contato de segunda ordem*. Nos desenvolvimentos pela série de Taylor, os têrmos de segunda ordem serão os mesmos, e se admitirmos que ambas as funções tenham derivadas contínuas de terceira ordem ao menos, a diferença $D(x) = f(x) - g(x)$ pode ser expressa sob a forma

$$D(a + h) = f(a + h) - g(a + h) = \frac{h^3}{3!} D'''(a + \theta h) = \frac{h^3}{3!} F(h),$$

em que a expressão $F(h)$ tende para $f'''(a) - g'''(a)$ quando h tende para zero. A diferença $D(a + h)$ anula-se, portanto, pelo menos na terceira ordem, com h.

Podemos prosseguir dêste modo e estudar o caso geral, onde as séries de Taylor para $f(x)$ e $g(x)$ são as mesmas até os têrmos de ordem n, isto é,

$$f(a) = g(a),\ f'(a) = g'(a),\ f''(a) = g''(a),\ \ldots,\ f^{(n)}(a) = g^{(n)}(a).$$

Admitimos, então, que as derivadas de ordem $n + 1$ são, também, contínuas. Nestas condições, diremos que, neste ponto, as curvas têm *contato de ordem n*. A diferença entre as duas funções assumirá, então, a forma

$$f(a + h) - g(a + h) = \frac{h^{n+1}}{(n + 1)!} F(h),$$

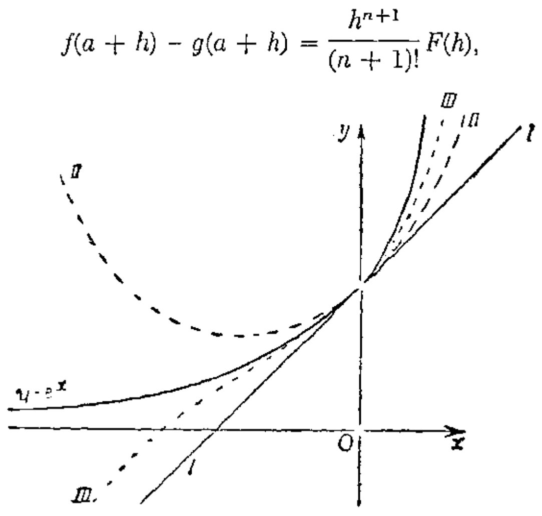


Fig 1.— Parábolas osculatrizes de e^x

onde, já que $0 \leqq \theta \leqq 1$, a quantidade $F(h) = D^{(n+1)}(a + \theta h)$ tende para $f^{(n+1)}(a) - g^{(n+1)}(a)$ quando h tende para zero. Verificamos por esta fórmula que, no ponto de contato, a diferença $f(x) - g(x)$ se anula na ordem $(n + 1)$, ao menos.

Os polinômios de Taylor são definidos geomètricamente, de modo simples, pelo fato de representarem as parábolas de ordem n que, no ponto dado, têm contato, da maior ordem possível, com o gráfico da função proposta. Daí serem denominadas, às vêzes, *parábolas osculatrizes*. A figura 1 representa as três primeiras parábolas osculatrizes da exponencial $y = e^x$, no ponto $x = 0$.

Se duas curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ tiverem contato de ordem n, a definição não exclui a possibilidade de existir outro contato de or-

dem mais elevada ainda, isto é, de que a equação $f^{(n+1)}(a) = g^{(n+1)}(a)$ também se verifique. Se isto não se der, e neste caso $f^{(n+1)}(a) \neq g^{(n+1)}(a)$, podemos dizer que o contato é exatamente de ordem n ou que a ordem do contato é *exatamente* n [1].

Inferimos, tanto das fórmulas apresentadas, como das figuras, um fato notável, que muitas vêzes passa despercebido aos principiantes. Se o contato de duas curvas fôr exatamente de ordem par, isto é, se um número n, par, de derivadas das duas funções tiver o mesmo valor no ponto em questão, ao passo que as derivadas de ordem $(n + 1)$ são diferentes, de acôrdo com as fórmulas anteriormente deduzidas, a diferença $f(a + h) - g(a + h)$ terá sinais diferentes para valores numèricamente pequenos de h, positivos ou negativos. As duas curvas cortar-se-ão, pois, no ponto de contato. Êste caso ocorre, por exemplo, no contato de segunda ordem, se as terceiras derivadas tiverem valores diferentes. Se, entretanto, considerarmos o caso de um contato de ordem exatamente ímpar, digamos, um contato comum de primeira ordem, a diferença $f(a + h) - g(a + h)$ terá o mesmo sinal para todos os valores numèricamente pequenos de h, quer positivos, quer negativos; as duas curvas, portanto, não se cortam na vizinhança do ponto de contato. A ilustração mais simples do que acabamos de expor é dada pelo contato da curva com a sua tangente. A tangente pode cortar a curva sòmente nos pontos em que o contato fôr, no mínimo, de segunda ordem; efetivamente, ela atravessará a curva nos pontos em que a ordem do contato é par, por exemplo, nos pontos de inflexão, onde $f''(x) = 0$, mas $f'''(x) \neq 0$. Nos pontos de contato de ordem ímpar, ela não atravessará a curva. Como exemplos, podemos tomar um ponto comum da curva em que a derivada de segunda ordem não seja nula, ou a curva $y = x^4$ na sua origem.

2. O círculo de curvatura como círculo osculador.

O conceito de curvatura de uma curva $y = f(x)$, quando encarado sob êste ponto de vista, ganha novo significado intuitivo. Por um ponto da curva, definido pelas coordenadas $x = a$, $y = b$, passa uma infinidade de círculos que tocam a curva neste ponto. Os centros de tais círculos estão sôbre a normal à curva, e a cada ponto da normal cor-

[1] O fato da ordem de contacto de duas curvas ser uma relação puramente geométrica, não afetada pela mudança dos eixos coordenados, pode ser fàcilmente comprovado por meio das fórmulas referentes à mudança dos eixos.

responde justamente um círculo tangente. Podemos esperar que, por uma escolha apropriada, possamos estabelecer um contato de *segunda* ordem entre a curva e o círculo.

Com efeito, sabemos do cap. V (pág. 283) que, para o círculo de curvatura no ponto $x = a$, cuja equação é, digamos, $y = g(x)$, não sòmente temos $g(a) = f(a)$ e $g'(a) = f'(a)$, mas também $g''(a) = f''(a)$. Logo, o círculo de curvatura é, ao mesmo tempo, o círculo osculador no ponto da curva em discussão; isto é, êle é o círculo que tem um contato de segunda ordem com a curva, no ponto considerado. No caso limite de um ponto de inflexão, ou, em geral, no de um ponto no qual a curvatura seja nula e o raio de curvatura infinito, o círculo de curvatura transforma-se na tangente. Nos casos comuns, ou seja, quando o contato não é de ordem superior à segunda, o círculo de curvatura não só toca a curva, mas também a atravessa (fig. 2).

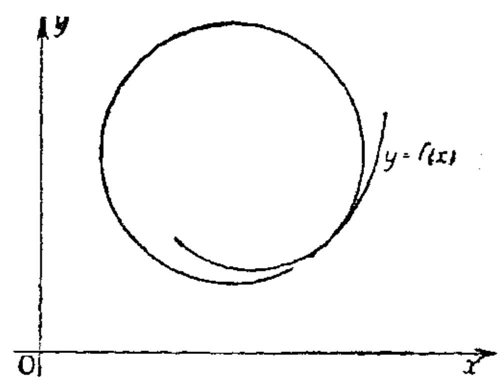


Fig. 2.— Círculo osculador

3. Teoria dos máximos e mínimos.

Como vimos no cap. III (pág. 161), um ponto $x = a$ no qual $f'(a) = 0$ representa um máximo da função $f(x)$ se $f''(a)$ fôr negativa, e um mínimo, se $f''(a)$ fôr positiva. Estas condições são, portanto, *suficientes* para que ocorra um máximo ou um mínimo. Entretanto, elas não são, de modo algum, *necessárias*; no caso em que $f''(a) = 0$, apresentam-se três possibilidades: a função pode ter um máximo no ponto em questão, pode ter um mínimo, ou pode não ter máximo nem mínimo. Exemplos destas três hipóteses são dados pelas funções $y = -x^4$, $y = x^4$, e $y = x^3$, no ponto $x = 0$. O teorema de Taylor nos permite dar, imediatamente, um enunciado geral das condições suficientes para a existência de um máximo ou de um mínimo. Necessitamos, apenas, desenvolver em série a função $f(a + h)$, segundo as potências de h. O essencial será, portanto, determinar o primeiro têrmo que, contendo uma potência par de h não se anule, ou uma potência ímpar. No primeiro caso teremos um máximo ou um mínimo, conforme o coeficiente de h seja negativo ou positivo. No segundo caso haverá

uma tangente inflexional horizontal, sem máximo nem mínimo. O leitor poderá completar o raciocínio sòzinho, lançando mão da fórmula do resto [1].

Exemplos

1. De que ordem é o contato das curvas $y = e^x$ e $y = 1 + x + \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x$ no ponto $x = 0$?

2. De que ordem é o contato de $y = \operatorname{sen}^4 x$ e $y = \operatorname{tg}^4 x$ no ponto $x = 0$?

3. Determinar as constantes a, b, c, d de sorte que as curvas $y = e^{2x}$ e $y = a \cos x + b \operatorname{sen} x + c \cos 2x + d \operatorname{sen} 2x$ tenham contato de 3.ª ordem no ponto $x = 0$.

4. De que ordem são os contatos das curvas

$$x^3 + y^3 = xy, \; x^2 + y^2 = x$$

nos seus pontos de interseção? Construir as curvas citadas.

5. Qual é a ordem de contato das curvas

$$x^2 + y^2 = y, \; x^2 = y$$

nos seus pontos de interseção?

6. A curva $y = f(x)$ passa pela origem O e toca o eixo dos x em O. Mostrar que o raio de curvatura da curva no ponto O é dado por $\rho = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{2y}$.

7.* Seja K um círculo que toca uma curva dada num ponto P e que passa por um ponto Q, vizinho da curva. Mostrar que o limite do círculo K, quando $Q \to P$, é o círculo de curvatura da curva no ponto P.

8.* Designemos por R o ponto de interseção das duas normais a uma curva dada, tiradas pelos pontos vizinhos P e Q da própria curva. Demonstrar que, quando $Q \to P$, R tende para o centro de curvatura da curva relativo ao ponto P. (O centro de curvatura é a interseção de normais vizinhas.)

9.* Demonstrar que a ordem de contato de uma curva com o seu círculo osculador, nos pontos em que o raio de curvatura é máximo ou mínimo, é, ao menos, a terceira.

10. Determinar os máximo e mínimo da função $y = e^{-1/x^2}$.

(1) A condição necessária e suficiente já estabelecida (pág. 161), entretanto, é mais conveniente nas aplicações, a saber: Desde que a primeira derivada $f'(x)$ se anule sòmente em um número finito de pontos, a condição necessária e suficiente para que ocorram máximos ou mínimos, em um dêsses pontos, é que a primeira derivada $f'(x)$ mude de sinal ao passar pelo ponto.

APÊNDICE AO CAPÍTULO VI

1. Exemplo de funções que não admitem desenvolvimento segundo a série de Taylor

A possibilidade da representação de uma função pela série de Taylor, com um resto de ordem $(n+1)$, depende, essencialmente, da derivabilidade da função no ponto considerado. Por tal razão, a função $\log x$ não pode ser representada por uma série de Taylor segundo as potências de x, o mesmo acontecendo com $\sqrt[3]{x}$, cuja derivada é infinita em $x = 0$.

Para que a função possa ~~ser~~ desenvolvida segundo a série *infinita* de Taylor, é preciso que *tôdas* as suas derivadas existam no ponto em questão; esta condição, entretanto, não é, de forma alguma, suficiente. Mesmo funções para as quais existam tôdas as derivadas e sejam contínuas num determinado intervalo, podem não permitir o seu desenvolvimento segundo a série de Taylor, isto é, o resto R_n do teorema de Taylor pode deixar de tender para zero quando n crescer, por menor que seja o intervalo em que quisermos desenvolver a função.

O exemplo mais simples dêste fenômeno é oferecido pela função $y = f(x) = e^{-1/x^2}$ para $x \neq 0$, $f(0) = 0$, que já foi estudado no apêndice do cap. III (pág. 196). Esta função, com tôdas as suas derivadas, é contínua em cada intervalo, mesmo em $x = 0$, e vimos que, neste ponto, tôdas as derivadas se anulam, ou seja, $f^{(n)}(0) = 0$ para qualquer valor de n. Logo, no teorema de Taylor, todos os coeficientes do polinômio de aproximação se anulam, qualquer que seja o valor atribuído a n. Em outras palavras, o resto é igual à própria função e, portanto, exceto quando $x = 0$, não se aproxima de zero à medida que n cresce, visto a função ser positiva para qualquer valor de x, diferente de zero.

2. Demonstração de que o número e é irracional

Da fórmula $e = 2 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!}e^{\theta}$ deduzimos imediatamente que o número e é irracional. Se o contrário fôsse verdadeiro, ou seja, se $e = p/q$, onde p e q representam inteiros, poderíamos, certamente, escolher n maior do que q. Neste caso, $n!e = n!\frac{p}{q}$ seria um inteiro. Por outro lado, $n!e = 2n! + \frac{n!}{2!} + \ldots + \frac{n!}{n!} + \frac{1}{n+1}e^{\theta}$, e como $e^{\theta} < e < 3$, devemos ter $0 < \frac{e^{\theta}}{n+1} < 1$. Logo, o inteiro

$n!e$ = ao inteiro $2n! + \frac{n!}{2} + \ldots + 1$ mais uma fração própria que não se anula, o que é impossível.

3. Demonstração da convergência da série binomial

No § 3 (pág. 329) adiamos a avaliação do resto R_n no desenvolvimento de $f(x) = (1 + x)^\alpha$ para $|x| < 1$. Executaremos êste cálculo agora. Por conveniência, distinguiremos os casos em que $x > 0$ e $x < 0$.

Para $f^{(n+1)}(x)$ temos a expressão

$$f^{(n+1)}(x) = \alpha(\alpha - 1) \ldots (\alpha - n)\frac{(1 + x)^\alpha}{(1 + x)^{n+1}}.$$

Se $x > 0$, escreveremos o resto sob a fórmula de Lagrange,

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n + 1)!}\alpha(\alpha - 1) \ldots (\alpha - n)\frac{(1 + \theta x)^\alpha}{(1 + \theta x)^{n+1}}$$

de modo que

$$|R_n(x)| \leqq \left|\frac{\alpha(\alpha - 1) \ldots (\alpha - n)}{(n + 1)!}\right|\frac{x^{n+1}(1 + x)^\alpha}{1^{n+1}}.$$

Fazendo $b = [\,|\alpha|\,] + 1$, onde $[\,|\alpha|\,]$ representa o maior inteiro que não excede $|\alpha|$, virá

$$\begin{aligned}|R_n(x)| &\leqq 2^b\frac{b(b + 1) \ldots (b + n)}{(n + 1)!}x^{n+1}\\ &\leqq \frac{2^b}{(b - 1)!}\cdot\frac{1.2\ldots(n + 1)(n + 2) \ldots (n + b)}{(n + 1)!}x^{n+1}\\ &\leqq \frac{2^b}{(b - 1)!}(n + b)^{b-1}x^{n+1},\end{aligned}$$

e, desde que b é fixo, se $0 < x < 1$, a expressão tende para 0 quando n cresce.

Para o caso $-1 < x < 0$, escreveremos o resto sob a fórmula de Cauchy

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n!}(1 - \theta)^n\,\alpha(\alpha - 1) \ldots (\alpha - n)\frac{(1 + \theta x)^{\alpha-1}}{(1 + \theta x)^n},$$

de sorte que

$$|R_n(x)| \leqq \frac{(1 - \theta)^n}{(1 - \theta|x|)^n}|x|^{n+1}\left|\frac{\alpha(\alpha - 1)\ldots(\alpha - n)}{n!}\right||(1 + \theta x)^{\alpha-1}|.$$

Uma vez que $|x| < 1$, o último fator não poderá exceder a constante K, independente de n. Da mesma forma, $(1 - \theta)/(1 - \theta|x|) < 1$. Como já o fizemos, escreveremos novamente $b = [|\alpha|] + 1$, vindo, então,

$$|R_n(x)| \leqq K|x|^{n+1}\frac{1}{(b-1)!}(n+2)(n+3)\dots(n+b)$$
$$\leqq \frac{K}{(b-1)!}(n+b)^{b-1}|x|^{n+1},$$

que se aproxima de 0 quando n cresce.

Assim, em qualquer caso, quando $|x| < 1$, o resto tende para zero à medida que n cresce, justificando o desenvolvimento do § 3 (pág. 330).

4. Zeros e infinitos das funções. Símbolos indeterminados

A série de Taylor para uma função, na vizinhança do ponto $x = a$, nos permite caracterizar o comportamento da função nas proximidades do ponto referido, da forma seguinte. Dizemos que f(x) *tem um zero, precisamente de ordem* n, ou se anula, *exatamente, na ordem* n, no ponto $x = a$, se $f(a) = 0$, $f'(a) = 0$, $f''(a) = 0$, $\dots$, $f^{(n-1)}(a) = 0$, e $f^{(n)}(a) \neq 0$. Admitiremos, aqui, que na vizinhança do ponto, a função possui, no mínimo, derivadas contínuas até a ordem n. Pela definição, podemos escrever a série de Taylor para a função dada, na vizinhança do ponto considerado, sob a forma

$$f(a+h) = \frac{h^n}{n!}F(h),$$

na qual o fator $F(h)$ tende para um limite diferente de 0, a saber, $f^{(n)}(a)$, à medida que $h \to 0$.

Se a função $\phi(x)$ fôr definida em todos os pontos da vizinhança de $x = a$, exceto, talvez, no próprio ponto $x = a$, e se

$$\phi(x) = \frac{f(x)}{g(x)},$$

em que o numerador não se anula no ponto $x = a$, mas o denominador possui um zero de ordem ν, diremos que a função $\phi(x)$ fica *infinita de ordem* ν *no ponto* x = a. No caso do numerador também possuir um zero de ordem μ no ponto $x = a$ e, além disso, se $\mu > \nu$, diremos que

a função possui um zero de ordem $(\mu - \nu)$ neste ponto, ao passo que, se $\mu < \nu$, a função terá um infinito de ordem $(\nu - \mu)$.

Tôdas estas definições concordam com as convenções já estabelecidas (cap. III, § 9, pág. 194) relativamente ao comportamento das funções. A fim de precisarmos estas relações, desenvolveremos tanto o numerador como o denominador pelo teorema de Taylor, empregando a fórmula de Lagrange para o resto. A função assumirá, pois, a forma

$$\phi(a+h) = \frac{f(a+h)}{g(a+h)} = \frac{\nu!}{\mu!}\frac{h^\mu f^{(\mu)}(a+\theta h)}{h^\nu g^{(\nu)}(a+\theta_1 h)},$$

em que θ e θ_1 são dois números situados entre 0 e 1 e os fatôres pelos quais se multiplicam $h^\mu/\mu!$ e $h^\nu/\nu!$ não tendem para zero quando h o faz, visto êles se aproximarem dos limites $f^{(\mu)}(a)$ e $g^{(\nu)}(a)$, respectivamente, que são diferentes de zero. Se $\mu > \nu$, teremos

$$\lim_{h\to 0} \phi(a+h) = \lim_{h\to 0}\frac{\nu!}{\mu!}h^{\mu-\nu}\frac{f^{(\mu)}(a)}{g^{(\nu)}(a)} = 0.$$

A expressão $\phi(x)$, conseqüentemente, se anula na ordem $\mu - \nu$. Se $\nu > \mu$, vemos logo que $\phi(a+b)$ torna-se infinita de ordem $\nu - \mu$ quando $h \to 0$. Se $\mu = \nu$, obtemos a equação

$$\lim_{h\to 0} \phi(a+h) = \frac{f^{(\mu)}(a)}{g^{(\nu)}(a)}.$$

Podemos traduzir as últimas equações do modo seguinte: se o numerador e o denominador de uma função $\phi(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ se anularem ambos em $x = a$, é possível determinar-se o limite quando $x \to a$, derivando o numerador e o denominador igual número de vêzes até que uma, ao menos, das derivadas seja diferente de zero. Se tal suceder simultâneamente, tanto para o numerador como para o denominador, o limite procurado é igual ao quociente das duas derivadas. Se obtivermos uma derivada diferente de zero no denominador, antes que no numerador, a fração tende para zero. Se acharmos uma derivada diferente de zero no numerador, antes que no denominador, o valor absoluto da fração ultrapassa qualquer limite, tendendo para o infinito.

Obtivemos, assim, uma regra para avaliar os denominados símbolos indeterminados 0/0, assunto desenvolvido com extensão exagerada em muitos compêndios de cálculo diferencial e integral. Na realidade, trata-se ùnicamente de determinar o *valor-limite* de um quociente em que tanto o numerador como o denominador tendem para zero. A expressão "símbolo indeterminado", usualmente empregada, é confusa e vaga.

Podemos atingir os resultados estabelecidos, seguindo raciocínio diferente, baseando a demonstração no teorema generalizado do valor médio [1], em vez de no teorema de Taylor. Teremos, pois, se $g'(x) \neq 0$,

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{g(a+h)-g(a)} = \frac{f'(a+\theta h)}{g'(a+\theta h)},$$

onde θ é o mesmo, tanto no numerador como no denominador. Logo, em particular, quando $f(a) = 0 = g(a)$,

$$\frac{f(a+h)}{g(a+h)} = \frac{f'(a+\theta h)}{g'(a+\theta h)}.$$

Neste caso, θ é um valor contido no intervalo $0 < \theta < 1$, e se fizermos $k = \theta h$, virá

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)}{g(a+h)} = \lim_{k\to 0}\frac{f'(a+k)}{g'(a+k)},$$

supondo-se que o limite da direita exista. Se

$$f'(a) = 0 = g'(a),$$

podemos operar da mesma forma, até chegarmos a um índice para o qual não se verifique mais $f^{(\mu)}(a) = 0 = g^{(\mu)}(a)$. Então,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)}{g(a+h)} = \lim_{l\to 0}\frac{f^{(\mu)}(a+l)}{g^{(\mu)}(a+l)},$$

em que também incluímos o caso em que ambos os membros têm limite infinito.

(1) Êste método para estabelecer a regra apresenta a vantagem de não recorrer, de modo algum, à *existência* da derivada no próprio ponto $x = a$. Além disso, êle inclui o caso em que $\phi(x)$ é definida sòmente para $x \geqq a$, de sorte que a passagem ao limite $x \to a$ ou $h \to 0$ se faz, apenas, de um lado.

Como exemplos consideremos

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x}, \quad \frac{1-\cos x}{x}, \quad \frac{e^{2x}-1}{\log(1+x)}, \quad \frac{x^2 \operatorname{tg} x}{\sqrt{1-x^2}-1}$$

quando $x \to 0$. Teremos

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \frac{\cos 0}{1} = 1; \quad \lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x} = \frac{\operatorname{sen} 0}{1} = 0;$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x}-1}{\log(1+x)} = \lim_{x \to 0} \frac{2e^{2x}}{1/(1+x)} = 2;$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \operatorname{tg} x}{\sqrt{1-x^2}-1} = \lim_{x \to 0} \frac{2x \operatorname{tg} x + x^2/\cos^2 x}{-x/\sqrt{1-x^2}}$$

$$= -\lim_{x \to 0} \left(2 \operatorname{tg} x + \frac{x}{\cos^2 x}\right) \sqrt{1-x^2} = 0.$$

Mais adiante veremos que outras expressões comumente chamadas indeterminadas podem também ser reduzidas ao caso que estudamos. Por exemplo, o limite de $\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{x}$ quando $x \to 0$, sendo a diferença de duas expressões que se tornam ambas infinitas, é uma "forma indeterminada "de $\infty - \infty$. Entretanto, fazendo-se a transformação

$$\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{x} = \frac{x - \operatorname{sen} x}{x \operatorname{sen} x}$$

chegamos logo a uma expressão cujo limite, quando $x \to 0$, é determinado pela regra já conhecida, a saber

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x \cos x + \operatorname{sen} x} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{2 \cos x - x \operatorname{sen} x} = 0.$$

Exemplos

Estabelecer os limites dos exemplos 1 a 12:

1. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^n - a^n}{x - a}$.
2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{x^3}$.
3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{24 - 12x^2 + x^4 - 24 \cos x}{(\operatorname{sen} x)^6}$.
4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{\operatorname{sen} x}$.
5. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{arc\,sen} x}{x}$.
6. $\lim\limits_{x \to \pi/2} \dfrac{\operatorname{tg} 5x}{\operatorname{tg} x}$.
7. $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{2}{x^2-1} - \dfrac{1}{x-1}\right)$.
8. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x} - \dfrac{1}{x^2}\right)$.
9. $\lim\limits_{x \to 0} x^{\operatorname{sen} x}$.
10. $\lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{1/x}$.
11. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2x}-1}{\log(1+x)}$.
12. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \operatorname{tg} x}{\sqrt{1-x^2}-1}$.

13. Demonstrar que $y = (x^2)^x$, $y(0) = 1$ é contínua no ponto $x = 0$.

Capítulo VII

MÉTODOS NUMÉRICOS

Observações preliminares

Todo aquêle que deva utilizar a análise como instrumento para investigação de fenômenos físicos e técnicos se defronta com a seguinte questão: — se, e de que modo, a teoria se adapta, a fim de que dela resultem métodos práticos e usuais para a resolução dos cálculos numéricos efetivos. Mesmo do ponto de vista do teorista, que queira, apenas, estabelecer as relações existentes entre os fenômenos naturais, não se interessando, pròpriamente, pelos seus detalhes, esta questão é da maior importância. Para o estudo sistemático dos métodos numéricos, há compêndios especializados, aos quais remetemos o leitor (1). Aqui nos limitaremos a discutir alguns pontos de particular interêsse, os quais estão mais ou menos relacionados intimamente com as idéias precedentes. Chamamos especialmente a atenção para o fato fundamental de que a significação de um cálculo aproximado não é precisa, a menos que seja seguida da avaliação dos erros ocorrentes, isto é, a menos que seja acompanhada do conhecimento do grau de exatidão atingido.

1. Integração numérica

Vimos que mesmo funções relativamente simples não podem ser integradas em funções elementares, e que seria de todo fútil querer fazer com que esta meta inatingível constituísse a finalidade do cálculo integral. Por outro lado, a integral definida das funções contínuas *existe*, e esta existência cria o problema da determinação dos métodos convenientes para calculá-las numèricamente. Discutiremos sòmente

(1) Whittaker e Robinson, *The Calculus of Observations* (Blackie and Sons, Ltd., 1929).

os mais simples e lógicos dos métodos, com o auxílio da intuição geométrica, e consideraremos, depois, a avaliação dos erros.

Nosso objetivo é, portanto, calcular a integral $I = \int_a^b f(x)\,dx$, onde a é menor do que b. Imaginemos o intervalo de integração dividido em n partes iguais, de comprimento $h = (b - a)/n$, e designemos os pontos de subdivisão por $x_0 = a$, $x_1 = a + h$, $\ldots$, $x_n = b$; sejam f_0, f_1, $\ldots$, f_n, os valores da função nos pontos de divisão, e semelhantemente, $f_{1/2}$, $f_{3/2}$, $\ldots$, $f_{(2n-1)/2}$, os seus valores nos pontos médios dos subintervalos. Interpretemos a integral como uma área, e cortemos a
13 região sob a curva em faixas de largura h, de maneira usual. Devemos, então, obter uma avaliação aproximada para cada uma das faixas da área assim subdividida, ou seja, das integrais

$$I_\nu = \int_{x_\nu}^{x_\nu + h} f(x)\,dx.$$

1. Regra do retângulo.

O método mais simples e menos preciso para se calcular I de uma maneira aproximada, está diretamente relacionado com a definição de integral. Substitui-se a área da faixa I_ν pelo retângulo de área $f_\nu h$, obtendo-se a expressão aproximada [1]

$$I \approx h(f_0 + f_1 + \ldots + f_{n-1}).$$

2. Fórmulas do trapézio e da tangente.

Obteremos a aproximação mais elevada, sem maior trabalho, se substituirmos a área da faixa I_ν, não pela área retangular mencionada, mas pelo trapézio de superfície $\frac{1}{2}(f_\nu + f_{\nu+1})\,h$, indicado na figura 1. Teremos, então, para tôda a integral, a expressão aproximada

$$I \approx h\,(f_1 + f_2 + \ldots + f_{n-1}) + \frac{h}{2}(f_0 + f_n)$$

(*fórmula trapezoidal*), visto que, quando se somam as áreas dos trapézios, cada valor da função, exceto o primeiro e o último, são considerados duas vêzes.

(1) O sinal $\approx$ significa: "é aproximadamente igual a".

Via de regra, a aproximação torna-se ainda mais precisa se, em lugar de escolhermos o trapézio sob a corda AB como aproximação da área I, tomarmos o trapézio sob a tangente à curva no ponto da abscissa $x = x_\nu + h/2$. A área dêste trapézio é $hf_{\nu+1/2}$, vindo para tôda a integral o valor aproximado

$$I = h(f_{1/2} + f_{3/2} + \ldots + f_{(2n-1)/2}),$$

que é denominado *fórmula da tangente.*

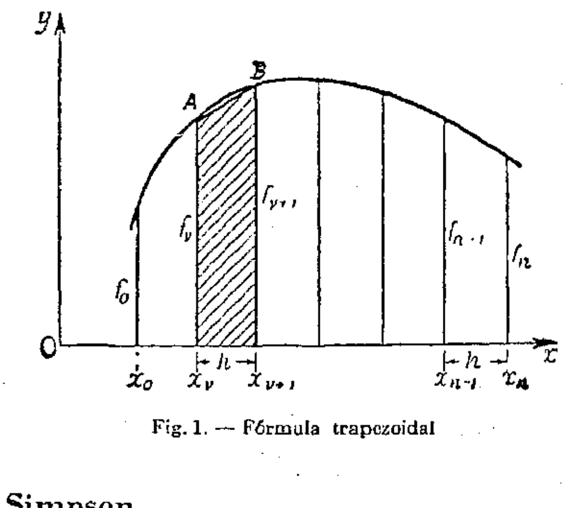


Fig. 1. — Fórmula trapezoidal

3. Regra de Simpson.

Pela regra de Simpson chegamos, com pouco mais trabalho, a resultados numéricos geralmente muito mais exatos. Esta regra consiste em calcular a área $I_\nu + I_{\nu+1}$ da dupla faixa situada entre as abscissas $x = x_\nu$ e $x = x_\nu + 2h = x_{\nu+2}$, considerando o limite superior, não mais uma linha reta, como nos métodos anteriores, mas sim como uma parábola. Para fixar idéias, diremos que a referida parábola passa pelos três pontos da curva com abscissas x_ν, $x_{\nu+1} = x_\nu + h$, e $x_{\nu+2} = x_\nu + 2h$ (fig. 2). A equação desta parábola é

$$y = f_\nu + (x - x_\nu)\frac{f_{\nu+1} - f_\nu}{h}$$

$$+ \frac{(x - x_\nu)(x - x_\nu - h)}{2}\,\frac{f_{\nu+2} - 2f_{\nu+1} + f_\nu}{h^2}$$

(O leitor pode verificar por substituição direta que, para os três valores de x em questão, esta equação fornece os valores correspondentes de y, a saber, f_ν, $f_{\nu+1}$, e $f_{\nu+2}$, respectivamente). Integrando-se êste polinômio do segundo grau entre os limites x_ν e $x_\nu + 2h$, obteremos, após simples transformações, a seguinte expressão para a área sob a parábola:

$$\int_{x_\nu}^{x_\nu + 2h} y\,dx = 2hf_\nu + 2h(f_{\nu+1} - f_\nu) + \frac{1}{2}\left(\frac{8}{3}h - 2h\right)(f_{\nu+2} - 2f_{\nu+1} + f_\nu)$$
$$= \frac{h}{3}(f_\nu + 4f_{\nu+1} + f_{\nu+2}).$$

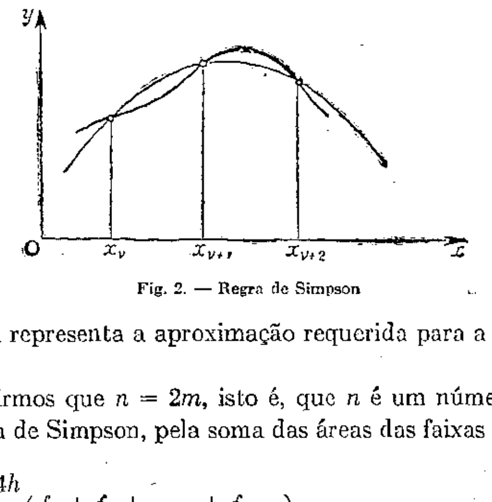


Fig. 2. — Regra de Simpson

Esta fórmula representa a aproximação requerida para a área da faixa $I_\nu + I_{\nu+1}$.

Se admitirmos que $n = 2m$, isto é, que n é um número par, obteremos a regra de Simpson, pela soma das áreas das faixas consideradas:

$$I = \frac{4h}{3}(f_1 + f_3 + \ldots + f_{2m-1})$$
$$+ \frac{2h}{3}(f_2 + f_4 + \ldots + f_{2m-2}) + \frac{h}{3}(f_0 + f_{2m}).$$

4. Exemplos.

Apliquemos os métodos expostos ao cálculo de $\log 2 = \int_1^2 \frac{dx}{x}$. Dividindo-se o intervalo compreendido entre 1 e 2 em dez partes iguais, h será igual a 1/10, e, pela fórmula dos trapézios, obtemos

$x_1 = 1{,}1$	$f_1 = 0{,}909\ 09$
$x_2 = 1{,}2$	$f_2 = 0{,}833\ 33$
$x_3 = 1{,}3$	$f_3 = 0{,}769\ 23$
$x_4 = 1{,}4$	$f_4 = 0{,}714\ 29$
$x_5 = 1{,}5$	$f_5 = 0{,}666\ 67$
$x_6 = 1{,}6$	$f_6 = 0{,}625\ 00$
$x_7 = 1{,}7$	$f_7 = 0{,}588\ 24$
$x_8 = 1{,}8$	$f_8 = 0{,}555\ 56$
$x_9 = 1{,}9$	$f_9 = 0{,}526\ 32$
	Soma $= 6{,}187\ 73$
$x_0 = 1{,}0$	$\frac{1}{2} f_0 = 0{,}5$
$x_{10} = 2{,}0$	$\frac{1}{2} f_{10} = 0{,}25$
	$6{,}937\ 73 \times {}^1/_{10}$
	$\log_e 2 = 0{,}693\ 77$

Êste valor, como era de prever, é grande demais, visto a curva ter o seu lado convexo voltado para o lado dos x.

A regra da tangente dá os valores

$x_0 + \frac{1}{2}h = 1{,}05$	$f_{1/2} = 0{,}952\ 38$
$x_1 + \frac{1}{2}h = 1{,}15$	$f_{3/2} = 0{,}869\ 57$
$x_2 + \frac{1}{2}h = 1{,}25$	$f_{5/2} = 0{,}800\ 00$
$x_3 + \frac{1}{2}h = 1{,}35$	$f_{7/2} = 0{,}740\ 74$
$x_4 + \frac{1}{2}h = 1{,}45$	$f_{9/2} = 0{,}689\ 66$
$x_5 + \frac{1}{2}h = 1{,}55$	$f_{11/2} = 0{,}645\ 16$
$x_6 + \frac{1}{2}h = 1{,}65$	$f_{13/2} = 0{,}606\ 06$
$x_7 + \frac{1}{2}h = 1{,}75$	$f_{15/2} = 0{,}571\ 43$
$x_8 + \frac{1}{2}h = 1{,}85$	$f_{17/2} = 0{,}540\ 54$
$x_9 + \frac{1}{2}h = 1{,}95$	$f_{19/2} = 0{,}512\ 82$
	$6{,}928\ 36 \times {}^1/_{10}$
	$\log_e 2 = 0{,}692\ 84$

Devido à convexidade da curva, êste valor é pequeno demais.

Para as mesmas subdivisões, obtemos resultado mais exato com o emprêgo da regra de Simpson. Teremos, neste caso,

$x_1 = 1{,}1$	$f_1 = 0{,}909\,09$	$x_2 = 1{,}2$	$f_2 = 0{,}833\,33$
$x_3 = 1{,}3$	$f_3 = 0{,}769\,23$	$x_4 = 1{,}4$	$f_4 = 0{,}714\,29$
$x_5 = 1{,}5$	$f_5 = 0{,}666\,67$	$x_6 = 1{,}6$	$f_6 = 0{,}625\,00$
$x_7 = 1{,}7$	$f_7 = 0{,}588\,24$	$x_8 = 1{,}8$	$f_8 = 0{,}555\,56$
$x_9 = 1{,}9$	$f_9 = 0{,}526\,32$	Soma	$2{,}728\,18 \times 2$
	Soma $3{,}459\,55 \times 4$		$5{,}456\,36$
	$13{,}838\,20$		$13{,}838\,20$
		$x_0 = 1{,}0$	$f_0 = 1{,}0$
		$x_{10} = 2{,}0$	$f_{10} = 0{,}5$
			$20{,}794\,56 \times {}^1/_{30}$
			$\log_e 2 = 0{,}693\,15$

Na realidade,

$$\log_e 2 = 0{,}693\,147\ldots$$

5. Avaliação do êrro.

Quando as derivadas da função $f(x)$ forem conhecidas em todo o intervalo de integração, é fácil calcular, aproximadamente, o êrro cometido com o emprêgo dos métodos de integração propostos. Tomemos M_1, M_2, ... como limites superiores do valor absoluto das derivadas de primeira, segunda, ... ordens, respectivamente; isto é, suponhamos que, em todo o intervalo, $|f^{(\nu)}(x)| < M_\nu$. As fórmulas para avaliação dos erros são, então, as seguintes:

Para a regra do retângulo:

$$|I_\nu - hf_\nu| < \frac{1}{2} M_1 h^2 \text{ ou } \left| I - h \sum_{\nu=0}^{n-1} f_\nu \right| < \frac{1}{2} M_1 n h^2 = \frac{1}{2} M_1 (b-a) h.$$

Para a regra da tangente:

$$|I_\nu - hf_{\nu+1/2}| < \frac{M_2}{24} h^3 \text{ ou } \left| I - h \sum_{\nu=0}^{n-1} f_{\nu+1/2} \right| < \frac{M_2}{24} (b-a) h^2.$$

Para a regra do trapézio:

$$\left| I_\nu - \frac{h}{2}(f_\nu + f_{\nu+1}) \right| < \frac{M_2}{12} h^3.$$

Para a regra de Simpson:

$$\left| I_\nu + I_{\nu+1} - \frac{h}{3}(f_\nu + 4f_{\nu+1} + f_{\nu+2}) \right| < \frac{M_4}{90} h^5.$$

Das duas últimas fórmulas deduzimos também expressões para a avaliação de tôda a integral I. Vemos que a regra de Simpson apresenta um êrro de ordem muito mais elevada do que o cometido com o emprêgo dos outros métodos, na avaliação da integral. Quando M_4 não fôr demasiado grande, esta regra é muito vantajosa para os cálculos práticos. Para não fatigar o leitor com os pormenores das demonstrações dessas estimativas, que, aliás, são extremamente simples, apresentaremos sòmente a demonstração da fórmula da tangente. Para tal, desenvolveremos a função $f(x)$, na faixa de ordem $(\nu + 1)$, pelo teorema de Taylor:

$$f(x) = f_{\nu+1/2} + \left(x - x_\nu - \frac{h}{2}\right) f'\left(x_\nu + \frac{h}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(x - x_\nu - \frac{h}{2}\right)^2 f''(\xi),$$

onde ξ é um determinado valor intermediário na faixa. Se integrarmos o segundo membro no intervalo $x_\nu \leqq x \leqq x_\nu + h$, a integral do têrmo intermediário será zero. Logo,

$$\frac{1}{2}\int_{x_\nu}^{x_\nu+h} \left(x - x_\nu - \frac{h}{2}\right)^2 dx = \frac{h^3}{24},$$

como pode ser verificado com facilidade, seguindo-se imediatamente que

$$\left| \int_{x_\nu}^{x_\nu+h} f(x)\, dx - hf_{\nu+1/2} \right| < M_2 \frac{h^3}{24},$$

ficando assim demonstrada a nossa asserção.

EXEMPLOS

1. Calcular π empregando a fórmula $\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\, dx$,

   (a) usando a fórmula dos trapézios com $h = 0{,}1$;

   (b) usando a regra de Simpson com $h = 0{,}1$.

2. Calcular $\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx$ com êrro inferior a 1/100 (ver pág. 496).

3. Calcular $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}$, numèricamente, com êrro inferior a 0,1.

2. Aplicações dos teoremas do valor médio e de Taylor. Cálculo dos erros.

1. "Cálculo dos erros".

As aplicações do teorema do valor médio, ou, mais geralmente, do teorema de Taylor, com resto, ou finalmente, da série infinita de Taylor, apresentam-nos cálculos numéricos de tipo completamente diferente. Como aplicação, embora simples, porém, de grande importância na prática, estudaremos o cálculo ou a avaliação dos erros. Esta operação é baseada na idéia — fundamental do cálculo diferencial — de que uma função $f(x)$ que é derivada um número suficiente de vêzes pode ser representada, na vizinhança de um ponto, por uma função linear, com êrro de ordem menor do que a primeira; por uma função quadrática, com êrro de ordem inferior à segunda, e assim sucessivamente. Consideremos a aproximação linear da função $y=f(x)$. Se $y + \Delta y = f(x + \Delta x) = f(x + h)$, teremos, pelo teorema de Taylor,

$$\Delta y = hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(\xi),$$

onde $\xi = x + \theta h\ (0 < \theta < 1)$ é um valor intermediário, que não precisa ser conhecido com mais exatidão. Quando $h = \Delta x$ fôr suficientemente pequeno obteremos, como aproximação prática,

$$\Delta y = hf'(x).$$

Em outras palavras, substituímos o quociente das diferenças pela derivada que lhe é pràticamente igual, e o acréscimo sofrido por y pela equação linear em h, aproximadamente igual.

Efetuamos esta transformação, evidente por si mesma, com propósitos práticos, como veremos a seguir. Suponhamos duas quantidades físicas x e y ligadas pela relação $y = f(x)$. O problema que se apresenta consiste em saber qual o efeito que uma imprecisão na medida de x acarreta sôbre a determinação de y. Como, em lugar do "verdadeiro" valor de x, empregamos o valor impreciso $x + h$, o valor de y diferirá do seu verdadeiro valor, $y = f(x)$, da quantidade $\Delta y = f(x + h) - f(x)$. O êrro é, portanto, dado, aproximadamente, pela relação acima.

Alguns exemplos permitirão um melhor entendimento destas relações.

Ex. 1. *Galvanômetro tangencial.* Na determinação da corrente por meio do galvanômetro tangencial usamos a fórmula $y = c\,\mathrm{tg}\,\alpha$, onde α é o ângulo de deflexão da agulha magnética, c a constante do aparelho, e $y = I$ a intensidade da corrente. Temos

$$\frac{dy}{d\alpha} = \frac{c}{\cos^2\alpha}$$

e portanto, $\Delta y \approx \dfrac{c}{\cos^2\alpha}\,\Delta\alpha$. O êrro percentual cometido na medida é dado por

$$\frac{100\Delta y}{y} \approx \frac{100c\Delta\alpha}{c\cos^2\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha} = \frac{200}{\mathrm{sen}\,2\alpha}\,\Delta\alpha.$$

Vemos, assim, que a precisão alcança seu valor máximo, isto é, para um dado êrro na leitura do ângulo, corresponde o menor êrro possível na determinação da corrente, quando $\alpha = \pi/4$ ou $45°$.

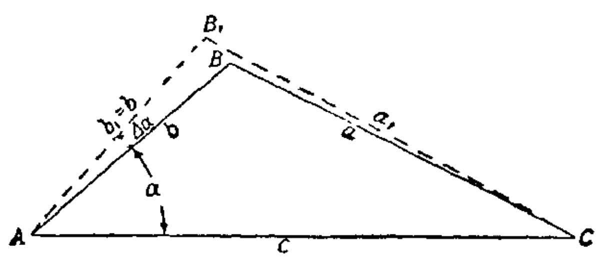


Fig. 3

Em particular, suponhamos que seja possível efetuar a leitura da graduação do galvanômetro tangencial a menos de meio grau; então $|\Delta\alpha|$ em radianos $< \frac{1}{2} \times$ $\times\, 0{,}017\,45\ldots$, sendo o êrro percentual $\dfrac{1{,}745}{\mathrm{sen}\,2\alpha}$. Se a leitura fôr $30°$, $\mathrm{sen}\,2\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{3} =$ $= \frac{1}{2} \times 1{,}732\,05\ldots$, e o êrro percentual será menor do que $2 \times \dfrac{1{,}745}{1{,}732}$, que dá, aproximadamente, 2%.

Ex. 2. Suponhamos que os lados b e c do triângulo ABC (fig. 3) foram medidos precisamente, ao passo que o ângulo $\alpha = x$ é determinado com um êrro $|\Delta x| < \delta$. Entre que limites de erros ficará o valor $y = a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}$?

Temos

$$\Delta a \approx \frac{1}{a}\,bc\,\mathrm{sen}\,\alpha\,\Delta\alpha;$$

o êrro percentual é, portanto, $\dfrac{100\Delta a}{a} \approx \dfrac{100bc}{a^2}\,\mathrm{sen}\,\alpha\Delta\alpha$. Se, para concretizar, tomar-

mos um caso que em $b = 400$ metros, $c = 500$ metros, e $\alpha = 60°$, empregando a fórmula do co-seno, determinaremos $y = a = 458{,}257\,6$ metros, e

$$\Delta a \approx \frac{200\,000}{458{,}257\,6} \times \frac{1}{2}\sqrt{3}\,\Delta\alpha.$$

Se pudermos medir $\Delta\alpha$ com êrro inferior a dez segundos de arco, isto é, se

$$\Delta\alpha = 10'' = 484\,8 \times 10^{-8} \text{ radianos},$$

acharemos, na pior das hipóteses, que

$$\Delta a \approx 1{,}83 \text{ cm},$$

dando um êrro percentual de, aproximadamente, 0,004.

Ex. 3. Êste exemplo ilustra um tipo de aplicação dos métodos expostos que, muitas vêzes, evita consideráveis embaraços em problemas de física.

É sabido pela experiência que se uma barra de ferro tem o comprimento l_0 à temperatura 0, o seu comprimento à temperatura t será $l = l_0(1 + \alpha t)$, onde α depende sòmente do material da barra. Vejamos, agora, quantos segundos um relógio de pêndulo atrasará por dia, se, dando a hora certa à temperatura t_1, a mesma subir para t_2.

O período de oscilação é dado pela fórmula

$$T(l) = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \text{ donde } \frac{dT}{dl} = \frac{\pi}{\sqrt{lg}}.$$

Logo, se a mudança de comprimento fôr Δl, a alteração correspondente no período da oscilação será

$$\Delta T \approx \frac{\pi\,\Delta l}{\sqrt{l_1 g}},$$

onde $l_1 = l_0(1 + \alpha t_1)$ e $\Delta l = \alpha l_0(t_2 - t_1)$. Êste é o tempo perdido em cada oscilação. Num segundo, o atraso será $\Delta T/T \approx \Delta l/2l_1$; logo, em um dia, o relógio atrasará $43\,200\Delta l/l_1$ segundos.

A aplicação dos métodos expostos evitou, neste caso, diversas multiplicações e a extração de duas raízes quadradas. No processo direto, mais longo, teríamos, além disso, que subtrair $T(l_1)$ de $T(l_2)$, cujos valores são quase iguais, e um pequeno êrro de cálculo acarretaria um êrro percentual relativamente grande, no resultado (¹).

Tanto neste como em outros casos em que a função considerada tem vários fatôres ou expoentes fracionários, podemos reduzir ainda mais as operações, tomando o logaritmo de ambos os membros, antes da derivação. No exemplo em foco, teríamos

$$\log T = \log 2\pi - \frac{1}{2}\log g + \frac{1}{2}\log l;$$

e, derivando, viria:

$$\frac{dT}{dl}\Big/T = \frac{1}{2l}.$$

(¹) Êste o motivo de serem os cálculos de óptica aplicada tão laboriosos.

Substituindo-se $\frac{dT}{dl}$ por $\frac{\Delta T}{\Delta l}$ teremos

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta l}{2l},$$

em concordância com o resultado precedente.

2. Cálculo de π.

A série de Gregório [1], obtida no capítulo VI, § 1 (página 319), $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \ldots$, por intermédio da série da função inversa da tangente, não é adequada para o cálculo de π, devido à lentidão da sua convergência. Podemos, porém, calcular π com relativa facilidade, mediante o seguinte artifício. Partindo do teorema da adição das tangentes, temos

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta},$$

e, se mudarmos para as funções inversas $\alpha = \operatorname{arc\,tg} u$, $\beta = \operatorname{arc\,tg} v$, obteremos a fórmula

$$\operatorname{arc\,tg} u + \operatorname{arc\,tg} v = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{u + v}{1 - uv}\right).$$

Escolhendo-se u e v de sorte que $\frac{u+v}{1-uv} = 1$, obteremos o valor de $\frac{\pi}{4}$ no segundo membro e, se u e v forem números pequenos, será possível calcular fàcilmente o primeiro membro, por meio de séries conhecidas. Façamos, por exemplo, $u = \frac{1}{2}$, $v = \frac{1}{3}$, como fêz Euler; virá, então,

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}.$$

Notando-se, também, que $\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{7}\right) \div \left(1 - \frac{1}{21}\right) = \frac{1}{2}$, teremos $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2} = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{7}$, de sorte que

$$\frac{\pi}{4} = 2 \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{7}.$$

Empregando esta fórmula, Vega calculou o número π com 140 decimais.

[1] Também chamada *série de Leibnitz*.

A equação $\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{8}\right) \div \left(1-\frac{1}{40}\right) = \frac{1}{3}$, nos proporciona

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3} = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{8}$$

ou

$$\frac{\pi}{4} = 2\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{7} + 2\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{8}.$$

Tal desenvolvimento é extremamente útil para o cálculo de π por meio da série $\operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots$. Substituindo-se x pelos valores $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{7}$ ou $\frac{1}{8}$, obteremos, com um número reduzido de têrmos, um alto grau de precisão, visto que os têrmos diminuem ràpidamente. Podemos, contudo, efetuar o cálculo ainda mais convenientemente se o basearmos na fórmula

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arc\,tg}\frac{120}{119} - \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{239} = 4\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5} - \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{239},$$

obtida por considerações semelhantes às anteriores.

3. Cálculo dos logaritmos.

Para o cálculo numérico dos logaritmos transforma-se a série logarítmica $\frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots$ ($|x| < 1$), onde $0 < x < 1$, substituindo

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{p^2}{p^2-1},\ x = \frac{1}{2p^2-1},$$

nas séries

$$\log p = \frac{1}{2}\log(p-1) + \frac{1}{2}\log(p+1) + \frac{1}{2p^2-1} + \frac{1}{3(2p^2-1)^3} + \cdots,$$

em que $2p^2 - 1 > 1$, ou seja, $p^2 > 1$. Se p fôr um inteiro e se $p+1$ puder ser decomposto em fatôres menores, esta última série exprime o logaritmo de p em função do logaritmo de outros inteiros menores

e de uma série cujos têrmos diminuem ràpidamente e cuja soma pode. portanto, ser calculada com precisão suficiente, empregando-se apenas algumas parcelas. Estas séries permitem, pois, calcular sucessivamente os logaritmos de qualquer número primo e, por conseguinte, os de qualquer número, uma vez que já calculamos o valor do log 2.

A precisão com que é calculado o log p pode ser avaliada mais fàcilmente por meio da série geométrica do que pela fórmula geral do resto. O resto R_n da série, isto é, a soma de todos os têrmos que seguem $\frac{1}{n(2p^2-1)^n}$, é expresso por

$$R_n < \frac{1}{(n+2)(2p^2-1)^{n+2}}\left(1 + \frac{1}{(2p^2-1)^2} + \frac{1}{(2p^2-1)^4} + \dots\right)$$
$$= \frac{1}{(n+2)(2p^2-1)^n} \cdot \frac{1}{(2p^2-1)^2-1},$$

e esta fórmula nos dá imediatamente a estimativa procurada para o êrro.

Calculemos, por exemplo, $\log_e 7$, usando os primeiros quatro têrmos da série. Teremos

$$p = 7, \quad 2p^2 - 1 = 97,$$

$$\log 7 = 2 \log 2 + \frac{1}{2} \log 3 + \frac{1}{97} + \frac{1}{3{,}97^3} + \dots;$$

$$\frac{1}{97} \approx 0{,}010\,309\,28, \quad \frac{1}{3{,}97^3} \approx 0{,}000\,000\,37,$$

$$2 \log 2 \approx 1{,}386\,294\,36, \quad \frac{1}{2} \log 3 \approx 0{,}549\,306\,14;$$

logo

$$\log_e 7 \approx 1{,}945\,910\,15.$$

A estimativa do êrro dá

$$R_n < \frac{1}{5{,}97^3} \times \frac{1}{97^2-1} < \frac{1}{36 \times 10^9}.$$

Devemos, entretanto, notar que cada uma das quatro parcelas que empregamos é dada com êrro inferior a 5×10^{-9}, de modo que a última casa do valor do $\log_e 7$ que calculamos acima poderá apresentar, no máximo, um êrro de 2 unidades. Efetivamente, porém, a última casa também está certa.

EXEMPLOS

1. Para medir-se a altura de uma colina, observou-se, da planície, uma tôrre de 100 metros de altura, situada no tôpo da mesma. O ângulo de elevação da base da tôrre é de 42° e a própria tôrre subtende um ângulo de 6°. Quais os limites do êrro cometido na determinação da altura da colina, se a leitura do ângulo de 42° está sujeita a um êrro de 1°?

2. Calcular $\log_e 2$ com três decimais, por meio de um desenvolvimento em série.

3. Calcular $\log_e 5$ com cinco decimais, usando os valores de $\log_e 2$ e $\log_e 3$ dados no texto.

4. Calcular π com cinco decimais exatas, usando qualquer das fórmulas da subseção 2 (págs. 352, 353).

3. Resolução numérica de equações

Para concluir, acrescentaremos algumas observações sôbre a resolução numérica da equação $f(x) = 0$, onde $f(x)$ não é, necessàriamente, um polinômio [1]. Qualquer método numérico desta espécie tem seu ponto de partida numa aproximação conhecida, x_0, de uma das raízes e depois melhora cada vez mais esta aproximação. Como foi determinada esta primeira aproximação para a raiz em aprêço, e o grau de aproximação da mesma, não interessa especialmente. Êste primeiro dado pode ser obtido grosseiramente, ou melhor, pode ser medido no gráfico da função $y = f(x)$, cuja interseção com o eixo dos x dá a raiz procurada (naturalmente, com um êrro que depende da escala e da precisão do desenho).

1. Método de Newton.

O processo que vamos expor, criado por Newton, é baseado no princípio fundamental do cálculo diferencial — a substituição da curva por uma reta, a tangente, na vizinhança imediata do ponto de contato. Se tivermos um valor aproximado x_0 para uma das raízes da equação $f(x) = 0$, consideraremos o ponto sôbre o gráfico da função $y = f(x)$, cujas coordenadas são $x = x_0$, $y = f(x_0)$. Queremos determinar a interseção da curva com o eixo dos x; como aproximação dêste valor, acharemos o lugar em que a tangente, no ponto $x = x_0$, $y = f(x_0)$,

[1] Aqui, naturalmente, nos ocupamos sòmente com a determinação das raízes reais de $f(x) = 0$.

corta o eixo dos x. A abscissa x_1 da interseção da tangente com o eixo dos x representará nova, e sob certas circunstâncias, melhor aproximação do que x_0, para a raiz procurada.

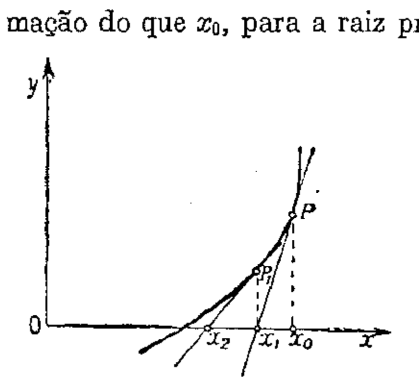


Fig. 4. — Método das aproximações de Newton

Em virtude do significado geométrico da derivada, a figura 4 dá imediatamente

$$\frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} = f'(x_0).$$

Desta obtemos a fórmula para o cálculo da nova aproximação x_1

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Se, por êste processo, acharmos uma aproximação melhor do que x_0, repeti-lo-emos para determinar x_2 e, assim, sucessivamente. Se a curva tiver a forma indicada na figura 5, estas aproximações tendem, cada vez mais, para a solução exata.

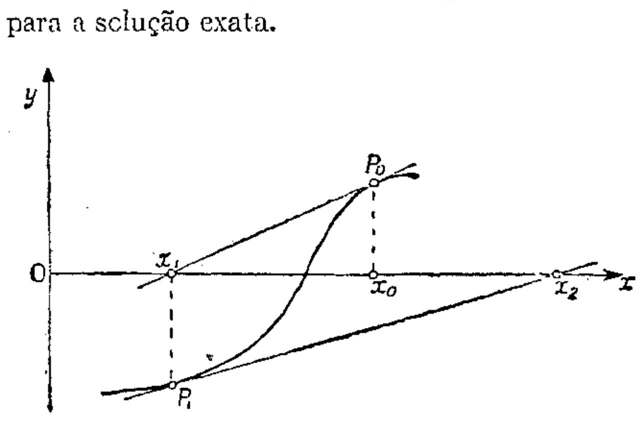


Fig. 5

A utilidade dêste processo depende, essencialmente, da natureza da curva $y = f(x)$. Na figura 4 vemos que as avaliações sucessivas convergem, com precisão cada vez maior, para a raiz procurada. Isto se deve ao fato da curva ter a sua convexidade voltada para o eixo dos x. Vemos, porém, na figura 5, que se o valor original de x_0 fôr escolhido de maneira inadequada, a construção não conduzirá, em absoluto, à raiz que procuramos. Concluímos, daí, que o emprêgo do método de Newton exige o exame de cada caso individual, para ser

determinado o grau de precisão com que se resolveu, realmente, a equação. Voltaremos a êste assunto na página 359.

2. Regra de falsa posição.

O método de Newton, no qual a tangente à curva desempenha papel decisivo, não é mais do que o caso limite de um método mais antigo, conhecido como a regra de falsa posição, no qual se emprega a secante em lugar da tangente. Suponhamos conhecidos os dois pontos (x_0, y_0) e (x_1, y_1), na vizinhança da interseção procurada, com o eixo dos x. Se substituirmos a curva pela secante que liga os dois pontos, a interseção desta linha com o eixo dos x será, sob certas circunstâncias, uma aproximação satisfatória da raiz que procuramos. Designando-se por ξ a abscissa dêste ponto, teremos a equação

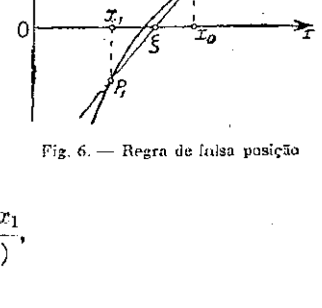


Fig. 6. — Regra de falsa posição

$$\frac{\xi - x_0}{f(x_0)} = \frac{\xi - x_1}{f(x_1)},$$

donde se tira o valor de ξ:

$$\xi = \frac{x_0 f(x_1) - x_1 f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}$$
$$= \frac{x_0 f(x_1) - x_0 f(x_0) + x_0 f(x_0) - x_1 f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}$$

ou
$$\xi = x_0 - \frac{f(x_0)}{[f(x_1) - f(x_0)]/(x_1 - x_0)}.$$

Esta fórmula, que estabelece a aproximação ξ a partir de x_0 e de x_1, é denominada *regra de falsa posição*. Podemos empregá-la, vantajosamente, quando um valor da função é positivo e o outro negativo, como, por exemplo, na fig. 6, em que $y_0 > 0$ e $y_1 < 0$. A repetição do processo conduzirá sempre ao resultado procurado, se, em cada passo, empregarmos um valor positivo e outro negativo da função, entre os quais fica situada, necessàriamente, a raiz que buscamos.

A regra de Newton, como já dissemos, decorre da regra de falsa posição, como caso-limite, quando x_1 tende para x_0, visto o denominador do segundo têrmo do segundo membro tender para $f'(x_0)$, quando $x_1 \to x_0$.

3. Método de iteração.

Outro meio de que dispomos para calcular, aproximadamente, as raízes da equação $f(x) = 0$, é o *método de iteração.* Façamos $\phi(x) = f(x) + x$ e escrevamos a equação original sob a forma $x = \phi(x)$. Suponhamos, então, que ξ é o verdadeiro valor da solução procurada, e x_0 uma primeira aproximação. Obteremos uma segunda aproximação x_1, fazendo $x_1 = \phi(x_0)$, uma terceira x_2 escrevendo $x_2 = \phi(x_1)$, etc. A fim de investigar a convergência destas diversas aproximações, aplicaremos o teorema do valor médio. Recordando que $\xi = \phi(\xi)$, teremos

$$\xi - x_1 = \phi(\xi) - \phi(x_0) = (\xi - x_0)\,\phi'(\xi)$$

onde ξ fica entre ξ e x_0. Isto mostra que, se para

$$|\xi - x| < |\xi - x_0|$$

a derivada $\phi'(x)$ fôr menor, em valor absoluto, do que $k < 1$, as aproximações sucessivas convergirão, visto

$$|\xi - x_1| < k\,|\xi - x_0|, \quad |\xi - x_2| < k^2\,|\xi - x_0|, \ldots,$$
$$|\xi - x_n| < k^n\,|\xi - x_0|,$$

e os erros, portanto, tendem para zero. Quanto menor fôr o valor absoluto da derivada $\phi'(x)$ em relação a ξ, tanto mais rápida será a convergência.

Se, na vizinhança de ξ, $\phi'(x) > 1$, as aproximações não tenderão mais para ξ. Podemos, então, usar a função inversa, ou mesmo o seguinte artifício. Estabelecemos a primeira aproximação x_0 e calculamos $A = f'(x_0)$. Escrevemos, portanto,

$$\phi(x) = -\frac{1}{A} f(x) + x.$$

A equação $f(x)$ pode ser posta sob a forma $x = \phi(x)$ e $\phi'(x) = -\dfrac{1}{A} f'(x) + 1$, com o valor 0 em $x = x_0$ e, portanto, geralmente menor, em valor absoluto, do que a constante $k < 1$ se $|\xi - x| < |\xi - x_0|$.

Voltando ao método de Newton, podemos verificar, agora, a conveniência da sua aplicação num ponto qualquer. A equação $f(x) = 0$ é equivalente a $x = \phi(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$, desde que $f'(x) \neq 0$. Aplicando o método de iteração a esta última equação, partindo-se da primeira aproximação x_0, obteremos a segunda, $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$. Em outras palavras, o mesmo valor obtido pela aplicação do método de Newton à equação $f(x) = 0$. Vemos, assim, que quanto menor fôr o valor de

$$\phi'(x) = \frac{f(x)\,f''(x)}{(f'(x))^2},$$

tanto mais ràpidamente as aproximações sucessivas convergirão. Constatamos, pois, que a fórmula de Newton converge ràpidamente para os grandes valores de $f'(x_0)$ e para os pequenos de $f(x_0)$ e da curvatura, conforme a intuição já nos levava a suspeitar.

É possível, igualmente, obter uma estimativa da precisão do método de Newton, recordando que a derivada $\phi'(\xi) = 0$, desde que $f(\xi) = 0$. Teremos, aplicando o teorema de Taylor,

$$\xi - x_1 = \phi(\xi) - \phi(x_0) = \frac{(\xi - x_0)^2}{2}\,\phi''(\bar{\xi}),$$

sendo que $\bar{\xi}$ fica situado entre ξ e x_0. Assim, se o êrro da estimativa inicial fôr pequeno, o método converge mais ràpidamente do que o de iteração aplicando diretamente a $f(x) = 0$.

Por exemplo, se

$$\phi''(x) = \frac{[f'(x)]^2 f''(x) + f'(x)\,f(x)\,f'''(x) - 2f(x)[f''(x)]^2}{[f'(x)]^3} \qquad (a)$$

fôr menor do que 10 em qualquer ponto, uma primeira aproximação, cujo êrro fôsse menor do que 0,001, acarretaria uma segunda com êrro inferior a $(0{,}001)^2 \times 10 \div 2 = 0{,}000\,005$.

4. Exemplos.

Como exemplo, vejamos a equação

$$f(x) = x^3 - 2x - 5 = 0.$$

Para $x_0 = 2$, teremos $f(x_0) = -1$, ao passo que, para $x_1 = 2{,}1$, teremos $f(x_1) = 0{,}061$. O método de Newton nos dá

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 2{,}1 - \frac{0{,}061}{3(2{,}1)^2 - 2} = 2{,}1 - 0{,}005\,431 = 2{,}094\,569.$$

Para avaliar o êrro deduzimos da expressão (a) que $\varphi''(x)$ vale aproximadamente 1 e, com certeza, menos do que 2, perto de $x = 2$. Além disso, o êrro da primeira aproximação é menor do que 1/160, pois a secante que une os pontos $x = 2$, $y = -1$ e $x = 2{,}1$, $y = 0{,}061$, corta o eixo dos x numa distância inferior a 1/160 do ponto $x = 2{,}1$ e a curva, que se desenvolve acima da secante, deve cortá-lo ainda mais próximo de 2,1. Assim, o êrro [1] da segunda aproximação será menor do que

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{(160)^2} = \frac{1}{25\,600} < 0{,}000\,04.$$

Se êste grau de precisão ainda não fôr suficiente, podemos repetir o processo, calculando $f(x_2)$ e $f'(x_2)$ para $x_2 = 2{,}094\,569$, obtendo a terceira aproximação x_3 com êrro menor do que $\dfrac{1}{(25\,600)^2} < 0{,}000\,000\,002$.

Como segundo exemplo, resolvamos a equação $f(x) = x \log_{10} x - 2 = 0$. Teremos $f(3) = -0{,}6$ e $f(4) = +0{,}4$, empregando, portanto, $x_0 = 3{,}5$ como primeira aproximação. Usando as tábuas de logaritmos de dez decimais obteremos os valores sucessivos aproximados

$$\begin{aligned} x_0 &= 3{,}5 \\ x_1 &= 3.598 \\ x_2 &= 3{,}597\,284\,9 \\ x_3 &= 3{,}597\,285\,023\,5. \end{aligned}$$

EXEMPLOS

1. Achar a raiz positiva de $x^6 + 6x - 8 = 0$, com 4 decimais, usando o método de Newton.

2. Determinar a raiz de $x = \operatorname{tg} x$, entre π e 2π, com quatro decimais. *Demonstrar* que o resultado é exato até à quarta decimal.

3. Estabelecer o valor de x para o qual

$$\int_0^x \frac{u^2}{1 + u^2}\, du = \frac{1}{2},$$

empregando o método de Newton.

4. Quais são as raízes da equação $x = 2 \operatorname{sen} x$, com duas decimais?

5. Determinar, pelo método de iteração, as raízes positivas de $x^5 - x - 0{,}2 = 0$.

6. Determinar, pelo método de iteração, a menor raiz positiva de $x^4 - 3x^3 + 10x - 10 = 0$.

7. Achar as raízes de $x^3 - 7x^2 + 6x + 20 = 0$, com quatro decimais.

(1) Outro modo de avaliar o êrro, sem referência à secante, é o seguinte: se calcularmos que o êrro é menor do que 1/20, a segunda aproximação estará separada do valor real menos de $1/20^2 = 0{,}002\,5$. Logo, a raiz diferirá de 2,1 por uma quantidade menor do que $(2{,}1 - 2{,}094\,5) + 0{,}002\,5 = 0{,}008$. O êrro, portanto, não sòmente é menor do que 1/20, mas ainda do que 0,008, de sorte que x_2 terá êrro inferior a $(0{,}008)^2 = 0{,}000\,064$.

APÊNDICE AO CAPÍTULO VII

Fórmula de Stirling

Em muitas aplicações, especialmente na estatística e no cálculo das probabilidades, é necessário dispor-se de uma aproximação simples de $n!$, como função elementar de n. Tal expressão é dada pelo seguinte teorema, o qual tem o nome do seu descobridor, Stirling.

Quando $n \to \infty$ $$\frac{n!}{\sqrt{2\pi}n^{n+1/2}e^{-n}} \to 1;$$

ou, mais exatamente,

$$\sqrt{2\pi}n^{n+1/2}e^{-n} < n! < \sqrt{2\pi}n^{n+1/2}e^{-n}\left(1 + \frac{1}{4n}\right).$$

Em outras palavras, isto quer dizer que as expressões $n!$ e $\sqrt{2\pi}n^{n+1/2}e^{-n}$ diferirão entre si sòmente por uma pequena percentagem quando o valor de n fôr grande — as duas expressões são *assintòticamente iguais*, como dizemos — e ao mesmo tempo dispomos do fator $1 + 1/4n$ que dá uma estimativa do grau de precisão da aproximação.

Chegamos a esta fórmula notável ao procurarmos avaliar a área compreendida pela curva $y = \log x$. Por integração (pág. 220), achamos que A_n, a área exata compreendida pela curva, entre as ordenadas $x = 1$ e $x = n$, é dada por

$$\int_1^n \log x \, dx = x \log x - x \Big|_1^n = n \log n - n + 1.$$

Se, entretanto, avaliarmos esta mesma área pela regra dos trapézios, levantando as ordenadas em $x = 1$, $x = 2$, $\ldots$, $x = n$, como indica a figura 7, obteremos T_n, um valor aproximado da área:

$$T_n = \log 2 + \log 3 + \ldots + \log (n-1) + \frac{1}{2}\log n$$

$$= \log n! - \frac{1}{2}\log n.$$

Admitindo-se a hipótese plausível de que A_n e T_n sejam da mesma ordem de grandeza, achamos logo que $n!$ e $n^{n+1/2}e^{-n}$ são também da mesma ordem de grandeza, o que constitui a parte essencial do enunciado da fórmula de Stirling.

Para tornar o argumento mais exato, mostraremos que a diferença $a_n = A_n - T_n$ é limitada, do que se deduz, imediatamente, que $T_n = A_n\left(1 - \frac{a_n}{A_n}\right)$ é da mesma ordem de grandeza que A_n.

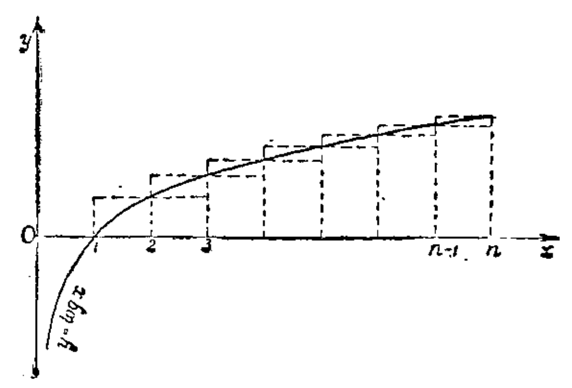


Fig. 7

A diferença $a_{k+1} - a_k$ representa a diferença entre as áreas sob a curva e sob a secante, respectivamente, na faixa $k \leqq x \leqq k+1$. Como a curva

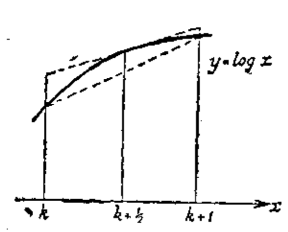


Fig. 8

apresenta sua concavidade voltada para baixo, estando situada, pois, acima da secante, $a_{k+1} - a_k$ é positiva e $a_n = (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \ldots + (a_2 - a_1) + a_1$ é monótona crescente. Além disso, a diferença $a_{k-1} - a_k$ é claramente menor do que a diferença entre as áreas limitadas pela tangente em $x = k + \frac{1}{2}$ e pela secante (fig. 8); logo, temos a desigualdade

$$\begin{aligned} a_{k+1} - a_k &< \log\left(k + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\log k - \frac{1}{2}\log(k+1) \\ &= \frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{1}{2k}\right) - \frac{1}{2}\log\left\{1 + \frac{1}{2\left(k + \frac{1}{2}\right)}\right\} \\ &< \frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{1}{2k}\right) - \frac{1}{2}\log\left[1 + \frac{1}{2(k+1)}\right]. \end{aligned}$$

Somando-se estas desigualdades para $k = 1, 2, \ldots, n-1$, todos os têrmos da direita, exceto dois, serão cancelados, vindo então (uma vez que $a_1 = 0$),

$$a_n < \frac{1}{2}\log\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{1}{2n}\right) < \frac{1}{2}\log\frac{3}{2}.$$

Logo a_n é limitada, e sendo monótona crescente, tenderá para o limite a, quando $n \to \infty$. A desigualdade para $a_{k+1} - a_k$ fornece, pois,

$$a - a_n = \sum_{k=n}^{\infty} (a_{k+1} - a_k) < \frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{1}{2n}\right).$$

Tendo sido estabelecido, por definição, que $A_n - T_n = a_n$, teremos

$$\log n! = 1 - a_n + \left(n + \frac{1}{2}\right)\log n - n,$$

ou, escrevendo $\alpha_n = e^{1-a_n}$,

$$n! = \alpha_n n^{n+1/2} e^{-n}.$$

A seqüência α_n é monótona *decrescente*, tendendo para o limite $\alpha = e^{1-a}$; daí virá:

$$1 < \frac{\alpha_n}{\alpha} = e^{a-a_n} < e^{1/2 \log(1+1/2n)} = \sqrt{1 + \frac{1}{2n}} < 1 + \frac{1}{4n}.$$

Logo, podemos escrever

$$\alpha n^{n+1/2} e^{-n} < n! < \alpha n^{n+1/2} e^{-n}\left(1 + \frac{1}{4n}\right).$$

Resta, sòmente, acharmos o valor efetivo do limite α. Empregaremos, para tal fim, a fórmula deduzida no Cap. IV, § 4 (pág. 255):

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n)!^2 2^{2n}}{(2n)!\sqrt{n}}.$$

Substituindo $n!$ por $\alpha_n n^{n+1/2} e^{-n}$ e $(2n)!$ por $\alpha_{2n} 2^{2n+1/2} n^{2n+1/2} e^{-2n}$, obteremos

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n{}^2}{\alpha_{2n}\sqrt{2}} = \frac{\alpha^2}{\alpha\sqrt{2}},$$

donde $\alpha = \sqrt{2\pi}$. Fica, assim, completamente demonstrada a fórmula de Stirling.

Além do seu interêsse teórico, a fórmula de Stirling é muito empregada no cálculo de $n!$, quando n é grande. Em vez de efetuar um grande número de multiplicações de inteiros, basta calcular a fórmula de Stirling por meio dos logaritmos, o que reduz consideràvelmente o número de operações. Assim, para $n = 10$, obtém-se o valor 3 598 696 pela fórmula de Stirling (empregando logaritmos com sete decimais), ao passo que o valor exato de 10! é 3 628 800. O êrro cometido é, pois, apenas de 5/6 por cento.

EXEMPLO

Demonstrar que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$.

Capítulo VIII

SÉRIES INFINITAS E OUTROS PROCESSOS-LIMITES

Observações preliminares

As séries geométricas, a série de Taylor e numerosos exemplos especiais que já encontramos neste livro, indicam a conveniência de estudarmos êstes processos-limites, que denominaremos soma das *séries infinitas* sob um ponto de vista mais geral. Por sua natureza, qualquer valor-limite

$$S = \lim_{n \to \infty} s_n$$

pode ser escrito sob a forma de uma série infinita. Atribuindo-se a n os valores 1, 2, 3, ..., basta fazer-se $a_n = s_n - s_{n-1}$ para $n > 1$ e $a_1 = s_1$ a fim de obter

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n,$$

aparecendo, então, o valor de S, como o limite de s_n, a soma dos n têrmos, à medida que n cresce. Exprimimos esta propriedade dizendo que S é a "soma da série infinita"

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$$

Assim, as séries infinitas são simples modos de representação de limites, em que cada aproximação sucessiva se deduz da anterior, pela soma de mais um têrmo. A expressão dos números sob a forma decimal é, em princípio, a representação de um número a por meio da série infinita $a = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$, onde, se $0 \leqq a \leqq 1$, o têrmo a_n é igual a $\alpha_n \times 10^{-n}$, sendo α_n um número inteiro, entre 0 e 9, inclusive. Desde que cada valor-limite pode ser representado por uma série infinita, pode parecer supérfluo um estudo especial das mesmas. Acontece, porém, que na maioria dos casos, os valores-limites ocorrem, natural-

mente, sob a forma de séries infinitas, as quais apresentam leis de formação particularmente simples. Naturalmente, não é verdade que *cada série* tenha uma lei de formação fàcilmente reconhecível. Por exemplo, o número π pode, certamente, ser representado sob a forma decimal, porém, desconhecemos uma lei bastante simples que permita encontrar um algarismo qualquer do desenvolvimento, digamos, o 7 000º. Se, porém, desprezarmos a representação decimal de π e adotarmos, em vez dela, a série de Gregório, teremos uma expressão com a lei de formação perfeitamente clara e geral.

Semelhantes às séries infinitas, nas quais as aproximações do limite são obtidas pela adição de novos têrmos, são os *produtos infinitos*, em que as aproximações do limite nascem da multiplicação repetida por novos fatôres. Não entraremos, entretanto, profundamente na teoria dos produtos infinitos. O objetivo dêste capítulo e do seguinte será, apenas, o estudo das séries infinitas.

1. Conceitos de convergência e de divergência

1. Idéias fundamentais.

Adotaremos, nesta exposição, uma série infinita cujo *têrmo geral* designaremos [1] por a_n. A série terá, então, a forma

$$a_1 + a_2 + \ldots = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu.$$

O símbolo da direita, com o sinal somatório, é, apenas, uma maneira abreviada de escrever a expressão da esquerda.

Se, quando n cresce, a *soma parcial de ordem n*

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu$$

se aproximar do limite

$$S = \lim_{n\to\infty} s_n$$

dizemos que a série é *convergente*. De outro modo, ela será *divergente*. No primeiro caso S é denominado a *soma da série*.

Já encontramos muitos exemplos de séries convergentes, como a

(1) Admitimos a possibilidade de alguns dos têrmos a_n serem zero. Se *todos* o fôssem, a partir de um certo número N (quando $n > N$), teríamos uma *série terminante*.

série geométrica $1 + q + q^2 + \ldots$, que converge para a soma $1/(1 - q)$ quando $|q| < 1$; a série gregoriana; a do log 2; a de e, além de outras. O critério de convergência de Cauchy (cap. I, § 6, pág. 40) é expresso do seguinte modo, na linguagem das séries infinitas:

A condição necessária e suficiente para a convergência de uma série é que

$$|s_m - s_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_m|$$

se torne arbitràriamente pequena quando m *e* n *forem escolhidos suficientemente grandes* (m > n). Em outras palavras: *Uma série converge, e sòmente neste caso, se satisfizer a seguinte condição. Dado um número positivo* ϵ, *tão pequeno quanto quisermos, será sempre possível estabelecermos um índice* $\mathrm{N} = \mathrm{N}(\epsilon)$ *que, em geral, cresce além de qualquer limite quando* $\epsilon \to 0$, *de sorte que a expressão acima* $|s_m - s_n|$ *seja menor do que* ϵ, *desde que, ùnicamente,* $\mathrm{m} > \mathrm{N}$ *e* $\mathrm{n} > \mathrm{N}$.

Podemos, ainda, compreender melhor o significado do critério de convergência, fazendo $q = \frac{1}{2}$ na série geométrica. Se tomarmos $\epsilon = 1/10$, bastará fazer $N = 4$, visto que

$$\begin{aligned} |s_m - s_n| &= \frac{1}{2^n} + \ldots + \frac{1}{2^{m-1}} \\ &= \frac{1}{2^{n-1}}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{m-n}}\right) < \frac{1}{2^{n-1}} \end{aligned}$$

e

$$\frac{1}{2^{n-1}} < \frac{1}{10} \quad \text{se } n > 4.$$

Se tivéssemos escolhido $\epsilon = 1/100$, seria suficiente tomar $N = 7$, como é fácil verificar.

Como é lógico, a convergência da série exige a condição *necessária*

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0,$$

pôsto que, de outra maneira, o critério de convergência não seria satisfeito. Esta condição, necessária, não é, entretanto, *suficiente* para determinar a convergência. Ao contrário, é relativamente fácil encontrar-se séries infinitas cujo têrmo geral a_n se aproxima de 0 à medida que n cresce, porém, cuja soma não existe quando a soma parcial s_n ultrapassa qualquer limite, à medida que n vai crescendo.

Exemplo disto é a série

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots;$$

cujo têrmo geral é $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Vemos, logo, que

$$s_n > \frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{n}{\sqrt{n}}=\sqrt{n}.$$

A soma parcial de ordem n cresce além de qualquer limite, à medida que n aumenta, logo, a série é divergente.

O mesmo é verdadeiro para o exemplo clássico da *série harmônica*

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots.$$

Neste caso, $a_{n+1}+\ldots+a_{2n}=\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2n}+\ldots+\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}$. Como n e $m=2n$ podem ser tomados tão grandes quanto quisermos, a série diverge, visto o critério de convergência de Cauchy não se verificar. Efetivamente, a soma parcial de ordem n tende, como é lógico, para o infinito, logo, todos os têrmos são positivos. Por outro lado, a série dos mesmos números com os sinais alternados,

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}+\ldots,$$

é convergente (Cap. VI, pág. 317), sendo sua soma log 2.

Não é de forma alguma verdadeiro que em tôdas as séries divergentes s_n tenda para $+\infty$ ou para $-\infty$. Assim, no caso da série

$$1-1+1-1+1+-\ldots,$$

vê-se que a soma parcial s_n apresenta os valores 1 e 0, alternativamente, e, devido a esta oscilação para trás e para a frente, não se aproxima de limite algum definido, nem cresce, numèricamente, além de qualquer valor.

Com relação à convergência e divergência das séries infinitas, deve-se anotar o seguinte, que apesar de ser quase evidente, é, contudo, muito importante. *A convergência ou divergência das séries não é alterada pela inclusão ou exclusão de um número finito de têrmos.* Relativamente à convergência ou divergência, não importa começarmos a série no têrmo a_0 ou a_1, ou a_5, ou qualquer outro, escolhido arbitràriamente

2. Convergência absoluta e condicional.

A série $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$ é divergente. Se, porém, trocarmos os sinais de cada segundo têrmo, ela convergirá. Por outro lado, a série geométrica $1 - q + q^2 - q^3 + - \ldots$ é convergente, tendo a soma $1/(1 + q)$, desde que $0 \leqq q < 1$. Escrevendo todos os sinais positivos, teremos a série

$$1 + q + q^2 + q^3 + \ldots,$$

que é também convergente, tendo a soma $1/(1 - q)$.

Surge, assim, uma distinção que examinaremos mais minuciosamente. Nas séries em que todos os sinais são positivos, há apenas dois casos possíveis: ou elas convergem, ou a soma parcial cresce além de qualquer limite, quando n cresce. As somas parciais, sendo seqüências monótonas crescentes, serão convergentes se forem limitadas. Haverá convergência se os têrmos se aproximarem de zero bastante ràpidamente, à medida que n cresce, ao passo que a série será divergente se os seus têrmos, de modo algum, se aproximarem de zero, ou se o fizerem muito lentamente. Nas séries em que há têrmos positivos e negativos, entretanto, a mudança de sinal pode acarretar a convergência, pois, um crescimento muito grande nas somas parciais, devido aos têrmos positivos, pode ser compensado pelos têrmos negativos, de modo que o resultado final seja a tendência para um limite definido.

Para melhor compreensão, comparemos a série $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ com têrmos positivos e negativos, com a dos mesmos têrmos, porém, com todos os sinais positivos, ou seja,

$$|a_1| + |a_2| + \ldots = \sum_{\nu=1}^{\infty} |a_\nu|.$$

Se esta série fôr convergente, ter-se-á, para valores de n e $m > n$, suficientemente grandes, a expressão

$$|a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \ldots + |a_m|$$

tão pequena quanto desejarmos. Devido à relação

$$|a_{n+1} + \ldots + a_m| \leqq |a_{n+1}| + \ldots + |a_m|$$

a expressão da esquerda é, também, arbitràriamente pequena, seguindo-se, portanto, que a série original $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ converge. Neste caso, a série primitiva apresenta *convergência absoluta*, sendo *absolutamente convergente*. Tal convergência é devida à pequenez numérica dos têrmos, não sendo afetada pela mudança dos sinais.

Se, por outro lado, a série com todos os têrmos positivos fôr divergente, ao passo que a original ainda mantiver a sua convergência, a série proposta é *condicionalmente convergente*, ou dotada de *convergência condicional*. A convergência condicional resulta da compensação recíproca dos têrmos dotados de sinais diferentes.

O critério de convergência de Leibnitz é freqüentemente empregado para a verificação desta propriedade das séries:

Se os têrmos de uma série tiverem os sinais alternados, e se, além disso, os seus valores absolutos tenderem $|a_n|$ *monòtonamente para* 0 (*de modo que* $|a_{n+1}| < |a_n|$), *a série* $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ *será convergente.* (Exemplo: série de Gregório, pág. 352.)

Na demonstração admitiremos que $a_1 > 0$, o que não restringe essencialmente a generalização do raciocínio, e escreveremos a série proposta sob a forma

$$b_1 - b_2 + b_3 - + \ldots,$$

onde todos os têrmos b_n são positivos, b_n tende para 0, e a condição $b_{n+1} < b_n$ é satisfeita. Reunindo-se entre parênteses os têrmos sob as duas formas

$$b_1 - (b_2 - b_3) - (b_4 - b_5) - \ldots$$

e
$$(b_1 - b_2) + (b_3 - b_4) + (b_5 - b_6) + \ldots$$

vemos logo que estas duas relações são satisfeitas pelas somas parciais:

$$s_1 > s_3 > s_5 > \ldots > s_{2m+1} > \ldots$$
$$s_2 < s_4 < s_6 < \ldots < s_{2m} < \ldots .$$

Temos, também, que $s_{2n} < s_{2n+1} < s_1$ e $s_{2n+1} > s_{2n} > s_2$. As somas parciais de ordem ímpar formam, pois, uma seqüência monótona decrescente que, em caso algum, valerá menos que s_2; logo, tal seqüência possui o limite L (pág. 61). As somas parciais de ordem par, $s_2, s_4, \ldots$, formam, igualmente, uma seqüência monótona crescente cujos têrmos

jamais excedem o número fixo s_1, tendo, portanto, também esta seqüência um valor-limite L'. Como s_{2n} e s_{2n+1} diferem entre si sòmente de b_{2n+1}, que se aproxima de 0 quando n cresce, os valores-limites L e L' são iguais, isto é, as somas parciais, tanto positivas como negativas, se aproximam do mesmo limite, que designaremos por S (fig. 1). Isto, porém, implica na convergência da série proposta, cuja soma é S, como havíamos afirmado.

Para concluir faremos outra observação de caráter geral sôbre a convergência absoluta ou condicional das séries. Tomemos a série convergente $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$. Chamemos os seus têrmos positivos de $p_1, p_2, p_3, \ldots$, e os negativos de $-q_1, -q_2, -q_3, \ldots$. Formando-se a soma parcial n da série proposta, $s_n = \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$, aparecerá um certo número de têrmos positivos, digamos n', e outro de têrmos negativos n'', de sorte que

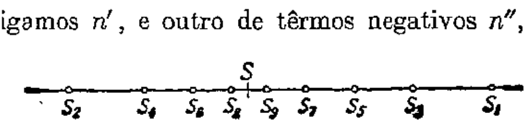


Fig. 1.— Convergência das séries alternadas

$n' + n'' = n$. Além disso, se o número dos têrmos positivos assim como o dos negativos fôr infinito, tanto n' como n'' crescerão sem limite, quando n o fizer. Vemos, imediatamente, que a soma parcial s_n é igual à soma parcial $\sum\limits_{\nu=1}^{n'} p_\nu$ dos têrmos positivos, mais a soma parcial dos têrmos negativos $-\sum\limits_{\nu=1}^{n''} q_\nu$. Se a série fôr absolutamente convergente, as séries dos têrmos positivos $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} p_\nu$ e a dos valores absolutos dos negativos $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} q_\nu$, certamente convergirão, visto que, à medida que m cresce, as somas parciais $\sum\limits_{\nu=1}^{m} p_\nu$ e $\sum\limits_{\nu=1}^{m} q_\nu$ são seqüências monótonas não-decrescentes, com o limite superior $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} | a_\nu |$.

A soma de uma série dotada de convergência absoluta é, pois, simplesmente igual à soma da série constituída sòmente dos têrmos positivos, mais a soma da série constituída ùnicamente dos têrmos negativos, ou,

em outras palavras, *é igual à diferença entre as duas séries, com têrmos positivos.*

Assim, $\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu = \sum_{\nu=1}^{n'} p_\nu - \sum_{\nu=1}^{n''} q_\nu$. Quando n crescer, n' e n'' deverão, também, ultrapassar qualquer valor, e o limite do primeiro membro será, portanto, igual à diferença entre as duas somas da direita. Quando a série contiver sòmente um número finito de têrmos de um dos sinais, os fatos correspondentes simplificam-se. Se, por outro lado, a série não fôr dotada de convergência absoluta, mas sim, de convergência condicional, as séries $\sum_{\nu=1}^{\infty} p_\nu$ e $\sum_{\nu=1}^{\infty} q_\nu$ deverão ser, ambas, divergentes, visto que, se as duas fôssem convergentes a série proposta convergiria absolutamente, o que é contra a hipótese formulada. Se sòmente uma das séries divergisse, digamos $\sum_{\nu=1}^{\infty} p_\nu$, ao passo que a outra fôsse convergente, a separação em partes positiva e negativa, $s_n = \sum_{\nu=1}^{n'} p_\nu - \sum_{\nu=1}^{n''} q_\nu$, mostraria que a série dada não pode ser convergente, porque, à medida que n crescesse, n' e $\sum_{\nu=1}^{n'} p_\nu$ ultrapassariam quaisquer limites, enquanto o têrmo $\sum_{\nu=1}^{n''} q_\nu$ se aproximaria de um valor definido, de sorte que a soma parcial s_n cresceria além de qualquer limite.

Constatamos, pois, que *as séries dotadas de convergência condicional não podem ser consideradas como a diferença de duas séries convergentes, uma dos têrmos positivos e a outra dos valores absolutos dos têrmos negativos.*

Intimamente ligada com o que acabamos de expor, existe outra diferença entre as séries absolutamente convergentes e as dotadas de convergência condicional, a qual estudaremos ràpidamente.

3. Reagrupamento dos têrmos.

As somas finitas possuem a propriedade de não alterarem os seus valores quando se muda a ordem das parcelas ou, como dizíamos, os seus têrmos podem ser reagrupados, sem que isto implique em alteração do resultado. Surgem, assim, as perguntas sôbre qual seja o significado exato da mudança da ordem das parcelas numa série infinita, e se tal reagrupamento mantém o total inalterado. O que, no caso das somas de um número finito de parcelas, não apresentou dificuldade,

por exemplo, na adição dos têrmos na ordem inversa, é completamente impossível em se tratando das séries infinitas; efetivamente, não há nenhum último têrmo com o qual se possa iniciar o processo. A mudança da ordem das parcelas numa série infinita pode sòmente significar que a série $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ se transforma, pelo reagrupamento, na série $b_1 + b_2 + b_3 + \dots$, desde que cada têrmo a_n da primeira ocorra sòmente uma vez na segunda e vice-versa. Por exemplo, a quantidade de que a_n é deslocado pode crescer além de qualquer limite, quando n fizer o mesmo; a única exigência é que êle deve aparecer, em *algum lugar*, na nova série. Se alguns têrmos forem removidos para posições posteriores, outros tantos deverão ser transferidos para colocações anteriores. Por exemplo, a série

$$1 + q + q^2 + q^4 + q^3 + q^8 + q^7 + q^6 + q^5 + q^{16} + \dots$$

é um reagrupamento da série geométrica $1 + q + q^2 + \dots$.

Com relação à mudança de ordem dos têrmos, há uma distinção fundamental entre as séries de convergência absoluta e as de convergência condicional.

Nas séries de convergência absoluta, o reagrupamento dos têrmos não altera a convergência, permanecendo inalterado o valor da soma, exatamente como no caso das adições finitas.

Nas séries de convergência condicional, por sua vez, o valor da soma pode ser mudado à vontade, por um reagrupamento conveniente dos têrmos da mesma, podendo a própria série tornar-se divergente, se assim o desejarmos.

A primeira afirmativa que se refere às séries de convergência absoluta, é fàcilmente demonstrada. Admitamos, em primeiro lugar, que a série proposta seja constituída sòmente de têrmos positivos, sendo sua soma parcial, de ordem n, $s_n = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu$. Todos os têrmos desta soma ocorrerão na soma parcial de ordem m, $t_m = \sum_{\nu=1}^{m} b_\nu$ da série reagrupada, desde que, ùnicamente, m seja escolhido suficientemente grande. Logo, $t_m \geqq s_n$. Por outro lado, podemos estabelecer uma ordem n' tão grande que a soma parcial $s_{n'} = \sum_{\nu=1}^{n'} a_\nu$ da primeira série contenha tôdas as parcelas $b_1, b_2, \dots, b_m$. Segue-se, então, que $t_m \leqq s_{n'} \leqq A$, onde A é a soma da primeira série. Assim, para qualquer valor de m suficientemente grande, teremos $s_n \leqq t_m \leqq A$, e como podemos fazer s_n diferir

de A por uma quantidade arbitràriamente pequena, a série reagrupada também é convergente; e, de fato, para o mesmo limite A da série proposta.

Quando uma série de convergência absoluta possuir têrmos positivos e negativos, podemos considerá-la como a diferença entre duas séries, cada uma delas constituída ùnicamente de parcelas positivas. Como no reagrupamento, cada uma destas séries teve alterada sòmente a ordem dos seus têrmos, convergindo, porém, para o mesmo limite que antes, outro tanto se verifica para a série original, quando reagrupada. Pelo que acabamos de ver, a nova série possui convergência absoluta, sendo, portanto, a diferença entre duas séries reagrupadas, de têrmos positivos.

O que acabamos de demonstrar pode parecer ao principiante de somenos importância. Entretanto. um exemplo do comportamento oposto, de uma série de convergência condicional, mostrará a necessidade da demonstração e do papel essencial que a convergência absoluta desempenha nela. Consideraremos a série conhecida

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+-\ldots=\log 2.$$

e sob ela escrevamos o resultado da multiplicação pelo fator $\frac{1}{2}$,

$$\frac{1}{2}\qquad-\frac{1}{4}\qquad+\frac{1}{6}\qquad-\frac{1}{8}+-\ldots=\frac{1}{2}\log 2,$$

somando as duas, combinando os têrmos da mesma coluna vertical (¹). Obteremos, então,

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}++-\ldots=\frac{3}{2}\log 2.$$

Esta série poderia, como é evidente, ser obtida da série original, mediante um arranjo conveniente e, no entanto, o valor da soma aparece multiplicado pelo fator 3/2. É fácil imaginar o efeito que a descoberta dêste aparente paradoxo produziu nos matemáticos do século XVIII, os quais estavam acostumados a operar com as séries infinitas, sem se preocuparem com a sua convergência.

Embora não cheguemos a empregar o resultado, apresentaremos a demonstração do teorema que enunciamos acima, referente à alteração da soma das séries de convergência condicional, pelo reagrupamento dos têrmos. Sejam $p_1, p_2, \ldots$, os têrmos positivos, e $-q_1, -q_2, \ldots$ os negativos da série dada. Como o valor absoluto tende para 0 quando n cresce, os números p_n e q_n devem também convergir para 0, à me-

(¹) Adição das séries: N.º 4, pág. 376.

dida que n vai crescendo. Já vimos, além disso, que a soma [1] $\sum_1^\infty p_\nu$ deve ser divergente, o mesmo se verificando para $\sum_1^\infty q_\nu$.

Podemos, agora, determinar fàcilmente um reagrupamento da série original que tenha um número qualquer, a, como limite. Suponhamos, para concretizar, que a seja positivo. Somemos, então, os n_1 primeiros têrmos positivos, em número suficiente para assegurar que a soma $\sum_1^{n_1} p_\nu$ é maior do que a. Como a soma $\sum_1^{n_1} p_\nu$ ultrapassa com n qualquer limite, será sempre possível, empregando-se número suficiente de têrmos, obter-se a soma parcial maior do que a. A soma diferirá, então, do valor exato a, por p_{n_1}, no máximo. Somemos um número suficiente de têrmos negativos $-\sum_1^{m_1} q_\nu$ para termos certeza de que a soma $\sum_1^{n_1} p_\nu - \sum_1^{m_1} q_\nu$ é menor do que a; isto também é possível, como se deduz da divergência da série $\sum_1^\infty q_\nu$. A diferença entre esta soma e a será q_{m_1}, no máximo. Somemos outros têrmos positivos $\sum_{n_1+1}^{n_2} p_\nu$, em número suficiente, para que a soma parcial seja maior do que a, como ainda é possível uma vez que a série dos têrmos positivos é divergente. A diferença entre a soma parcial e a, será p_{n_2}, no máximo. Vamos, novamente, adicionar um número conveniente de têrmos negativos, $-\sum_{m_1+1}^{m_2} q_\nu$, a começar pelo primeiro após o último anteriormente usado, para que a soma seja, mais uma vez, menor do que a, e prossigamos da mesma forma. Os valores das somas assim obtidos oscilarão em tôrno de a, e quando o processo fôr levado bastante longe, a oscilação processar-se-á entre limites arbitràriamente estreitos, visto que o comprimento do intervalo em que ela ocorre tende para zero, porque os próprios têrmos p_ν e q_ν convergem para 0 quando ν é suficientemente grande. O teorema fica, assim, demonstrado.

Do mesmo modo, poderíamos reagrupar a série, de sorte que ela se tornasse divergente. Teríamos, apenas, que escolher número tão grande de têrmos positivos, que comparado com o dos negativos, não houvesse possibilidade de compensação.

[1] Esta notação abreviada, empregada para $\sum_{\nu=1}^{\infty} p_\nu$, e outras semelhantes para outras séries, serão usadas, muitas vêzes, mais adiante.

4. Operações com as séries infinitas.

É claro que duas séries infinitas convergentes, $a_1 + a_2 + \ldots = S$ e $b_1 + b_2 + \ldots = T$ podem ser somadas têrmo a têrmo, isto é, a série formada pelos têrmos $c_n = a_n + b_n$ será convergente, e sua soma valerá $S + T$ [1]. Temos, assim,

$$\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu + \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu \to S + T.$$

É também claro que, se multiplicarmos cada têrmo de uma série infinita convergente pelo mesmo fator, a série resultante será convergente, sendo sua soma multiplicada pelo mesmo fator.

Nos casos mencionados não importa se a convergência da série é absoluta, ou condicional. Por outro lado, porém, estudo que levaremos a efeito mais adiante, e do qual não necessitamos presentemente, mostrará que, se duas séries infinitas forem multiplicadas pelo método empregado para a multiplicação das somas finitas, a série resultante em geral não será convergente ou terá a soma igual ao produto das somas das duas séries, a não ser que uma delas, pelo menos, possua convergência absoluta (apêndice, pág. 415).

EXEMPLOS

1. Demonstrar que $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu(\nu+1)} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots = 1.$

2. Demonstrar que $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu(\nu+1)(\nu+2)} = \frac{1}{4}.$

3. Demonstrar que $\sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{2\nu+3}{(\nu+1)(\nu+2)} = 1.$

4. Para que valores de α a série $1 - \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} - \frac{1}{4^\alpha} + \ldots$ será convergente?

5.* Demonstrar que se $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ fôr convergente, e $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, a seqüência

$$\frac{s_1 + s_2 + \ldots + s_N}{N}$$

também convergirá, tendo $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ como limite.

6. A série $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{2n+1} - \frac{2n-1}{2n}\right)$ é convergente?

7. A série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^\nu \frac{\nu}{\nu+1}$ é convergente?

(1) Êste teorema nada mais é, na realidade, senão outro enunciado do que afirma que o limite da soma de duas parcelas é a soma dos seus limites (cap. I, § 6, pág. 41).

2. Critérios de convergência e de divergência

Já tivemos ocasião de encontrar um critério de natureza geral que permite assegurar, pelo menos, a convergência condicional de uma série, quando ela possuir os têrmos com sinais alternados e valor absoluto decrescente. Na exposição que segue, nos ocuparemos ùnicamente dos critérios que garantem a *convergência absoluta*.

1. Critério de comparação.

Quaisquer considerações sôbre a convergência dependem, neste processo, da comparação entre a série dada e uma outra. Esta segunda série é escolhida de tal modo que a sua convergência possa ser prontamente comprovada. O *critério geral de comparação* pode ser enunciado da seguinte maneira:

Se os números $b_1, b_2, \ldots,$ *forem todos positivos e se a série* $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} b_\nu$ *fôr convergente, verificando-se*

$$|a_n| \leqq b_n$$

para qualquer valor de n, *a série* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *possui convergência absoluta.*

Aplicando-se o critério de convergência de Cauchy, a demonstração torna-se muito simples. Quando $m \geqq n$, teremos

$$|a_n + \ldots + a_m| \leqq |a_n| + \ldots + |a_m| \leqq b_n + \ldots + b_m.$$

Como a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ é convergente, o segundo membro será arbitràriamente pequeno, uma vez que n e m sejam suficientemente grandes. Segue-se que para tais valores de n e m o primeiro membro será, também, arbitràriamente pequeno, de sorte que, pelo critério de Cauchy, a série proposta é convergente. A convergência é absoluta, visto o argumento aplicar-se igualmente bem à série dos valores absolutos $|a_n|$.

Deixamos ao leitor a demonstração análoga do seguinte. *Quando a série* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *fôr divergente e*

$$|a_n| \geqq b_n > 0,$$

a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *não será, com certeza, de convergência absoluta.*

2. Comparação com a série geométrica.

Nas aplicações do critério de comparação, a série mais freqüentemente empregada é a geométrica. Dela obtemos, em seguida, o seguinte teorema:

A série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *terá convergência absoluta, se a partir de um certo têrmo em diante, uma relação da forma*

$$| a_n | < c\, q^n \tag{I}$$

se verificar, sendo c *um número positivo independente de* n, *e* q *qualquer número fixo e positivo, menor do que* 1.

Êste critério é expresso, usualmente, sob uma das seguintes formas menos rigorosas: a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ será absolutamente convergente se, de um certo têrmo em diante, verificar-se uma relação da forma

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < q\,, \tag{IIa}$$

onde q representa, novamente, um número positivo menor do que 1 e independente de n, ou: se, de um certo têrmo em diante, verificar-se uma relação da forma

$$\sqrt[n]{| a_n |} < q, \tag{IIb}$$

onde q é um número positivo menor do que 1. Em particular, as condições estabelecidas serão satisfeitas se uma relação como

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = k < 1 \tag{IIIa}$$

ou

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{| a_n |} = k < 1 \tag{IIIb}$$

fôr verdadeira. Êstes enunciados são estabelecidos fàcilmente, da seguinte maneira:

Suponhamos que a condição IIa, o *critério da relação*, seja satisfeita a partir de índice n_0 em diante, isto é, quando $n > n_0$. Para simplificar, faremos $a_{n_0+m+1} = b_m$ e acharemos que

$$| b_1 | < q\, | b_0 |\,,\quad | b_2 | < q\, | b_1 | < q^2\, | b_0 |\,,\quad | b_3 | < q\, | b_2 | < q^3\, | b_0 |\,,$$

e, assim, sucessivamente; logo

$$| b_m | < q^m\, | b_0 |,$$

que estabelece o que foi enunciado. Para a condição II*b*, o *critério da raiz*, temos $|a_n| < q^n$, donde o enunciado decorre imediatamente.

Finalmente, para demonstrar o critério III, consideremos um número arbitrário q, tal que $k < q < 1$. De um certo índice n_0 em diante, isto é, quando $n > n_0$, será certo que $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| < q$ ou $\sqrt[n]{|a_n|} < q$, conforme o caso, visto que, a partir de um certo têrmo, os valores de $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ ou de $\sqrt[n]{|a_n|}$ diferem de k por menos do que $(q - k)$. O enunciado fica, assim, estabelecido, baseado nos outros já demonstrados.

Insistimos na observação de que os quatro critérios derivados do original, $|a_n| < cq^n$ *não são equivalentes* entre si ou ao original, isto é, êles não podem ser reduzidos ou deduzidos uns dos outros, em ambas as direções. Veremos em breve, por meio de exemplos, que se uma série satisfaz uma destas condições, não precisa, de forma alguma, satisfazer tôdas as outras [1].

Para completar êste assunto, diremos que uma série é divergente, com tôda a certeza, se de um dado têrmo em diante,

$$|a_n| > c$$

para um número positivo c convenientemente escolhido, ou se, a partir de um certo têrmo,

$$\sqrt[n]{|a_n|} > 1,$$

ou se
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = k, \text{ ou } \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = k,$$

onde k é um número maior do que 1, pois, como vemos logo, em tais séries os têrmos não podem tender para zero quando n cresce. (Assim, a série nem pode ser mesmo condicionalmente convergente.)

Os critérios apresentados fornecem condições *suficientes* para a convergência absoluta das séries; isto é, quando forem satisfeitas, podemos concluir pela convergência absoluta da série. Entretanto, tais condições não são *necessárias*, visto haver séries dotadas de convergência absoluta que não as satisfazem.

(1) Mais exatamente: se III*a* fôr preenchida, II*a* será satisfeita; se III*b* o fôr, II*b* o será; sendo III*a*, também III*b* o será, e se II*a* o fôr, II*b* será. E, se qualquer das quatro fôr satisfeita, I também será preenchida. Nenhum dêstes enunciados é reversível.

Por exemplo, sabemos que

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1 \quad \text{ou} \quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = 1$$

não nos autoriza a estabelecer qualquer conclusão sôbre a convergência da série. Tais séries podem ser convergentes ou divergentes. Por exemplo, a série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n},$$

para a qual $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = 1$ e $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$ é divergente, como constatamos na pág. 368. Por outro lado, veremos dentro em breve que a série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, que satisfaz às mesmas relações, é convergente.

Como exemplo de aplicação dos critérios que apresentamos consideraremos, inicialmente, a série

$$q + 2q^2 + 3q^3 + \ldots + nq^n + \ldots.$$

Temos, para esta série,

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = |q| \cdot \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = |q|,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |q| \cdot \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = |q|.$$

Quando $|q| < 1$ a série será convergente, o que se deduz dos critérios da relação e da raiz, mesmo sob a forma III, menos precisa.

Entretanto, não é possível provar a convergência da série

$$1 + 2q + q^2 + 2q^3 + \ldots + q^{2n} + 2q^{2n+1} + \ldots,$$

pelo critério da relação, quando $\frac{1}{2} \leqq |q| < 1$, porque, neste caso, $\left|\frac{2q^{2n+1}}{q^{2n}}\right| = 2|q| \geqq 1$. O critério da raiz, porém, dá imediatamente $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = |q|$, e mostra que a série será convergente desde que $|q| < 1$ o que, naturalmente, poderíamos ter observado diretamente.

3. Comparação com uma integral [1].

Estudaremos, agora, a convergência, por um processo inteiramente diverso do anterior. Seja a série particularmente simples e importante

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \ldots,$$

[1] Ver também o apêndice do Cap. VII (pág. 361), que tem relação com êste parágrafo.

em que o têrmo geral a_n é $1/n^\alpha$, sendo α um número positivo. A fim de pesquisarmos a convergência ou divergência desta série, tracemos o gráfico da função $y = 1/x^\alpha$ e marquemos sôbre o eixo dos x as abscissas inteiras $x = 1$, $x = 2$, ... Primeiramente, construiremos o retângulo de altura $1/n^\alpha$ sôbre o intervalo $n - 1 \leqq x \leqq n$, do eixo dos x, $(n > 1)$, comparando-o com a área da região limitada pelo mesmo intervalo do eixo dos x, pelas ordenadas dos extremos e pela curva $y = 1/x^\alpha$ (superfície tracejada na fig. 2). Em seguida, construamos o retângulo de altura $1/n^\alpha$ sôbre o intervalo $n \leqq x \leqq n + 1$, comparando-o, anàlogamente, com a área da região compreendida entre o eixo dos x e a curva (região duplamente tracejada na figura). No primeiro caso, a área sob a curva é, naturalmente, maior do que o retângulo, ao passo que, no segundo, a área do retângulo é a maior. Em outras palavras,

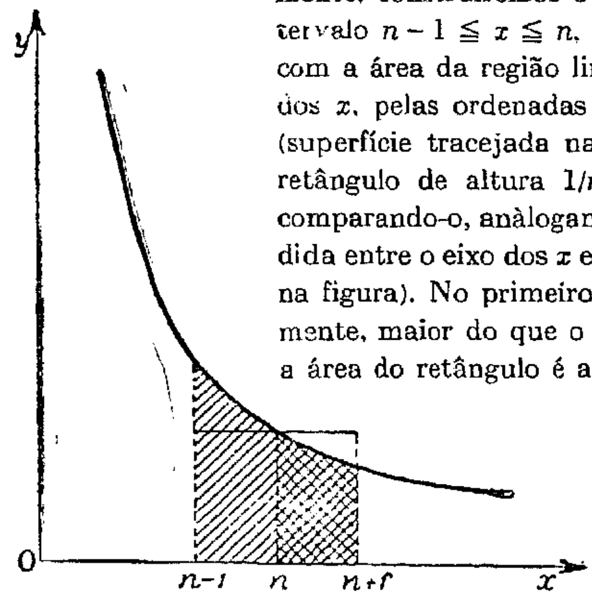


Fig. 2.— Comparação de uma série com uma integral

$$\int_n^{n+1} \frac{dx}{x^\alpha} < \frac{1}{n^\alpha} < \int_{n-1}^{n} \frac{dx}{x^\alpha},$$

como podemos provar diretamente, por meio da própria integral (Cap. II, § 7, pág. 129). Escrevendo esta desigualdade para $n = 2$, $n = 3$, . . . , $n = m$, e somando obteremos a expressão (1)

$$1 + \int_2^{m+1} \frac{dx}{x^\alpha} < s_m < 1 + \int_1^m \frac{dx}{x^\alpha}$$

para a soma parcial de ordem m, $s_m = \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^\alpha}$. À medida que m fôr crescendo, a integral $\int_1^m \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ tenderá para um limite finito, ou crescerá indefinidamente, conforme seja $\alpha > 1$ ou $\alpha \leqq 1$. Por conseqüência, a seqüência monótona dos números s_m ou é limitada ou excede qualquer valor, segundo seja $\alpha > 1$ ou $\alpha \leqq 1$, obtendo-se, assim, o seguinte teorema:

(1) Desta relação, para $\alpha = 1$, decorre, imediatamente, que a seqüência de números $C_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \log n$, é limitada inferiormente. Como a desigualdade . . . . . $\frac{1}{n+1} < \int_n^{n+1} \frac{dx}{x} = \log(n+1) - \log n$ mostra que a seqüência é monótona decrescente, ela deve aproximar-se do limite

$$\lim_{n\to\infty} C_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \log n\right) = C.$$

O número C, cujo valor é 0,5772 . . . , é denominado *constante de Euler*. Em contraste com outros números especiais, importantes na análise como π e e, não há outra expressão que forneça uma lei de fomação simples para a constante de Euler.

A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = \frac{1}{1^{\alpha}} + \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} + \dots$$

será convergente — e, como é natural, absolutamente convergente, — se, e sòmente, no caso em que $\alpha > 1$.

A divergência da série harmônica, que já demonstramos por processo diferente, é uma conseqüência imediata dêste teorema. Em particular, vemos que as séries

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots,$$

$$\frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots,$$

$$\dots\dots\dots\dots,$$

convergem.

A série $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu^{\alpha}}{1}$, cuja convergência acabamos de estudar, serve, freqüentemente, como série de comparação na pesquisa da convergência. Por exemplo, vemos logo que, para $\alpha > 1$, a série $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{c^{\nu}}{\nu^{\alpha}}$ possui convergência absoluta, desde que os valores absolutos dos coeficientes $| c^{\nu} |$ permaneçam menores do que um determinado limite fixo, independente de ν.

EXEMPLOS

Determinar se as séries dos exemplos 1-6 são convergentes ou não.

1. $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \nu^2}$.

2. $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu!}{\nu^{\nu}}$.

3. $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\nu(\nu + 1)}}$.

4.* $\sum\limits_{\nu=2}^{\infty} \frac{1}{(\log \nu)^{\alpha}}$, α fixo.

5. $\sum\limits_{\nu=2}^{\infty} \frac{1}{(\log \nu)^{\log \nu}}$.

6. $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu}{2^{\nu}}$.

Calcular o êrro das séries dos Exemplos 7-10, depois de n têrmos:

7. $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu^2}$.

8. $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu!}$.

9. $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^{\nu}}$.

10. $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu}{2^{\nu}}$.

11. Demonstrar que $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \operatorname{sen}^2 \left[\pi \left(\nu + \frac{1}{\nu} \right) \right]$ é convergente.

12. A série $\sum\limits_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{-\nu^2}$ (isto é, $1 + 2 \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} e^{-\nu^2}$) é convergente?

13.* Demonstrar que $\sum\limits_{\nu=2}^{\infty} \frac{1}{\nu(\log \nu)^{\alpha}}$ converge quando $\alpha > 1$, sendo divergente se $\alpha \leqq 1$.

14.* Demonstrar que $\sum_{\nu=3}^{\infty} \frac{1}{\nu \log \nu (\log \log \nu)^{\alpha}}$ converge quando $\alpha > 1$, divergindo se $\alpha \leqq 1$.

15. Demonstrar que, se $u_i \geqq 0$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ e $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ fôr convergente, $\sum_{i=1}^{\infty} u_i^2$ também convergirá.

16. Mostrar que, se $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ e $\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2$ forem ambas convergentes, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ também convergirá.

17. Demonstrar que

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{2}{6} + \frac{1}{7} + \ldots + \frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} - \frac{2}{3n+3} + \ldots = \log 3.$$

18.* Demonstrar que, se n fôr um inteiro qualquer, maior do que 1,

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu^n}{\nu} = \log n,$$

onde a_ν^n é definido da seguinte maneira:

$$a_\nu^n = \begin{cases} 1 \text{ se } n \text{ não fôr fator de } \nu, \\ -(n-1) \text{ se } n \text{ fôr fator de } \nu. \end{cases}$$

3. Seqüências e séries de funções

1. Observações gerais.

Os têrmos das séries infinitas que consideramos até aqui, foram supostos constantes. Logo, estas séries (quando convergentes) representam, sempre, números definidos. Contudo, tanto na teoria, como nas aplicações, as séries de fundamental importância são aquelas em que os têrmos são funções de uma variável, de sorte que a soma da série será por sua vez função da mesma variável, como no caso da série de Taylor.

Estudaremos, portanto, a série

$$g(_1x) + g_2(x) + g_3(x) + \ldots,$$

na qual tôdas as funções $g_n(x)$ são definidas no intervalo $a \leqq x \leqq b$. A soma parcial de ordem n desta série

$$g_1(x) + g_2(x) + \ldots + g_n(x),$$

será representada por $f_n(x)$. A soma $f(x)$ da série, quando existir, será, então, simplesmente o limite $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

Podemos, portanto, considerar *a soma de uma série infinita de funções* como o *limite da seqüência de funções* $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$. Inversamente, podemos formar uma série equivalente a qualquer seqüência de funções do tipo $f_1(x), f_2(x), \ldots$, fazendo $g_1(x) = f_1(x)$ e $g_n(x) = f_n(x) - f_{n-1}(x)$, para $n > 1$. Quando houver conveniência, pode-se passar da consideração da série à da seqüência e vice-versa.

2. Processos-limites com funções e curvas.

Estabeleceremos agora, exatamente, o que queremos dizer ao afirmar que a função $f(x)$ é o limite da seqüência $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ no intervalo $a \leqq x \leqq b$. A definição é a seguinte: a seqüência $f_1(x), f_2(x), \ldots$ tenderá para a função limite $f(x)$, no intervalo, se em cada ponto x do mesmo os valores $f_n(x)$ convergirem, no sentido comum, para $f(x)$. Neste caso pode-se escrever $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. De acôrdo com o critério de Cauchy (pág. 40) podemos exprimir a convergência da seqüência sem conhecer ou deduzir o valor da função limite $f(x)$. Dêste modo, a seqüência de funções considerada convergirá para uma função limite se, e sòmente neste caso, em cada ponto x do intervalo e para qualquer número positivo ϵ, a quantidade $|f_n(x) - f_m(x)|$ fôr menor do que ϵ e uma vez que os números n e m sejam escolhidos suficientemente grandes, isto é, maiores do que um certo número $N = N(\epsilon)$. Êste número $N(\epsilon)$ é, em geral, função de ϵ e de x e cresce indefinidamente, quando ϵ tende para zero.

Temos encontrado, freqüentemente, casos de limites de seqüências de funções. Mencionaremos apenas a definição da potência x^α para valores irracionais de α, pela equação

$$x^\alpha = \lim_{n\to\infty} x^{r_n},$$

em que $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ é uma seqüência de números racionais que tende para α; ou a equação

$$e^x = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n,$$

em que as funções $f_n(x)$ do segundo membro são polinômios do grau n.

A representação gráfica das funções por meio de curvas sugere um estudo sôbre os limites das seqüências de curvas, no qual verificaremos, por exemplo, que os gráficos das funções limites acima citadas, x^α e e^x podem ser consideradas como as curvas limites dos gráficos das fun-

ções x^n e $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$, respectivamente. Há, entretanto, uma sutil distinção entre a passagem ao limite das funções e a das curvas. Até meados do século XIX não se tinha observado suficientemente esta distinção, e sòmente tendo-se uma idéia clara da mesma poderão ser evitados paradoxos aparentes. Um exemplo esclarecerá êste ponto.

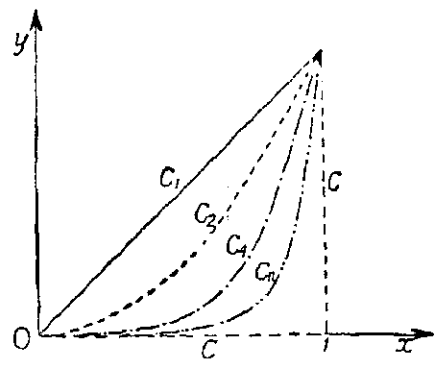


Fig. 3.— Curva-limite e função-limite

Vejamos, para tal, as funções

$$f_n(x) = x^n, \quad (n = 1,\ 2,\ \ldots)$$

no intervalo $0 \leqq x \leqq 1$. Tôdas estas funções são contínuas, existindo a função limite $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$, a qual, entretanto, não é contínua. Ao contrário, desde que para todos os valores de n, $f_n(1) = 1$, o limite será $f(1) = 1$. Por outro lado, porém, para $0 \leqq x \leqq 1$, o limite valerá $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = 0$, como vimos no cap. I, § 5 (pág. 33). A função $f(x)$ é, pois, descontínua, apresentando o valor **1** no ponto $x = 1$ e 0 em qualquer outro ponto do intervalo.

Esta descontinuidade torna-se compreensível se observarmos os gráficos C_n das funções $y = f_n(x)$. Tais gráficos são curvas contínuas (fig. 16, pág. 33), tôdas elas passando pela origem e pelo ponto $x = 1$, $y = 1$, aproximando-se cada vez mais do eixo dos x, à medida que n cresce. As *curvas* possuem uma *curva-limite* C que, de modo algum é descontínua, mas consiste (fig. 3) da porção do eixo dos x entre $x = 0$ e $x = 1$ e do segmento da linha $x = 1$, compreendido entre $y = 0$ e $y = 1$. As *curvas*, pois, convergem para uma *curva-limite contínua*, com uma parte vertical, ao passo que as *funções* convergem para uma *função-limite descontínua*. Reconhecemos, assim, que a descontinuidade da função-limite é traduzida, na curva-limite, pela existência de um segmento perpendicular ao eixo dos x. Êste segmento *deve*, necessàriamente, corresponder a uma descontinuidade na função-limite, e, efetivamente, êle está sempre presente, quando a função-limite fôr descontínua. A curva-limite a que estamos nos referindo, *não é* o gráfico da função-limite, visto nenhuma curva, com um segmento vertical, poder ser a representação gráfica de uma função unívoca $y = f(x)$, porque, em correspondência ao valor de x no qual se verifica o segmento vertical, há inúmeros valores de y para a curva, porém, sòmente um para a função. Logo, o limite dos gráficos das funções $f_n(x)$ é diferente do gráfico do limite destas funções, $f(x)$.

Raciocínios correspondentes têm lugar, naturalmente, também para as séries infinitas.

4. CONVERGÊNCIA UNIFORME E CONVERGÊNCIA NÃO UNIFORME

1. Observações gerais e exemplos.

A distinção entre os conceitos de convergência relativos às funções e às curvas, origina um fenômeno que o estudante deve estar apto a reconhecer com tôda a exatidão. Referimo-nos à *convergência não-uniforme* das seqüências ou das séries infinitas de funções. Como sabemos que os principiantes costumam encontrar dificuldades neste assunto, tratá-lo-emos com o maior número de detalhes possível.

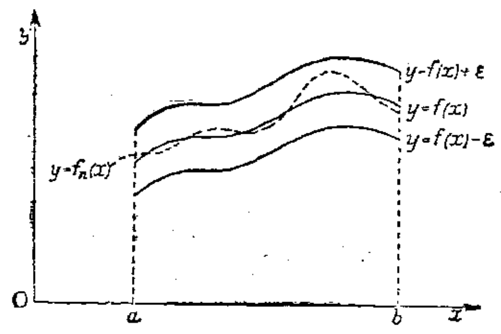


Fig. 4.— Convergência uniforme

Quando dizemos que uma função $f(x)$ é o limite da seqüência $f_1(x), f_2(x), \ldots$, no intervalo $a \leqq x \leqq b$, isto significa, ùnicamente, que, por definição, a relação do limite $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x)$ se verifica em todos os pontos do intervalo. Intuitivamente pode-se esperar a seguinte conclusão do conceito de convergência que acabamos de expor: se escolhermos um determinado grau de precisão, digamos, $\epsilon = \dfrac{1}{1\,000}$ ou $\epsilon = \dfrac{1}{100}$, a partir de um certo índice N em diante, tôdas as funções $f_n(x)$ ficarão compreendidas entre $f(x) + \epsilon$ e $f(x) - \epsilon$ para todos os valores de x, de sorte que os seus gráficos $y = f_n(x)$ estarão inteiramente situados na faixa indicada na figura 4. Isto quer dizer que, para qualquer que seja o número positivo ϵ, haverá um número $N = N(\epsilon)$ correspondente, que naturalmente crescerá além de qualquer limite quando $\epsilon \to 0$, de tal sorte que, para $n > N$, a diferença $|f(x) - f_n(x)| < \epsilon$, não importando a localização de x no intervalo. (Satisfeita esta con-

dição, $|f_n(x) - f_m(x)| < 2\epsilon$ para qualquer valor de x, desde que n e m sejam ambos maiores do que N.) Quando a precisão da aproximação puder ser, no mínimo, igual a uma quantidade ϵ predeterminada, em *qualquer posição* do intervalo, e ao *mesmo tempo*, isto é, quando fôr possível escolher o mesmo número $N(\epsilon)$, independente de x, em qualquer lugar, dizemos que a aproximação é *uniforme*. Muitos ficam, à primeira vista, admirados, quando constatam que a hipótese intuitiva da convergência necessàriamente uniforme está completamente errada, ou seja, que a convergência pode, perfeitamente, ser *não-uniforme*.

Ex. 1. A convergência não-uniforme ocorre no caso da seqüência de funções que acabamos de estudar, $f_n(x) = x^n$. Esta seqüência converge para a função-limite $f(x) = 0$, no intervalo $0 \leqq x \leqq 1$, para $0 \leqq x < 1$, $f(1) = 1$. A convergência se verifica em qualquer ponto do intervalo, isto é, se ϵ fôr uma quantidade positiva qualquer, e se escolhermos qualquer valor fixo, definido, $x = \xi$, a desigualdade $|\xi^n - f(\xi)| < \epsilon$ certamente será satisfeita, se n fôr suficientemente grande. Todavia, tal aproximação não é uniforme. Se escolhêssemos $\epsilon = \frac{1}{2}$, poderíamos determinar um ponto $x = \eta \neq 1$, por maior que fôsse o n escolhido, para o qual $|\eta^n - f(\eta)| = \eta^n > \frac{1}{2}$, o que, efetivamente, acontece para todos os pontos $x = \eta$, onde $1 > \eta < \sqrt[n]{\frac{1}{2}}$. É, portanto, impossível determinar-se um número n tão grande que a diferença entre $f(x)$ e $f_n(x)$ seja menor do que $\frac{1}{2}$, *no intervalo completo*.

Êste comportamento torna-se compreensível, quando nos referirmos aos gráficos das funções (fig. 3, pág. 385). Vemos que, para valores de ξ pouco menores do que 1, a função $f_n(\xi)$ valerá aproximadamente 1, por maior que seja o n escolhido, não podendo, pois, êste valor ser uma boa aproximação para $f(\xi)$, que vale 0.

Comportamento análogo apresentam, na vizinhança dos pontos $x = 1$ e $x = -1$, as funções

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + x^{2n}}.$$

Isto pode ser fàcilmente estabelecido (cap. I, § 8, pág. 52).

Ex. 2. Nos dois exemplos que apresentamos acima, a não-uniformidade da convergência estava diretamente relacionada com a descontinuidade da função-limite. Contudo, é fácil, também, construir uma seqüência de funções contínuas, que convirja para uma função-limite contínua, porém, não-uniformemente. Consideraremos, apenas, o intervalo $0 \leqq x \leqq 1$ e estabeleceremos as seguintes definições para $n \geqq 2$:

$$f_n(x) = xn^\alpha \text{ para } 0 \leqq x \leqq \frac{1}{n},$$

$$f_n(x) = \left(\frac{2}{n} - x\right) n^\alpha \text{ para } \frac{1}{n} \leqq x \leqq \frac{2}{n},$$

$$f_n(x) = 0 \text{ para } \frac{2}{n} \leqq x \leqq 1,$$

onde, para começar, podemos escolher um valor qualquer para α, o qual deverá ser considerado fixo para todos os têrmos da seqüência. Gràficamente, estas funções serão apresentadas por uma figura em forma de telhado, constituída de dois segmentos lineares contidos no intervalo $0 \leqq x \leqq 2/n$ do eixo dos x, ao passo que, de $x = 2/n$ em diante, o gráfico é o próprio eixo dos x (fig. 5).

Se $\alpha < 1$, a altitude do ponto mais alto do gráfico, que tem em geral o valor $n^{\alpha-1}$, tenderá para 0, à medida que n cresce. As curvas tenderão, portanto, para o eixo dos x, enquanto as funções $f_n(x)$ convergirão uniformemente para a função-limite $f(x) = 0$.

Se $\alpha = 1$, o vértice do gráfico terá a altura 1 para qualquer valor de n. Finalmente, quando $\alpha > 1$, a altitude do vértice crescerá além de qualquer limite, quando n crescer.

Entretanto, independentemente de como α foi escolhido, a seqüência $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... sempre tenderá para a função-limite $f(x) = 0$. Se x fôr positivo, teremos,

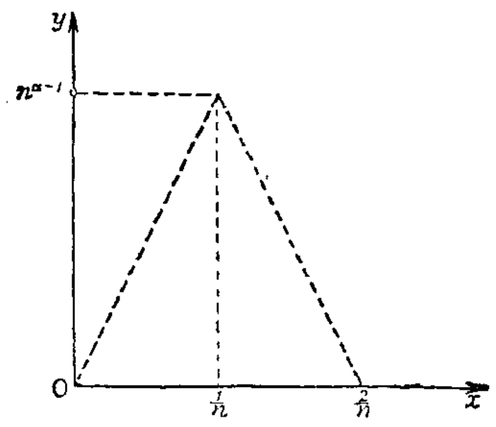


Fig. 5.— Convergência não-uniforme

para qualquer valor de n suficientemente grande, $2/n < x$, de modo que x não está sob o ângulo formado pelo gráfico, e $f_n(x) = 0$. Para $x = 0$, todos os valores funcionais de $f_n(x)$ serão iguais a 0, de forma que, em qualquer caso, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$.

A convergência não será uniforme, certamente, se $\alpha \geqq 1$, porque é impossível escolher-se um n tão grande que a expressão $|f(x) - f_n(x)| = f_n(x)$ seja menor do que $\frac{1}{2}$ em *qualquer posição* do intervalo.

Ex. 3. A seqüência de funções

$$f_n(x) = xn^{\alpha}e^{-nx},$$

comporta-se de maneira exatamente igual (fig. 6). Neste caso, porém, em contraste com o precedente, cada função da seqüência é representada por uma expressão analítica simples. A equação $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ também se verifica para qualquer valor positivo de x, e desde que n cresça, a função e^{-nx} tenderá para 0 em ordem muito mais elevada do que qualquer potência de $1/n$ (cap. III, § 9, pág. 192). Para $x = 0$ teremos sempre $f_n(x) = 0$, e portanto,

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$$

para qualquer valor de x situado no intervalo $0 \leqq x \leqq a$, em que a é um número positivo qualquer. Neste caso, novamente, a convergência para a função-limite não é uniforme. Temos, no ponto $x = 1/n$ (em que $f_n(x)$ tem seu máximo),

$$f_n(x) = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n^{\alpha-1}}{e},$$

e podemos verificar que, se $\alpha \geqq 1$, a convergência não será uniforme. Qualquer curva $y = f_n(x)$, por maior que tenha sido escolhido o valor de n, sempre conterá pontos (especialmente o ponto $x = 1/n$, que varia com n, e seus pontos vizinhos) para os quais $f_n(x) - f(x) > 1/2e$.

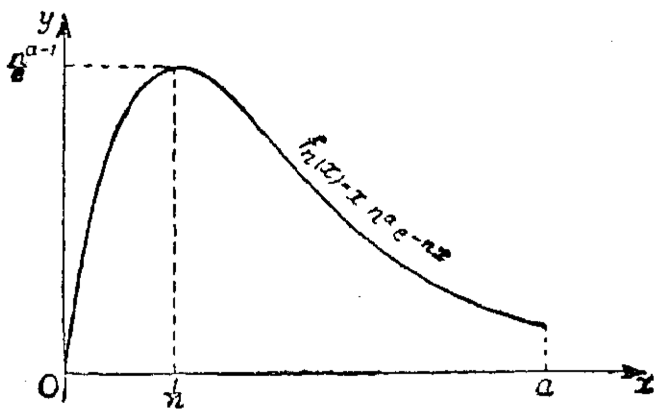


Fig. 6

Ex. 4. O conceito das convergências uniforme e não-uniforme pode, naturalmente, ser aplicado às séries infinitas. Dizemos que a série

$$g_1(x) + g_2(x) + \ldots$$

é uniformemente convergente, ou não, de acôrdo com o comportamento das suas somas parciais $f_n(x)$. Um exemplo muito simples de uma série de convergência não-uniforme é dado por

$$f(x) = x^2 + \frac{x^2}{1 + x^2} + \frac{x^2}{(1 + x^2)^2} + \frac{x^2}{(1 + x^2)^3} + \ldots.$$

Para $x = 0$, cada soma parcial, $f_n(x) = x^2 + \ldots + \dfrac{x^2}{(1 + x^2)^{n-1}}$ tem o valor 0; portanto, $f(0) = 0$. Para $x \neq 0$ teremos simplesmente uma série geométrica, com a razão positiva $\dfrac{1}{1 + x^2} < 1$; podemos, pois, somá-la pelas regras elementares, obtendo, para cada valor de $x \neq 0$, a soma

$$\frac{x^2}{1 - 1/(1 + x^2)} = 1 + x^2.$$

A função-limite $f(x)$ é então dada em qualquer posição, exceto em $x = 0$, pela expressão $f(x) = 1 + x^2$, enquanto $f(0) = 0$. Ela possui, portanto, descontinuidade algo artificial na origem.

Deparamos de novo, neste caso, com uma convergência não-uniforme em todo o intervalo que contiver a origem, visto a diferença $f(x) - f_n(x) = r_n(x)$ ser sempre 0, para $x = 0$, ao passo que, para qualquer outro valor de x, ela vale $r_n(x) = \dfrac{1}{(1 + x^2)^{n-1}}$, como o leitor poderá verificar, fàcilmente, por si mesmo. Se exigirmos que esta expressão seja menor do que, digamos, $\frac{1}{2}$, podemos consegui-lo, escolhendo um valor de n suficientemente grande, para cada valor fixo de x. Entretanto, não há valor de n suficientemente grande, para que possamos assegurar que $r_n(x)$ é menor do que $\frac{1}{2}$ em tôda a parte, porque, por maior que seja o valor de n adotado, podemos sempre tornar $r_n(x)$ maior do que $\frac{1}{2}$, tomando x bastante próximo de 0. A aproximação uniforme, a menos de $\frac{1}{2}$ é, assim, impossível. O que acabamos de expor torna-se claro, considerando-se as curvas de aproximação (fig. 7). Estas cur-

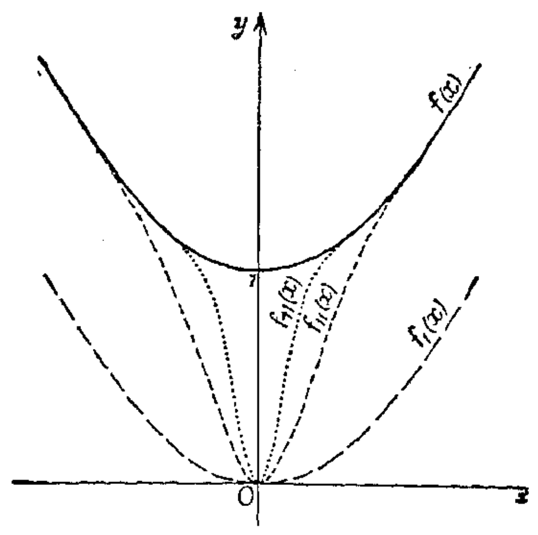


Fig. 7

vas, exceto de $x = 0$, vão se aproximando cada vez mais da parábola $y = 1 + x^2$, à medida que n cresce. Próximo de $x = 0$, contudo, as curvas projetam-se em extensões cada vez mais próximas da origem, e, ao passo que n vai crescendo, estas extensões vão-se aproximando sempre mais de uma determinada reta, ou seja, de um segmento do eixo dos y. A curva-limite será, portanto, a parábola, mais um segmento linear que alcança a origem, verticalmente para baixo.

Como outro exemplo de convergência não-uniforme, mencionaremos a série $\sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu(x)$, em que $g_\nu(x) = x^\nu - x^{\nu-1}$ para $\nu \geqq 1$, $g_0(x) = 1$, definida no intervalo $0 \leqq x \leqq 1$. As somas parciais são as funções x^ν já estudadas no primeiro exemplo (pág. 387).

2. Critério de convergência uniforme.

As considerações precedentes indicam que a convergência uniforme das seqüências ou das séries não é uma propriedade comum a tôdas

elas, mas sim uma característica especial. Formularemos, novamente, o conceito de convergência uniforme. A série

$$g_1(x) + g_2(x) + \dots$$

será *uniformemente convergente* num determinado intervalo, se sua soma $f(x)$ puder ser aproximada a menos de ϵ (onde ϵ representa uma quantidade positiva, arbitràriamente pequena), tomando-se um número de têrmos suficientemente grande, invariável no intervalo.

Suponhamos, inicialmente, que a série $g_1(x) + g_2(x) + \dots$ converge, em qualquer posição do intervalo, para a função limite $f(x)$. Designemos por $f_n(x)$ a soma parcial de ordem n da série, isto é, $f_n(x) = g_1(x) + \dots + g_n(x)$, e por $R_n(x)$ o resto da mesma após n têrmos

$$R_n(x) = f(x) - f_n(x).$$

A série $g_1(x)+g_2(x)+\dots$ *terá convergência uniforme no intervalo, se a cada número positivo* ϵ *corresponder um número* N, *dependente só de* ϵ, *e não de* x, *tal que para* $n > N$ *a desigualdade* $|R_n(x)| = |f(x)-f_n(x)| < \epsilon$ *se verifique para todos os valores de* x *do intervalo.*

Traduzindo o conceito mais objetivamente, a soma parcial $f_n(x)$ representa a soma $f(x)$ com êrro inferior a ϵ em qualquer posição do intervalo, simultâneamente, desde que, apenas, se tenha escolhido n suficientemente grande. Pelo critério de Cauchy verificamos, em seguida, que a série convergirá se, e sòmente no caso em que a diferença $|f_n(x) - f_m(x)|$ puder ser tornada menor do que a quantidade arbitrária ϵ, em qualquer parte do intervalo, pela escolha de n e m maiores do que N, independente de x. Se a convergência fôr uniforme, podemos fazer tanto $|f_n(x) - f(x)|$ como $|f_m(x) - f(x)|$ menores do que $\epsilon/2$, atribuindo-se a n e m valores maiores do que o número N, independente de x, de sorte que $|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$. Verificando-se esta última desigualdade para qualquer valor de x, sempre que n e m sejam maiores do que N, estabelecendo-se um valor fixo de $n < N$ e fazendo m crescer além de todos os limites, teremos a relação

$$|f_n(x) - f(x)| = \lim_{m\to\infty} |f_n(x) - f_m(x)| \leqq \epsilon,$$

para cada valor de x, de modo que a convergência será uniforme.

Para abordarmos a convergência uniforme das seqüências de funções, bastam apenas algumas alterações insignificantes na definição

anterior. A seqüência $f_1(x), f_2(x), \ldots$ convergirá uniformemente para $f(x)$, num intervalo, se a diferença $|f(x) - f_n(x)|$ puder ser tornada menor do que ϵ em qualquer posição do intervalo, pela escolha de n maior do que o número N, independente de x. Como vimos acima, a condição necessária e suficiente para a convergência uniforme da seqüência, é que $|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$ para todos os valores de x, quando n e m forem, ambos, maiores do que N, dependente de ϵ, mas não de x.

Veremos em breve que é justamente a convergência uniforme que faz com que, tanto as séries infinitas, como outros processos de limite com funções, sejam instrumentos de grande utilidade e emprêgo na análise. Afortunadamente, nos processos de limite normalmente encontrados no cálculo, e nas suas aplicações, a convergência não-uniforme é uma espécie de fenômeno excepcional, que raramente perturbará as presentes aplicações analíticas.

Na maioria dos casos, a uniformidade da convergência das séries é estabelecida pelo seguinte critério:

Se os têrmos da série $\sum_{\nu=1}^{\infty} g_\nu(x)$ *satisfizerem a condição* $|g_\nu(x)| \leqq a_\nu$, *em que os números* a_ν *são constantes que formam a série convergente* $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$, *a série* $\sum_{\nu=1}^{\infty} g_\nu(x)$ *convergirá uniformemente (e, podemos observar incidentalmente, de maneira absoluta).*

Teremos, assim,

$$\left|\sum_{\nu=n}^{m} g_\nu(x)\right| \leqq \sum_{\nu=n}^{m} |g_\nu(x)| \leqq \sum_{\nu=n}^{m} a_\nu,$$

e como, pelo critério de Cauchy, a soma $\sum_{\nu=n}^{m} a_\nu$ pode ser tornada arbitràriamente pequena pela escolha de n e $m > n$ bastante grandes, a relação exprime a condição necessária e suficiente da convergência uniforme.

Um primeiro exemplo é fornecido pela série geométrica $1 + x + x^2 + \ldots$, em que x fica restringido ao intervalo $|x| \leqq q$, sendo q qualquer número positivo menor do que 1. Os têrmos desta série são, portanto, menores ou iguais aos da série convergente Σq^ν.

Outro exemplo é dado pela "série trigonométrica"

$$\frac{c_1 \operatorname{sen}(x - \delta_1)}{1^2} + \frac{c_2 \operatorname{sen}(x - \delta_2)}{2^2} + \frac{c_3 \operatorname{sen}(x - \delta_3)}{3^2} + \ldots;$$

desde que $|c_n| < c$, sendo c uma constante positiva, independente de n. Teremos. então,

$$g_n(x) = \frac{c_n \operatorname{sen}(x - \delta_n)}{n^2}, \text{ de modo que } |g_n(x)| < \frac{c}{n^2}.$$

A convergência uniforme e absoluta da série trigonométrica decorre, portanto, da convergência da série $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{c}{n^2}$.

3. Continuidade da soma de uma série de funções contínuas uniformemente convergentes.

Como já indicamos, o significado da convergência uniforme das séries infinitas reside no comportamento destas séries que, sob muitos aspectos, é semelhante à soma de um número finito de funções contínuas. Assim, por exemplo, a soma de um número finito de funções contínuas é, por sua vez, uma função contínua, o que nos dá o seguinte teorema correspondente:

Se uma série de têrmos contínuos convergir uniformemente num intervalo, a sua soma será uma função contínua.

A demonstração é muito simples. Subdividamos a série

$$f(x) = g_1(x) + g_2(x) + \dots$$

na sua soma parcial de ordem n, $f_n(x)$, mais o resto $R_n(x)$. Como de costume, $f_n(x) = g_1(x) + \dots + g_n(x)$. Estabelecendo-se, então, qualquer número positivo ϵ, poderemos, em virtude da convergência uniforme, fixar n tão grande, que o resto seja menor do que $\epsilon/4$ em todo o intervalo, vindo, pois,

$$|R_n(x + h) - R_n(x)| < \frac{\epsilon}{2}$$

para cada par de números x e $x + h$ do intervalo. A soma parcial $f_n(x)$ consiste na soma de um número finito de funções contínuas, sendo, portanto, contínua. Logo, para cada ponto x podemos escolher um δ positivo, tão pequeno, que

$$|f_n(x + h) - f_n(x)| < \frac{\epsilon}{2}$$

desde que $|h| < \delta$ e que os pontos x e $x + h$ pertençam ao intervalo. Segue-se, então,

$$\begin{aligned} |f(x + h) - f(x)| &= |f_n(x + h) - f_n(x) + R_n(x + h) - R_n(x)| \\ &\leqq |f_n(x + h) - f_n(x)| + |R_n(x + h) - R_n(x)| < \epsilon, \end{aligned}$$

que exprime a continuidade da função proposta.

O significado dêste teorema torna-se claro quando lembrarmos que as somas de séries de funções contínuas de convergência não-uniforme não são necessàriamente contínuas, como vimos nos exemplos que apresentamos. Concluímos, portanto, do teorema exposto, que se a soma de uma série convergente de funções contínuas tiver um ponto de descontinuidade, a convergência será não-uniforme nas vizinhanças dêste ponto. Logo, a representação das funções descontínuas por meio de séries de funções contínuas é baseada no emprêgo de processos de limite de convergência não-uniforme.

4. Integração das séries de convergência uniforme.

A soma de um número finito de funções contínuas pode ser "integrada têrmo por têrmo", isto é, a integral da soma pode ser determinada, integrando-se cada uma das suas parcelas, separadamente, e somando-se as integrais. No caso das séries convergentes infinitas pode-se empregar o mesmo processo, desde que a série convirja uniformemente no intervalo de integração.

Uma série do tipo $\sum_{\nu=1}^{\infty} \mathrm{g}_\nu(\mathrm{x}) = \mathrm{f}(\mathrm{x})$, *uniformemente convergente num intervalo, pode ser integrada têrmo por têrmo neste intervalo.* Ou, mais precisamente, *se* a *e* x *forem duas posições no intervalo de convergência uniforme; a série* $\sum_{\nu=1}^{\infty} \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{x}} \mathrm{g}_\nu(\mathrm{t})\, \mathrm{dt}$ *convergirá e, efetivamente, convergirá uniformemente em relação a* x *para cada valor fixo de* a, *valendo a sua soma,* $\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{x}} \mathrm{f}(\mathrm{t})\, \mathrm{dt}$.

Para prová-lo, escrevamos como antes

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} g_\nu(x) = f_n(x) + R_n(x).$$

Admitimos que os têrmos isolados da série são funções contínuas, logo, pela subseção precedente, a soma respectiva é contínua, e, portanto, integrável. Se ϵ fôr uma quantidade positiva qualquer, podemos determinar um número N tão grande que a desigualdade $|R_n(x)| < \epsilon$ se verifique para qualquer $n > N$, para cada valor de x do intervalo. O primeiro teorema do valor médio do cálculo integral nos dá

$$\left| \int_a^x \left[f(t) - f_n(t)\, dt \right] \right| \leqq \epsilon l,$$

em que l é o comprimento do intervalo de integração. A integração da soma finita $f_n(x)$ podendo ser realizada têrmo por têrmo, dará

$$\left| \int_a^x f(t)\, dt - \sum_1^n \int_a^x g_\nu(t)\, dt \right| < \epsilon l.$$

Uma vez que ϵl pode ser tomado tão pequeno quanto quisermos, teremos

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \int_a^x g_\nu(t)\, dt = \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{n} \int_a^x g_\nu(t)\, dt = \int_a^x f(t)\, dt,$$

como devíamos provar.

Se, em vez de lidar com séries infinitas, quiséssemos fazê-lo com seqüências de funções, o resultado seria traduzido da maneira seguinte:

Desde que a seqüência de funções $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... *tenda uniformemente para a função-limite* $f(x)$, *num intervalo,*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx$$

para qualquer par de valores a *e* b *do intervalo.* Em outras palavras: *é possível permutar a ordem das operações de integração e passagem ao limite.*

O que acabamos de enunciar está longe de ser um fato trivial. É verdade que, de um ponto de vista intuitivo, como prevaleceu no século XVIII, dificilmente seria posta em dúvida a interpermutabilidade dos dois processos. Entretanto, um olhar aos exemplos do n.º 1 desta seção (pág. 387) mostra que, nos casos de convergência não-uniforme, a equação acima não se verifica. Basta considerarmos o exemplo 2 (pág. 387) no qual a integral da função-limite é 0, ao passo que a da função $f_n(x)$ no intervalo $0 \leqq x \leqq 1$, isto é, a área do triângulo (fig. 5) vale

$$\int_0^1 f_n(x)\, dx = n^{\alpha-2},$$

e quando $\alpha \geqq 2$ não converge para zero. Neste caso, vemos imediatamente que a diferença entre $\int_0^1 f(x)\, dx$ e $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx$ é motivada pela não-uniformidade da convergência.

Por outro lado, considerando valores de α, tais que $1 \leqq \alpha < 2$, vemos que a equação $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx = \int_0^1 f(x)\, dx$ pode ser verdadeira, muito embora a convergência não seja uniforme. Como exemplo, a série $\sum\limits_0^\infty g_n(x)$, onde $g_n(x) = x^n - x^{n-1}$ para $n \geqq 1$ e $g_0(x) = 1$, pode ser integrada têrmo por têrmo entre os limites 0 e 1,

mesmo que não possua convergência uniforme. Assim, enquanto a uniformidade da convergência é *condição suficiente* para a integrabilidade têrmo por têrmo, não é, de modo algum, *condição necessária*. O desconhecimento destas particularidades pode, fàcilmente, conduzir a erros.

5. Derivação de séries infinitas.

O comportamento das séries uniformemente convergentes ou das seqüências com relação à derivação, é completamente diverso do referente à integração. Por exemplo, a seqüência de funções $(f_n x) = \frac{\operatorname{sen} n^2 x}{n}$ certamente converge, com uniformidade, para a função-limite $f(x) = 0$, porém, a derivada $f_n'(x) = n \cos n^2 x$ não converge para a derivada da função limite $f'(x) = 0$, como podemos ver, fazendo $x = 0$. A despeito da uniformidade da convergência, não é possível alterar-se a ordem dos processos de derivação e passagem ao limite.

Enunciados correspondentes podem ser formulados, naturalmente, para as séries infinitas. Por exemplo, a série

$$\operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} 2^4 x}{2^2} + \frac{\operatorname{sen} 3^4 x}{3^2} + \dots$$

possui convergência absoluta e uniforme, visto seus têrmos não serem numèricamente maiores do que os da série convergente $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots$. Derivando, entretanto, esta série têrmo por têrmo, obteremos

$$\cos x + 2^2 \cos 2^4 x + 3^2 \cos 3^4 x + \dots,$$

que não converge em tôda a parte; por exemplo, ela é divergente em $x = 0$.

O único critério capaz de assegurar que a derivação, têrmo por têrmo, é permissível em casos especiais, é o proporcionado pelo seguinte teorema:

Quando a derivação de uma série infinita convergente $\sum_{\nu=0}^{\infty} G_\nu(x) = F(x)$ *produzir uma série de têrmos contínuos,* $\sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu(x) = f(x)$, *dotada de convergência uniforme, a soma dos têrmos da série resultante é igual à derivada da soma da série primitiva.* Êste teorema requer, portanto,

expressamente, que depois de derivar a série, têrmo por têrmo, investiguemos se a série resultante é ou não uniformemente convergente.

A demonstração é muito simples, pois, pelo teorema do n.º 4 (pág. 394) é possível integrar-se têrmo por têrmo as séries obtidas por derivação. Recordando que $g_\nu(t) = G_\nu'(t)$, teremos

$$\int_a^x f(t)\,dt = \int_a^x \Big[\sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu(t)\Big]\,dt = \sum_{\nu=0}^{\infty}\int_a^x g_\nu(t)\,dt = \sum_{\nu=0}^{\infty}[G_\nu(x) - G_\nu(a)]$$
$$= F(x) - F(a).$$

Como isto se verifica para qualquer valor de x no intervalo da convergência uniforme, segue-se que

$$f(x) = F'(x),$$

o que queríamos demonstrar.

Exemplos

1. Mostrar por comparação com uma série de têrmos constantes que as séries seguintes convergem nos intervalos indicados:

(a) $x - x^2 + x^3 - x^4 + \ldots\ (-\tfrac{1}{2} \leqq x \leqq \tfrac{1}{2})$.

(b) $\tfrac{1}{2}\sqrt{1-x^2} + \tfrac{1}{4}\sqrt{1-x^4} + \tfrac{1}{6}\sqrt{1-x^6} + \ldots + \dfrac{1}{2n}\sqrt{1-x^{2n}} + \ldots$ $(-1 \leqq x \leqq 1)$.

(c) $\dfrac{\operatorname{sen} x}{1^2} + \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{2^2} + \ldots + \dfrac{\operatorname{sen} nx}{n^2} + \ldots.$

(d) $e^x + e^{2x} + \ldots + e^{nx} + \ldots\ (-2 \leqq x \leqq -1)$.

2. Demonstrar que $\lim f_n(x) = 0$, onde $f_n(x) = \dfrac{nx}{1 + n^2x^2}$, $-1 \leqq x \leqq 1$. Mostrar que a convergência é não-uniforme.

3.* (a) Determinar $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, sendo $f_n(x) = \dfrac{n^2x^3}{1 + n^2x^2}$, $-1 \leqq x \leqq 1$. Demonstrar que a convergência não é uniforme. Demonstrar, ainda, que de modo algum,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{1} f_n(x)\,dx = \int_{-1}^{1}\lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx.$$

(b) Discutir o comportamento da seqüência dada por $f_n(x) = \dfrac{n^\alpha x^2}{1 + n^\alpha x^2}$ relativamente à convergência, convergência uniforme, e sua integração têrmo por têrmo.

4.* Desenhar as curvas $y = f_n(x) = \dfrac{x^{2n}}{1 + x^{2n}}$, $-2 \leqq x \leqq 2$, para $n = 1, 3, 10$. Determinar $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Demonstrar que a convergência não é uniforme.

5. Mostrar que $\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{-(x-\nu)^2}$ converge de maneira uniforme em qualquer intervalo determinado $a \leqq x \leqq b$.

6. Demonstrar que as seguintes seqüências convergem, porém, não uniformemente, no intervalo $0 \leqq x \leqq \pi$:

(a) $\sqrt[n]{\operatorname{sen} x}$.

(b) $(\operatorname{sen} x)^n$.

(c) $\sqrt[n]{x \operatorname{sen} x}$.

(d) $[f(x)]^n$, sendo $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$, $f(0) = 1$.

(e) $\sqrt[n]{f(x)}$, sendo $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$, $f(0) = 1$.

7. A seqüência $f_n(x) = 1, 2, \ldots$, é definida no intervalo $0 \leqq x \leqq 1$ pela equação.

$$f_0(x) = 1, \quad f_n(x) = \sqrt{x f_{n-1}(x)}.$$

(a) Demonstrar que, neste intervalo, a seqüência converge para um limite contínuo.

(b)* Provar que a convergência é uniforme.

8.* Consideremos $f_0(x)$ contínua no intervalo $0 \leqq x \leqq a$. A seqüência de funções $f_n(x)$ é definida por

$$f_n(x) = \int_0^x f_{n-1}(t)\,dt, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Demonstrar que em qualquer intervalo determinado, $0 \leqq x \leqq a$, a seqüência converge uniformemente para zero.

9. Desenhar as curvas $x^{2n} + y^{2n} = 1$, para $n = 1, 2, 4$. Para que limite tendem estas curvas, quando $n \to \infty$?

10.* Seja $f_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, uma seqüência de funções, com derivadas contínuas, no intervalo $a \leqq x \leqq b$. Provar que, se $f_n(x)$ fôr convergente em todos os pontos do intervalo, e a desigualdade $|f_n'(x)| < M$ (onde M é constante) se verificar para todos os valores de n e de x, a convergência é uniforme.

5. Séries de potências

As *séries de potências* ocupam o lugar preponderante entre as séries infinitas. Designamos por êste nome uma série do tipo

$$P(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu x^\nu$$

("série de potências em x"), ou mais geralmente,

$$P(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \ldots = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu (x - x_0)^\nu$$

["série de potências em $(x - x_0)$"], em que x_0 é um número fixo. Se introduzirmos na última série, $\xi = x - x_0$ como nova variável, teremos

uma série de potências, $\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu \xi^\nu$, na nova variável ξ, sendo, pois, possível concentrarmos a atenção sòmente na série de forma mais especial $\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu x^\nu$, sem restringirmos a generalização do problema.

No capítulo VI (pág. 320) estudamos a representação aproximada das funções por meio de polinômios, chegando assim a desenvolvê-las segundo a série de Taylor, a qual, efetivamente, é uma série de potências. Nesta s ,ão estudaremos as séries de potências de forma mais minuciosa, desenvolvendo em série as funções mais importantes, de modo mais simples e conveniente do seguido anteriormente.

1. Propriedades de convergência das séries de potências.

Há séries de potências que *não* convergem para valor algum de x, exceto, naturalmente, para $x = 0$. Por exemplo, a série

$$x + 2^2x^2 + 3^3x^3 + \ldots + n^nx^n + \ldots .$$

No caso de $x \neq 0$, é possível determinar-se um inteiro N tal que $|x| > 1/N$. Então, todos os têrmos n^nx^n para os quais $n > N$ serão maiores do que 1 em valor absoluto e, efetivamente, à medida que n cresce, n^nx^n crescerá além de qualquer valor, de sorte que a série deixa de ser convergente.

Por outro lado, há séries que convergem para *qualquer valor* de x. Por exemplo, a série de potências da função exponencial

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots ,$$

cuja convergência, para qualquer valor de x, decorre do critério da relação (critério III*a*, pág. 378). O têrmo de ordem $(n + 1)$ dividido pelo de ordem n dá x/n, e, qualquer que seja o x escolhido, esta relação tenderá para zero, à medida que n crescer.

O comportamento das séries de potências relativamente à convergência é expresso pelo seguinte teorema fundamental:

Quando uma série de potências em x *convergir para o valor* $x = \xi$, *convergirá de forma absoluta para qualquer valor de* x *tal que* $|x| < |\xi|$, *convergindo uniformemente em todos os intervalos* $|x| \leqq \eta$, *em que* η *fôr um número positivo qualquer, menor do que* $|\xi|$. Neste caso, η pode ficar tão próximo de $|\xi|$ quanto quisermos.

A demonstração é simples. Se a série $\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu \xi^\nu$ convergir, os seus têr-

mos tenderão para 0, à medida que n crescer. Daí segue-se que todos os têrmos ficarão abaixo de um certo limite M, independente de ν, ou seja, $|c_\nu \xi^\nu| < M$. Se designarmos por q um número qualquer, de modo que $0 < q < 1$, e se restringirmos x ao intervalo $|x| \leqq q|\xi|$, teremos $|c_\nu x^\nu| \leqq |c_\nu \xi^\nu| q^\nu < Mq^\nu$. Os têrmos da série $\sum\limits_0^\infty c_\nu x^\nu$ são, porém, neste intervalo, menores do que os da série geométrica convergente ΣMq^ν. Logo, do teorema da página 392 deduz-se a convergência absoluta e uniforme da série, no intervalo $-q|\xi| \leqq x \leqq |\xi|$.

Quando uma série de potências não fôr convergente em tôdas as posições, isto é, se houver um valor $x = \xi$ para o qual diverge, ela será divergente para todos os valores de x, tais que $|x| > |\xi|$, porque se fôsse convergente para êstes valores de x, pelo teorema acima, também o seria para os valores de ξ, numèricamente inferiores.

Do que foi exposto verificamos que, uma série de potências que converge, no mínimo, para um valor de x, diferente de 0, e diverge, ao menos, para um valor de x, possui um *intervalo de convergência*. Existirá, então, um número ρ, positivo e definido, tal que a série divergirá para $|x| > \rho$, convergindo para $|x| < \rho$. Para $x = \rho$, nada pode ser enunciado, de um modo geral. Os casos-limite, isto é, aquêles em que a série converge sòmente para $x = 0$ ou em que converge em tôda a parte, são representados, simbòlicamente, por $\rho = 0$ e $\rho = \infty$, respectivamente [1].

Por exemplo, para a série geométrica $1 + x + x^2 + \ldots$, teremos $\rho = 1$. A série será divergente nos pontos extremos do intervalo de convergência. Da mesma forma, para a série da função inversa da tangente (pág. 319),

$$\operatorname{arc\,tg} x = x - x^3/3 + x^5/5 - + \ldots,$$

teremos $\rho = 1$, verificando-se que a série converge em ambos os extremos, $x = \pm 1$, do intervalo de convergência, como se reconhece logo, pelo critério de Leibnitz (pág. 370).

(1) É possível determinar-se o intervalo de convergência referido, diretamente, dos coeficientes c_ν da série. Existindo o limite $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$ teremos

$$\rho = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}.$$

Geralmente, ρ é dado pela fórmula

$$\rho = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}}$$

em que $\overline{\lim}$ é o símbolo do limite superior, como já foi definido no apêndice do capítulo I (pág. 62).

Da convergência uniforme tiramos a importante dedução que, no intervalo de convergência (se êle existir) a série de potências representa uma função contínua.

2. Integração e derivação das séries de potências.

Tendo em vista a uniformidade da convergência, *é sempre possível integrar-se uma série de potências.*

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu x^\nu$$

têrmo por têrmo em qualquer intervalo fechado, desde que êle se encontre, inteiramente, no intervalo de convergência. Obteremos, assim, a função

$$F(x) = c + \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{c_\nu}{\nu+1} x^{\nu+1},$$

para o qual $$F'(x) = f(x).$$

Além disso, como $\left| \frac{c_\nu}{\nu+1} \right| \leqq | c_\nu |$ para todos os valores de ν, a série obtida por integração convergirá muito mais ràpidamente do que a original.

Podemos, também, derivar a série de potências, têrmo por têrmo, no intervalo de convergência, obtendo a equação

$$f'(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu c_\nu x^{\nu-1}.$$

Para demonstrar esta afirmação, basta mostrar que a série do segundo membro convergirá uniformemente, se x fôr restringido a um intervalo contido inteiramente no intervalo de convergência. Suponhamos, então, que ξ é um número, tão próxmo de ρ quanto quisermos, para o qual $\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \xi^\nu$ é convergente. Como já vimos anteriormente, todos os números $| c_\nu \xi^\nu |$ ficarão abaixo do limite M, independente de ν, de forma que $| c_\nu \xi^{\nu-1} | < \frac{M}{|\xi|} = N$. Seja q um número qualquer que satisfaça à condição $0 < q < 1$. Se limitarmos x ao intervalo $| x | \leqq q | \xi |$, os têrmos da série em aprêço não serão maiores do que os da série $\sum_{\nu=1}^{\infty} | \nu c_\nu q^{\nu-1} \xi^{\nu-1} |$, e, portanto, serão menores do que os da série $\sum_{\nu=1}^{\infty} N\nu q^{\nu-1}$.

Nesta última série, porém, a relação entre os têrmos de ordem $(n+1)$ e n, é $\dfrac{n+1}{n}\,q$, a qual tende para q, à medida que n cresce. Como sabemos que $0 < q < 1$, segue-se (critério III*a*, pág. 378) que a série é convergente. Logo, a série obtida por derivação converge uniformemente, e pelo teorema da parte final da seção anterior (pág. 396), representa a derivada $f'(x)$ da função proposta, $f(x)$, ficando assim provado o nosso enunciado.

Se aplicarmos êste resultado, novamente, à série de potências

$$f'(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu c_\nu x^{\nu-1},$$

teremos, derivando têrmo por têrmo,

$$f''(x) = \sum_{\nu=2}^{\infty} \nu(\nu-1)\, c_\nu x^{\nu-2},$$

e, continuando o processo, chegaremos ao teorema: *Qualquer função representada por uma série de potências pode ser derivada têrmo por têrmo quantas vêzes quisermos, no intervalo de convergência* (1).

3. Operações com as séries de potências.

Os teoremas que acabamos de demonstrar permitem operar-se com as séries de potências, do mesmo modo que com os polinômios. É claro que duas séries de potências podem ser somadas ou subtraídas, somando-se ou subtraindo-se os coeficientes correspondentes (pág. 376). É igualmente claro que uma série de potências, como qualquer série convergente, será multiplicada por um fator constante, se cada um dos seus têrmos fôr multiplicado pelo fator em questão. Por outro lado, a multiplicação e a divisão das séries de potências exigem estudo mais detalhado, e, para tal, remetemos o leitor ao apêndice (pág. 416).

(1) Como representação explícita da derivada de ordem k, obtemos

$$f^{(k)}(x) = \sum_{\nu=k}^{\infty} \nu(\nu-1)\ldots(\nu-k+1)\, c_\nu x^{\nu-k}.$$

ou, sob forma ligeiramente diversa,

$$\frac{f^{(k)}(x)}{k!} = \sum_{\nu=k}^{\infty} \binom{\nu}{k} c^\nu x^{\nu-k} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{k+\nu}{k} c_{k+\nu} x^\nu.$$

Estas duas fórmulas são empregadas freqüentemente.

Aqui, nos limitaremos a afirmar, sem demonstrá-lo, que duas séries de potências

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$$

e

$$g(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu x^\nu$$

podem ser multiplicadas como os polinômios. Para concretizar, temos o seguinte teorema: o produto destas duas séries, na parte comum dos seus intervalos de convergência, é representado pela série de potências, convergente, $\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu x^\nu$, em que os coeficientes c_ν valem, respectivamente,

$$\begin{aligned} c_0 &= a_0 b_0, \\ c_1 &= a_0 b_1 + a_1 b_0, \\ c_2 &= a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_n &= a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

(Demonstração no apêndice, § 1, pág. 416.)

4. Teorema da unicidade das séries de potências.

O fato seguinte é muito importante na teoria das séries de potências: se duas séries de potências $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$ e $\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu x^\nu$ forem, ambas, convergentes num intervalo que contenha o ponto $x = 0$, e se as duas séries representarem a mesma função $f(x)$ neste intervalo, elas serão idênticas, ou seja, a equação $a_n = b_n$ se verifica para qualquer valor de n. Em outras palavras:

Uma função f(x) *pode ser representada por uma série de potências em* x, *ùnicamente de uma forma.*

Mais simplesmente, a representação de uma função por uma série de potências é *única*.

Para demonstrá-lo, basta notar que a diferença entre as duas séries, ou seja, a série de potências $\phi(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu x^\nu$ com os coeficientes $c_\nu = a_\nu - b_\nu$ representa a função

$$\phi(x) = f(x) - f(x) = 0$$

no intervalo considerado, ou seja, esta última série converge para o limite 0 em qualquer posição do intervalo. Para $x = 0$, em particular, a soma da série deverá ser 0; isto é, $c_0 = 0$, de sorte que $a_0 = b_0$. Derivando a série, no interior do intervalo, virá $\phi'(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu c_\nu x^{\nu-1}$. Mas, $\phi'(x)$ é, também, nula, no intervalo, portanto, para o caso particular em que $x = 0$, teremos $c_1 = 0$ ou $a_1 = b_1$. Prosseguindo com êste processo, isto é, derivando e fazendo, em seguida, $x = 0$, acharemos sucessivamente que todos os coeficientes c_ν são iguais a zero, o que demonstra o teorema.

Podemos, além disso, tirar a seguinte conclusão da discussão que acabamos de fazer: se tomarmos a derivada de ordem ν da série $f(x) = \sum a_\nu x^\nu$ e se fizermos $x = 0$, teremos imediatamente

$$a_\nu = \frac{1}{\nu!} f^{(\nu)}(0),$$

ou seja:

Qualquer série de potências que convergir para pontos diferentes de $x = 0$, *é a série de Taylor da função representada.*

A unicidade do desenvolvimento é expressa, neste caso, pela determinação dos coeficientes, que é feita de forma única, pela própria função.

6. Desenvolvimento de certas funções em séries de potências. Método dos coeficientes indeterminados. Exemplos.

Cada série de potência representa, no interior do intervalo, uma função contínua, com derivadas contínuas de tôdas as ordens. Estudaremos, agora, o problema inverso, isto é, o desenvolvimento das funções dadas, em séries de potências. Teòricamente, sempre será possível fazê-lo, pelo teorema de Taylor; na prática, porém, muitas vêzes surgem dificuldades no cálculo efetivo da derivada de ordem n e na avaliação do resto. Quase sempre, entretanto, é possível atingir o objetivo visado, com mais facilidade, empregando-se o seguinte artifício. Primeiramente, escreveremos a relação $f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu x^\nu$, em que todos os coeficientes c_ν são desconhecidos, de início. Depois, por alguma propriedade conhecida da função $f(x)$ determinam-se os coeficientes, comprovando-se a convergência da série. Esta representa uma função, restando, apenas, demonstrar que tal função é idêntica a $f(x)$. Devido à

unicidade do desenvolvimento em série de potências, sabemos que nenhuma outra, a não ser a série determinada, poderá ter o desenvolvimento procurado. Vejamos, agora, alguns exemplos dêste método. Efetivamente, já deduzimos as séries para arc tg x e log $(1 + x)$ por um método que faz parte da ordem de idéias apresentadas no presente capítulo, visto as têrmos obtido integrando, simplesmente, as séries das derivadas destas funções, que sabemos serem séries geométricas, têrmo por têrmo.

1. Função exponencial.

O problema consiste em determinar uma função $f(x)$ para a qual $f'(x) = f(x)$ e $f(0) = 1$. Se escrevermos a série com os coeficientes indeterminados

$$f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots,$$

e a derivarmos, obteremos

$$f'(x) = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + \ldots.$$

Como, por hipótese, estas duas séries de potências devem ser idênticas, teremos a equação

$$nc_n = c_{n-1},$$

verdadeira para qualquer valor de $n \geqq 1$. Se observarmos que, devido à relação $f(0) = 1$, o coeficiente c_0 deve valer 1, poderemos calcular todos os coeficientes sucessivamente, obtendo, então, a série de potências

$$f(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots.$$

Como vemos fàcilmente, pelo critério da relação, esta série converge para qualquer valor de x, representando, pois, uma função para a qual se verificam efetivamente as relações $f'(x) = f(x)$ e $f(0) = 1$. (Evitamos, intencionalmente, empregar o que já aprendemos sôbre o desenvolvimento da função exponencial.)

A função e^x possui, certamente, estas propriedades; deduzimos prontamente, pois, que a função $f(x)$ é idêntica a e^x. Formando-se o quociente $\phi(x) = f(x)/e^x$, e derivando, virá:

$$\phi'(x) = \frac{e^x f'(x) - e^x f(x)}{e^{2x}} = 0.$$

A função $\phi(x)$ é, portanto, uma constante, e já que tem o valor 1 para $x = 0$, deve ser idênticamente igual a 1, ficando assim demonstrado que a nossa série de potências e a função exponencial são idênticas (discussão análoga, pág. 178).

2. Série binômia.

Podemos, agora, retornar à série binômia (cap. VI, § 3, pág. 329), empregando, desta vez, o método dos coeficientes indeterminados. Queremos desenvolver a função $f(x) = (1 + x)^\alpha$ em série de potências. Escreveremos, pois,

$$f(x) = (1 + x)^\alpha = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots,$$

onde c^ν representa os coeficientes a determinar. Notamos que a função dada deve, òbviamente, satisfazer à relação

$$(1 + x) f'(x) = \alpha f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha c_\nu x^\nu.$$

Por outro lado, derivando-se a série de $f(x)$, têrmo por têrmo, e multiplicando por $(1 + x)$, obteremos

$$(1 + x) f'(x) = c_1 + (2c_2 + c_1)x + (3c_3 + 2c_2)x^2 + \ldots;$$

visto como as duas séries de potências devem ser idênticas,

$$\alpha c_0 = c_1, \quad \alpha c_1 = 2c_2 + c_1, \quad \alpha c_2 = 3c_3 + 2c_2, \quad \ldots .$$

É certo que $c_0 = 1$, desde que a série deve ter o valor 1 para $x = 0$ e determinaremos, sucessivamente, as expressões

$$c_1 = \alpha, \quad c_2 = \frac{(\alpha - 1)\alpha}{2}, \quad c_3 = \frac{(\alpha - 2)(\alpha - 1)\alpha}{2 \cdot 3}, \quad \ldots,$$

para os coeficientes, e, em geral, como se pode estabelecer com facilidade,

$$c_\nu = \frac{(\alpha - \nu + 1)(\alpha - \nu + 2) \ldots (\alpha - 1)\alpha}{\nu(\nu - 1) \ldots 2 . 1} = \binom{\alpha}{\nu}.$$

Substituindo tais valores, teremos a série $\sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\alpha}{\nu} x^\nu$. Devemos, ainda, investigar a sua convergência, e mostrar que ela representa, efetivamente, $(1 + x)^\alpha$. Pelo critério da relação verificamos que quando α não fôr inteiro positivo, a série será convergente se $|x| < 1$ e divergente se $|x| > 1$, visto a relação entre os têrmos de ordem $(n + 1)$ e n ser $\dfrac{\alpha - n + 1}{n} x$, cujo valor absoluto tende para $|x|$ quando n cresce além de qualquer limite [1]. Logo, se $|x| < 1$, a série representará a função $f(x)$ que satisfaz a condição $(1 + x) f'(x) = \alpha f(x)$, como se deduz do modo de for-

[1] Estabeleceremos, sem demonstração, as condições exatas sob as quais esta série convergirá. Se o expoente α fôr um inteiro $\geqq 0$, a série terminará, sendo portanto válida para qualquer valor de x (transformando-se no teorema ordinário do binômio). Para qualquer outro valor de α a série apresentará convergência absoluta para $|x| < 1$, e divergência para $|x| > 1$. Para $x = +1$ a série será absolutamente convergente, se $\alpha > 0$, condicionalmente convergente, se $-1 < \alpha < 0$, e divergente, quando $\alpha \leqq -1$. Finalmente, quando $\alpha > 0$, a série terá convergência absoluta no ponto $x = -1$, e divergência, se $\alpha < 0$.

mação dos coeficientes. Além disso, $f(0) = 1$. Estas duas condições, porém, asseguram a identidade entre $f(x)$ e $(1 + x)^\alpha$, pois, fazendo

$$\phi(x) = f(x)/(1 + x)^\alpha$$

achamos que

$$\phi'(x) = \frac{(1 + x)^\alpha f'(x) - \alpha(1 + x)^{\alpha-1} f(x)}{(1 + x)^{2\alpha}} = 0;$$

$\phi(x)$ é, portanto, uma constante e, de fato, é sempre igual a 1, visto que $\phi(0) = 1$. Provamos, assim, que quando $|x| < 1$,

$$(1 + x)^\alpha = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\alpha}{\nu} x^\nu,$$

a qual representa a série binômia.

Citaremos, em continuação, os seguintes casos especiais da série binômia: a
L.-15 série geométrica

$$\frac{1}{1 + x} = (1 + x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - + \ldots$$
$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu x^\nu;$$

a série

$$\frac{1}{(1 + x)^2} = (1 + x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + - \ldots$$
$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu (\nu + 1) x^\nu,$$

que pode, também, ser deduzida da série geométrica por derivação; a série:

$$\sqrt{1 + x} = (1 + x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2} x - \frac{1}{2.4} x^2 + \frac{1.3}{2.4.6} x^3$$
$$- \frac{1.3.5}{2.4.6.8} x^4 + - \ldots,$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 + x}} = (1 + x)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2} x + \frac{1.3}{2.4} x^2 - \frac{1.3.5}{2.4.6} x^3$$
$$+ \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} x^4 - + \ldots,$$

da qual se empregam os primeiros dois ou três têrmos como aproximações correntes.

3. Série de arc sen x.

Esta série é obtida fàcilmente, desenvolvendo-se a expressão $1/\sqrt{1 - t^2}$, de acôrdo com as séries binômias,

$$(1 - t_2)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2} t^2 + \frac{1.3}{2.4} t^4 + \ldots.$$

Esta série convergirá se $|t| < 1$, convergindo uniformemente quando $|t| \leqq q < 1$. Integrando-a têrmo por têrmo, entre 0 e x, teremos:

$$\text{arc sen } x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + \ldots;$$

vemos, então, pelo critério da relação, que ela convergirá se $|x| < 1$, e divergirá se $|x| > 1$.

A dedução da série acima, partindo do teorema de Taylor, seria, decididamente, menos conveniente, em face das dificuldades que surgiriam quando se tivesse que calcular o resto.

4. Série de Arc Sh $x = \log (x + \sqrt{1 + x^2})$.

O desenvolvimento desta função é obtido por um método semelhante ao que acabamos de empregar. Usando o teorema do binômio, podemos escrever a série para a derivada de Arc Sh x,

$$\frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 - \frac{1.3.5}{2.4.6}x^6 + - \ldots,$$

integrando-a, depois, têrmo por têrmo. Obtemos, então, o desenvolvimento

$$\text{Arc Sh } x = x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} - + \ldots,$$

cujo intervalo de convergência é $-1 \leqq x \leqq 1$.

5. Exemplo de multiplicação de séries.

O desenvolvimento da expressão

$$\frac{\log (1 + x)}{1 + x}$$

é um exemplo simples da aplicação da regra relativa à multiplicação das séries de potências. Basta, apenas, multiplicar a série logarítmica

$$\log (1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + - \ldots$$

pela série geométrica

$$\frac{1}{1 + x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - + \ldots;$$

como o leitor poderá verificar por si mesmo, para se ter a série notável

$$\frac{\log (1 + x)}{1 + x} = x - \left(1 + \frac{1}{2}\right)x^2 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)x^3 - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)x^4 + - \ldots$$

para $|x| < 1$.

6. Exemplo da integração têrmo por têrmo (integral elíptica).

Já encontramos, em aplicações anteriores, a integral elíptica

$$K = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} \qquad (k^2 < 1)$$

(período de oscilação do pêndulo, pág. 302). Para calcularmos esta integral poderemos, em primeiro lugar, desenvolver o integrando pelo teorema do binômio, vindo então,

$$\frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} = 1 + \frac{1}{2} k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi + \frac{1.3}{2.4} k^4 \operatorname{sen}^4 \varphi$$
$$+ \frac{1.3.5}{2.4.6} k^6 \operatorname{sen}^6 \varphi + \ldots .$$

Como $k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi$ jamais é maior do que k^2, a série converge uniformemente para todos os valores de φ, podendo ser integrada têrmo por têrmo:

$$K = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} = \int_0^{\pi/2} d\varphi + \frac{1}{2} k^2 \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 \varphi \, d\varphi$$
$$+ \frac{1.3}{2.4} k^4 \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^4 \varphi \, d\varphi + \ldots .$$

As integrais que aparecem no desenvolvimento já foram calculadas (Cap. IV, § 4, pág. 223). Substituindo-se os seus valores, virá

$$K = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} = \frac{\pi}{2} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 k^4 \right.$$
$$\left. + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 k^6 + \ldots \right].$$

Para outros exemplos sôbre a teoria das séries, remetemos o leitor ao apêndice dêste capítulo (pág. 415).

EXEMPLOS

Determinar os intervalos de convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, sendo a_n dado pelas fórmulas dos exemplos 1 a 20.

1. $\frac{1}{n}$.
2. n.
3. $\frac{1}{\sqrt{n}}$.
4. $\sqrt{n}$.
5. $\frac{1}{n^2}$.
6. $\frac{n}{n!}$.
7. $\frac{1}{a + n}$.
8. $\frac{1}{an + b}$.
9. $\frac{1}{\log(n + 1)}$.
10. $\frac{1}{\log \log 10n}$.
11. $\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$.
12. a^n.
13. $a^{\sqrt{n}}$.
14. $a^{\log n}$.
15. $(\sqrt[n]{n} - 1)^n$.
16. $\frac{(n!)^2}{(2n)!}$.
17. $\frac{n + \sqrt{n}}{n^2 - n}$.
18. $\frac{1}{1 + a^n}$.
19. $\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^n}{n}$.
20. $\frac{1}{n^{1+1/n}}$.

Desenvolver as funções dos exemplos 21-26 em séries de potências:

21. a^x.

22. $\dfrac{x + \log(1 - x)}{x^2}$.

23. $\operatorname{sen}^2 x$.

24. $\cos^2 x$.

25. $\operatorname{sen}^6 x$.

26. $\operatorname{arc\,sen} x^3$.

27. Empregando a série binômia, calcular $\sqrt{2}$ com quatro casas decimais.

28. Calcular, aproximadamente, as integrais seguintes, por meio de séries, desenvolvendo o integrando em séries de potências e integrando, depois:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$.

(b) $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^4}}$.

(c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log(1 + x)}{x}\,dx$.

(d) $\displaystyle\int_5^{10} \frac{dx}{\sqrt{1 + x^4}}$.

29. Desenvolver as seguintes funções, até os têrmos em x^4, empregando a multiplicação das séries de potências:

(a) $e^x \operatorname{sen} x$.

(b) $[\log(1 + x)]^2$.

(c) $\dfrac{\operatorname{arc\,sen} x}{\sqrt{1 - x}}$.

(d) $\operatorname{sen}^2 x$.

30.* Demonstrar, pela multiplicação das séries de potências, que

(a) $e^x e^y = e^{x+y}$.

(b) $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$.

31. Qual será o intervalo de convergência de $\Sigma(a_n + b_n)x^n$, se o de $\Sigma a_n x^n$ fôr $|x| < \rho$, e o de $\Sigma b_n x^n$ fôr $|x| < \rho'$, sendo $\rho' < \rho$?

32. Com o método dos coeficientes indeterminados, estabelecer uma função $f(x)$ que satisfaça às seguintes condições:

$$(a)\ f(0) = 3; \quad (b)\ f'(x) = f(x) + x.$$

7. Séries de potências com têrmos complexos

1. Introdução dos têrmos complexos nas séries de potências.

Certas funções, aparentemente independentes, possuem notáveis semelhanças nos seus desenvolvimentos em séries de potências, e esta analogia levou Euler a estabelecer relações puramente formais entre elas, atribuindo valores complexos, ou, particularizando, valores imaginários puros, à variável x. Estudaremos êste assunto, primeiramente, de uma maneira formal, sem nos embaraçarmos com questões de rigorismo, investigando, depois, os resultados do processo.

A primeira relação notável desta espécie será obtida pela substitui-

ção de x na série e^x pela quantidade imaginária $i\phi$, onde ϕ é um número real. Se recordarmos a equação fundamental da unidade imaginária i, isto é, $i^2 = -i$, da qual se deduz que $i^3 = -i$, $i^4 = i$, $i^5 = i$, ..., teremos, separando os têrmos reais e os imaginários da série,

$$e^{i\phi} = (1 - \frac{\phi^2}{2!} + \frac{\phi^4}{4!} - \frac{\phi^6}{6!} + - \dots)$$
$$+ i(\phi - \frac{\phi^3}{3!} + \frac{\phi^5}{5!} - \frac{\phi^7}{7!} + - \dots),$$

ou, sob outra forma,

$$e^{i\phi} = \cos\phi + i \operatorname{sen}\phi.$$

Esta é a conhecida e importante fórmula de Euler", embora ainda sob aspecto puramente formal. Ela é compatível com o teorema de De Moivre (pág. 74), que é expresso pela equação

$$(\cos\phi + i \operatorname{sen}\phi)(\cos\psi + i \operatorname{sen}\psi) = \cos(\phi + \psi) + i \operatorname{sen}(\phi + \psi).$$

Em virtude da fórmula de Euler, esta relação estabelece, apenas, que a expressão

$$e^x . e^y = e^{x+y}$$

continua tendo lugar para os valores imaginários, $x = i\phi$, $y = i\psi$.

Substituindo-se a variável x, na série de potências de $\cos x$, pela quantidade imaginária pura ix, obteremos, imediatamente, uma série para $\operatorname{Ch} x$. Esta relação pode ser traduzida pela equação

$$\operatorname{Ch} x = \cos ix.$$

Da mesma forma, teremos

$$\operatorname{Sh} x = \frac{1}{i} \operatorname{sen} ix.$$

Em vista da fórmula de Euler também dar $e^{-i\phi} = \cos\phi - i \operatorname{sen}\phi$, chegamos às expressões exponenciais para as funções trigonométricas,

$$\operatorname{sen} x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}.$$

As relações $\operatorname{Ch} x = \cos ix$ e $\operatorname{Sh} x = \frac{1}{i} \operatorname{sen} ix$ permitem transformar as expressões acima nas relativas às funções hiperbólicas, sendo, de resto, inteiramente semelhantes às expressões exponenciais correspondentes.

Expressões análogas podem, como é claro, ser obtidas para $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{Th} x$, $\operatorname{cotg} x$ e $\operatorname{Coth} x$, as quais são ligadas pelas equações $\operatorname{Th} x = \frac{1}{i} \operatorname{tg} ix$ e $\operatorname{Coth} x = i \operatorname{cotg} ix$.

Finalmente, podem ser estabelecidas relações semelhantes para as funções inversas, tanto trigonométricas como hiperbólicas. Por exemplo, de

$$y = \operatorname{tg} x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{i(e^{ix} + e^{-ix})} = \frac{e^{2ix} - 1}{i(e^{2ix} + 1)}$$

deduzimos logo que

$$e^{2ix} = \frac{1 + iy}{1 - iy}.$$

Tomando-se os logaritmos de ambos os membros e escrevendo-se x em lugar de y, e $\operatorname{arc} \operatorname{tg} x$ em vez de x, obteremos a equação

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} x = \frac{1}{2i} \log \frac{1 + ix}{1 - ix},$$

que exprime uma ligação notável entre a função inversa da tangente e o logaritmo. Se substituirmos x por ix na série de potências $\frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x}$, já estudada (pág. 318), teremos a série de potências para o $\operatorname{arc} \operatorname{tg} x$:

$$\begin{aligned} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + \frac{1}{i} \left(ix + \frac{(ix)^3}{3} + \frac{(ix)^5}{5} + \ldots\right) \\ = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - + \ldots . \end{aligned}$$

As relações acima são ainda de caráter puramente formal, reclamando, naturalmente, um enunciado mais preciso, de acôrdo com o que elas pretendem exprimir. Na próxima subseção indicaremos como pode ser atingido êste desiderato, com o auxílio da teoria das funções.

Para emprêgo posterior, entretanto, necessitaremos ùnicamente da fórmula de Euler $e^{i\phi} = \cos \phi + i \operatorname{sen} \phi$ e, sendo assim, evitaremos uma análise completa. Bastará, apenas, considerarmos o símbolo $e^{i\phi}$ como uma *abreviação formal* do segundo membro $\cos \phi + i \operatorname{sen} \phi$, aparecendo, então, a fórmula de De Moivre, $e^{i\phi} . e^{i\psi} = e^{i(\phi + \psi)}$, como simples *conseqüência dos teoremas elementares da adição, da trigonometria.* Partindo

dêste ponto de vista, a fim de fazer com que a relação $e^x.e^y = e^{x+y}$ se verifique para quaisquer argumentos complexos, estabeleceremos ainda a definição

$$e^x = e^\xi(\cos\eta + i \operatorname{sen}\eta),$$

em que $x = \xi + i\eta$ (ξ, η sendo reais).

2. Resumo da teoria geral das funções com variáveis complexas.

Muito embora o ponto de vista que seguimos nas deduções anteriores seja livre de objeções, será conveniente procurarmos nestas fórmulas algo mais do que as simples relações formais indicadas. Seguindo êste objetivo, seremos levados à teoria geral das funções, como (para abreviar), designaremos a teoria das chamadas funções analíticas com variáveis complexas. Como ponto de partida dêste estudo, adotaremos a discussão geral da teoria das séries de potências, com variáveis e coeficientes complexos. A construção de tal teoria não apresenta dificuldades, desde que estabeleçamos o conceito de limite, no domínio dos números complexos, pois ela acompanha a teoria das séries de potências, quase exatamente. Entretanto, como não utilizaremos êstes resultados no presente curso, limitar-nos-emos a enunciar certos fatos, omitindo as demonstrações. Pode ser provado que o teorema do § 5, n.º 1 (pág. 400), admite a seguinte generalização, verificando-se para as séries de potências complexas:

Se uma série de potências convergir para qualquer quantidade complexa, arbitrária, $x = \xi$, *ela será absolutamente convergente para cada valor de* x *para o qual* $|x| < |\xi|$. *Se ela fôr divergente para* $x = \xi$, *divergirá, igualmente, para todos os valores de* x *para os quais* $|x| > |\xi|$. *Uma série de potências que não convirja em todos os pontos do intervalo, porém, que o faça para algum outro ponto, além de* $x = 0$, *possui um círculo de convergência, isto é, existe um número* $\rho = 0$ *tal, que a série terá convergência absoluta para* $|x| < \rho$, *divergindo, quando* $|x| > \rho$.

Uma vez estabelecido o conceito das funções com variáveis complexas, representadas por séries de potências, e conhecidas as regras para operar com tais funções, podemos imaginar as funções e^x, $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\operatorname{arc\,tg} x$, etc., da *variável complexa* x, como *definidas*, simplesmente, pelas séries de potências que as representam para os valores reais de x. As relações que deduzimos anteriormente reduzem-se, então, a simples trivialidades.

Indicaremos, apenas, por meio de dois exemplos, como esta introdução às variáveis complexas pode auxiliar-nos a compreender melhor as funções elementares. A série geométrica $1/(1 + x^2)$ deixa de ser convergente quando x deixa o intervalo $-1 \leqq x \leqq 1$, o mesmo fazendo a série arc tg x, embora não haja particularidades no comportamento destas funções nos pontos extremos do intervalo de convergência. De fato, tanto as funções quanto tôdas as suas derivadas, são contínuas para qualquer valor real de x. Por outro lado, compreendemos fàcilmente que as séries $1/(1 - x^2)$ e $\log(1 - x)$ cessem de convergir quando x atingir o valor 1, pois elas se tornam infinitas nesta posição. A divergência das séries da função inversa da tangente e de $\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu x^{2\nu}$, para $|x| > 1$, fica clara, imediatamente, se admitirmos, também, valores complexos de x. Acharemos, então, que quando $x = i$, as funções-soma tornam-se infinitas, não podendo, portanto, ser representadas por séries convergentes. Logo, pelo teorema relativo ao círculo de convergência, as séries divergirão para todos os valores de x, tais que $|x| > |i|$. Particularizando, a série divergirá fora do intervalo $-1 \leqq x \leqq 1$, para os valores reais de x.

Outro exemplo é fornecido pela função $f(x) = e^{-1/x^2}$, para $x \neq 0$, $f(0) = 0$ (págs. 196, 336), que, a despeito do seu comportamento aparentemente regular, não pode ser desenvolvida segundo a série de Taylor. Realmente, esta função deixa de ser contínua quando atribuirmos a x valores puramente imaginários $x + i\xi$. Ela assume, então, a forma e^{1/ξ^2} e cresce além de qualquer limite, à medida que $\xi \to 0$. É, pois, claro que nenhuma série de potências de x poderá representar tal função para todos os valores complexos de x na vizinhança da origem, por menor que seja esta vizinhança.

As observações acima, sôbre a teoria das funções e séries de potências com *variáveis complexas*, bastam-nos por enquanto.

APÊNDICE AO CAPÍTULO VIII

1. Multiplicação e divisão de séries

1. Multiplicação de séries absolutamente convergentes.

Sejam
$$A = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu, \quad B = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu$$

duas séries dotadas de convergência absoluta. Juntamente com elas, consideremos as séries correspondentes, dos valores absolutos

$$\overline{A} = \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu| \quad \text{e} \quad \overline{B} = \sum_{\nu=0}^{\infty} |b_\nu|.$$

Teremos, ainda,

$$A_n = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu, \quad B_n = \sum_{\nu=0}^{n} b_n, \quad \overline{A}_n = \sum_{\nu=0}^{n} |a_\nu|, \quad \overline{B}_n = \sum_{\nu=0}^{n} |b_\nu|$$

e
$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0.$$

Afirmamos, então, que a série $\sum_{\nu=0}^{\infty} c_n$ é absolutamente convergente, e que sua soma é igual a AB.

Para prová-lo, escreveremos a série

$$\begin{aligned} &a_0b_0 + a_1b_0 + a_1b_1 + a_0b_1 + a_2b_0 + a_2b_1 \\ &+ a_2b_2 + a_1b_2 + a_0b_2 + \ldots + a_nb_0 + a_nb_1 \\ &+ \ldots + a_nb_n + \ldots + a_1b_n + a_0b_n + \ldots, \end{aligned}$$

cuja soma parcial de ordem n^2 é A_nB_n, asseverando que ela possui convergência absoluta. As somas parciais das séries correspondentes de valores absolutos crescem monòtonamente; a soma parcial de ordem n^2 é igual a $\overline{A}_n\overline{B}_n$, menor do que $\overline{A}\overline{B}$ (e que tende para $\overline{A}\overline{B}$). Assim, pois, a série dos valores absolutos é convergente, ao passo que a que escrevemos em seguida possui convergência absoluta. A soma da série será, naturalmente, AB, enquanto sua soma de ordem n^2 valerá A_nB_n, a qual tende para AB, à medida que $n \to \infty$. Permutaremos, agora, a ordem dos têrmos, o que é permitido fazer-se nas séries de convergência absoluta, reunindo os têrmos sucessivos entre parênteses. Nas séries

convergentes é possível separar-se os têrmos sucessivos, reunindo-os em tantos parênteses quantos desejarmos, sem perturbação da convergência nem da soma da série, porque, se reunirmos entre parênteses, digamos, todos os têrmos $(a_{n+1}, + a_{n+2} + \ldots + a_m)$, ao formarmos as somas parciais omitiremos as somas que originàriamente caiam entre s_n e s_m, o que não afeta a convergência, nem altera o valor do limite. Do mesmo modo, se a série fôr de convergência absoluta, antes da introdução dos parênteses, continuará a sê-lo, depois. Em vista da série

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu = (a_0b_0) + (a_0b_1 + a_1b_0) + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0) + \ldots$$

ter sido formada dêste modo, a partir da série inicial, está demonstrada a afirmação que fizemos.

2. Multiplicação e divisão de séries de potências.

O principal emprêgo do teorema demonstrado é na teoria das séries de potências. A asserção seguinte é a conseqüência imediata dêle: o produto de duas séries de potências

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu \quad \text{e} \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu x^\nu$$

no intervalo de convergência comum às duas séries, é representado por uma terceira série de potências $\sum_{\nu=0}^{\infty} x_\nu c^\nu$, cujos coeficientes são

$$c_\nu = a_0b_\nu + a_1b_{\nu-1} + \ldots + a_\nu b_0.$$

Na divisão das séries de potências podemos, de modo semelhante, representar o quociente pela série $\sum_{\nu=0}^{\infty} q_\nu x^\nu$, desde que b_0, o têrmo constante do denominador, não se anule. (Se tal se desse, a representação proposta seria impossível, visto a série não poder convergir para $x = 0$, em face da anulação do denominador. Por outro lado, porém, tôda a série de potências deve convergir em $x = 0$.) Os coeficientes da série de potências

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} q_\nu x^\nu$$

podem ser determinados, lembrando-nos que $\sum_{\nu=0}^{\infty} q_\nu x^\nu . \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu x^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$, de sorte que as seguintes equações devem verificar-se:

$$\begin{aligned} a_0 &= q_0 b_0, \\ a_1 &= q_0 b_1 + q_1 b_0, \\ a_2 &= q_0 b_2 + q_1 b_1 + q_2 b_0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_\nu &= q_0 b_\nu + q_1 b_{\nu-1} + \ldots + q_\nu b_0. \end{aligned}$$

A primeira destas equações dá imediatamente o valor de q_0, determinando-se q_1 da segunda, q_2 da terceira (usando-se os valores de q_0 e q_1), etc. Para que a representação do quociente de duas séries de potências por outra série de potências fôsse rigorosamente justificada, deveríamos, ainda, investigar a convergência de $\sum_{\nu=0}^{\infty} q_\nu x^\nu$. Entretanto, como não teremos oportunidade de empregar êstes resultados, poremos de lado esta generalização, contentando-nos em sabermos que a série representativa do quociente converge, efetivamente, desde que x permaneça num intervalo suficientemente pequeno, no qual tanto o numerador como o denominador sejam séries convergentes, e onde o denominador não se anule.

2. Séries infinitas e integrais impróprias

As séries infinitas e os conceitos desenvolvidos sôbre as mesmas têm aplicação e simples analogias na teoria das integrais impróprias (cap. IV, § 8, pág. 249). Limitaremos nosso estudo ao caso das integrais convergentes, num intervalo infinito de integração, digamos, uma integral da forma $\int_0^\infty f(x)\,dx$. Se dividirmos o intervalo de integração pela seqüência de números $x_0 = 0, x_1, \ldots$ tendendo monòtonamente para $+\infty$, podemos escrever a integral imprópria sob a forma

$$\int_0^\infty f(x)\,dx = a_1 + a_2 + \ldots,$$

em que, cada um dos têrmos da série infinita é uma integral;

$$a_1 = \int_0^{x_1} f(x)\,dx, \quad a_2 = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx, \ \ldots,$$

e, assim, sucessivamente, não importando a maneira como escolhemos os pontos x_ν. Podemos, portanto, reduzir a idéia da integral imprópria, convergente, à das séries infinitas, de muitas maneiras.

É especialmente vantajoso escolher-se os pontos x_ν de tal forma que o integrando não mude de sinal no interior de qualquer subintervalo individual. A série $\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu|$ corresponderá, então, à integral do valor absoluto da função,

$$\int_0^\infty |f(x)|\,dx.$$

Somos, assim, conduzidos naturalmente ao seguinte conceito: *uma integral imprópria* $\int_0^\infty \mathrm{f(x)\,dx}$ *diz-se absolutamente convergente, quando existir a integral* $\int_0^\infty |\mathrm{f(x)}|\,\mathrm{dx}$. De outra maneira, isto é, se a integral existir de qualquer forma, diremos que ela é *condicionalmente convergente.*

Algumas das integrais estudadas anteriormente (págs. 250, 251), tais como

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx, \quad \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx, \quad \Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\,dt,$$

possuem convergência absoluta. Por outro lado, a integral

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \lim_{A\to\infty} \int_0^A \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx,$$

estudada na pág. 251 é um exemplo simples de integral condicionalmente convergente. Para demonstrarmos a convergência desta integral, de modo diferente da demonstração anterior, subdividiremos o intervalo de 0 a A pelos pontos $x^\nu = \nu\pi$ ($\nu = 0, 1, 2, \ldots, \mu_A$), em que μ_A é o maior inteiro possível para o qual $\mu_A\pi \leqq A$. Dividimos, assim, a integral em têrmos de forma $a^\nu = \int_{(\nu-1)\pi}^{\nu\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$ ($\nu = 1, 2, \ldots$), com um resto R_A da forma

$$\int_{\mu_A\pi}^{A} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx \quad (0 \leqq A - \mu_A\pi < \pi).$$

É claro que as quantidades a_ν terão sinais alternados, visto que sen x é alternadamente positivo e negativo, nos intervalos consecutivos. Além disso, $|a_{\nu+1}| < |a_\nu|$ Aplicando, portanto, a transformação $x = \xi - \pi$, teremos

$$|a_\nu| = \int_{(\nu-1)\pi}^{\nu\pi} \frac{|\operatorname{sen} x|}{x}\,dx = \int_{\nu\pi}^{(\nu+1)\pi} \frac{|\operatorname{sen}(\xi-\pi)|}{\xi-\pi}\,d\xi = \int_{\nu\pi}^{(\nu+1)\pi} \frac{|\operatorname{sen}\xi|}{\xi-\pi}\,d\xi,$$

$$> \int_{\nu\pi}^{(\nu+1)\pi} \frac{|\operatorname{sen}\xi|}{\xi}\,d\xi = |a_{\nu+1}|.$$

Logo, pelo critério de Leibnitz, vemos que Σa_ν é convergente. De mais a mais, o resto R_A tem o valor absoluto

$$|R_A| = \left|\int_{\mu_A\pi}^{A} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx\right| \leqq \int_{\mu_A\pi}^{(\mu_A+1)\pi} \frac{|\operatorname{sen} x|}{x}\,dx$$

$$\leqq \frac{1}{\mu_A\pi}\int_{\mu_A\pi}^{(\mu_A+1)\pi} |\operatorname{sen} x|\,dx = \frac{2}{\mu_A\pi},$$

que tende para 0, à medida que A cresce. Se deixarmos, pois, A tender para ∞ na equação

$$\int_0^A \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{\mu_A} + R_A,$$

o segundo membro tenderá para Σa_ν como limite, o que demonstra a convergência da integral. A convergência, porém, não é absoluta, pois

$$|a_\nu| > \int_{(\nu-1)\pi}^{\nu\pi} \frac{|\operatorname{sen} x|}{\nu\pi}\,dx = \frac{2}{\nu\pi}, \text{ de sorte que } \Sigma|a_\nu| \text{ é divergente.}$$

3. Produtos infinitos

Na introdução dêste capítulo (pág. 366), frisamos que as séries infinitas são apenas *um dos modos*, conquanto particularmente importante, de que dispomos para representar números ou funções, por processos infinitos. Como exemplo de *outro* dêstes modos, apresentaremos os produtos infinitos, sem entrarmos em detalhes nem demonstrações.

Na página 223 encontramos o produto de Wallis,

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots$$

pelo qual o número $\pi/2$ é expresso por um "produto infinito". Calcularemos o produto infinito

$$\prod_{\nu=1}^{\infty} a_\nu = a_1 . a_2 . a_3 . a_4 \ldots$$

como o limite da seqüência de produtos parciais

$$a_1, \quad a_1 . a_2, \quad a_1 . a_2 . a_3, \quad a_1 . a_2 . a_3 . a_4, \quad \ldots,$$

desde que êles existam.

Os fatôres a_1, a_2, a_3, ..., como é lógico, podem, também, ser funções de uma variável x. Um exemplo, especialmente interessante, é o referente ao "produto infinito" da função sen x,

$$\operatorname{sen} \pi x = \pi x\left(1 - \frac{x^2}{1^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{3^2}\right)\ldots,$$

que deduziremos no § 4 do próximo capítulo (pág. 445).

O produto infinito da *função* "dzeta" desempenha papel importantíssimo na teoria dos números. Para conservarmos a notação usual na teoria dos números, designaremos a variável independente por s, definindo a função ζ, para $s > 1$, pela expressão

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Sabemos (§ 2, págs. 380 e seguintes) que a série do segundo membro será convergente, se $s > 1$. Sendo p uma quantidade qualquer maior do que 1, teremos a equação:

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} = 1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{p^{3s}} + \ldots$$

desenvolvendo-a segundo a série geométrica. Imaginando-se esta série escrita para todos os números primos p_1, p_2, p_3, ..., em ordem crescente, e tôdas as equações resultantes multiplicadas conjuntamente, obteremos no primeiro membro um produto da forma

$$\frac{1}{1 - p_1^{-s}} \cdot \frac{1}{1 - p_2^{-s}} \cdots .$$

Se, sem nos determos para justificar o processo, multiplicarmos conjuntamente as séries dos segundos membros das nossas equações, lembrando-nos, além disso, que por um teorema elementar, cada inteiro $n > 1$ pode ser representado por um produto de potências de diferentes números primos, de uma maneira, e sòmente de uma, acharemos que o produto do segundo membro é, ainda, a função $\zeta(s)$. Temos, assim, a notável "forma do produto"

$$\zeta(s) = \frac{1}{1 - p_1^{-s}} \cdot \frac{1}{1 - p_2^{-s}} \cdot \frac{1}{1 - p_3^{-s}} \cdots .$$

Esta "forma do produto", cuja dedução esboçamos ligeiramente, é, efetivamente, uma expressão da função "dzeta" como produto infinito, visto o número dos fatôres primos ser infinito.

Na teoria geral dos produtos infinitos, usualmente é excluído o caso em que o produto $a_1 a_2 \ldots a_n$ tem zero por limite. Logo, é particularmente importante que nenhum dos fatôres se anule. A fim de que o produto seja convergente, os fatôres a_n devem, naturalmente, tender

para 1, à medida que n crescer. Desde que podemos, se necessário, omitir um número finito de fatôres (o que não influi na convergência), podemos admitir que $a_n > 0$. O teorema seguinte se aplica a êste caso: uma condição necessária e suficiente para a convergência do produto $\prod_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$, em que $a_\nu > 0$, é que a série $\sum_{\nu=1}^{\infty} \log a_\nu$ seja convergente. É claro que as somas parciais desta série, $\sum_{\nu=1}^{n} \log a_\nu = \log (a_1 a_2 \ldots a_n)$, tenderão para um limite definido se, e sòmente no caso em que os produtos parciais $a_1 a_2 \ldots a_n$ tiverem um limite positivo.

No estudo da convergência usualmente se aplica o seguinte critério (*condição suficiente*), onde se faz $a_\nu = 1 + \alpha_\nu$. O produto

$$\prod_{\nu=1}^{\infty} (1 + \alpha_\nu)$$

será convergente se a série

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} | \alpha_\nu |$$

também o fôr, e se nenhum fator $(1 + \alpha_\nu)$ fôr nulo. Na demonstração admite-se, depois da omissão de um número finito de fatôres, se necessário, que cada $| \alpha_\nu | < \frac{1}{2}$. Teremos, assim, $1 - | \alpha_\nu | > \frac{1}{2}$. Pelo teorema do valor médio, $\log (1 + h) = \log (1 + h) - \log 1 = h \frac{1}{1 + \theta h}$ para $0 < \theta < 1$. Virá, então,

$$| \log (1 + \alpha_\nu) | = \left| \frac{\alpha_\nu}{1 + \theta \alpha_\nu} \right| \leqq \frac{| \alpha_\nu |}{1 - | \alpha_\nu |} \leqq 2 \, | \alpha_\nu |,$$

decorrendo, pois, a convergência da série $\sum_{\nu=1}^{\infty} \log (1 + \alpha_\nu)$, da convergência de $\sum_{\nu=1}^{\infty} | \alpha_\nu |$.

Do critério exposto deduz-se que o produto infinito que demos acima para sen πx converge para todos os valores de x, exceto para $x = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, onde os fatôres do produto são nulos. Além disso, para $p \geqq 2$ e $s > 1$, achamos prontamente que

$$\frac{1}{1 - p^{-s}} = 1 + \frac{1}{p^s - 1}, \quad 0 < \frac{1}{p^s - 1} < \frac{2}{p^s}.$$

Se p assumir, então, todos os valores primos, a série $\Sigma \frac{1}{p^s}$ será convergente, visto os seus têrmos serem sòmente uma parte da série convergente $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^s}$. A convergência do produto $\Pi \frac{1}{1-p^{-s}}$, para $s > 1$, fica, pois, demonstrada.

4. Séries implicando os números de Bernouilli

Até agora não apresentamos os desenvolvimentos em séries de potências de certas funções elementares, como, por exemplo, tg x. A razão é que os coeficientes numéricos que ocorrem não se revestem de forma bastante simples. Podemos representar tais coeficientes, assim como os referentes a numerosas outras funções, com o auxílio das chamados *números de Bernouilli*. Êles são números racionais, com lei de formação não muito simples, que ocorrem em muitas partes da análise. Podemos estabelecê-los de maneira simples, desenvolvendo a função

$$\frac{x}{e^x-1} = \frac{1}{1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\ldots}$$

em uma série de potências da forma

$$\frac{x}{e^x-1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{B_\nu}{\nu!} x^\nu.$$

Escrevendo esta equação da seguinte maneira

$$x = (e^x-1) \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{B_\nu}{\nu!} x^\nu$$

e substituindo-se a série de potências do segundo membro por $e^x - 1$, obteremos, como na página 417, uma relação recorrente, que permite a determinação de todos os números B_ν. Êstes são os números de Bernouilli [1]. São racionais, já que na sua formação foram empregadas sòmente operações racionais; anulam-se para todos os índices ímpares, diferentes de $\nu = 1$, como verificamos fàcilmente. Os primeiros são:

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_6 = \frac{1}{42},$$

$$B_8 = -\frac{1}{30}, \quad B_{10} = \frac{5}{66}, \ldots$$

[1] Em algumas obras é empregada notação levemente alterada, vindo, então, a fórmula básica sob o aspecto

$$\frac{x}{e^x-1} = 1 - \frac{1}{2}x + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu+1} \frac{B_\nu}{(2\nu)!} x^{2\nu}.$$

Faremos, apenas, uma breve sugestão, para mostrar como êstes números são incluídos nas séries de potências. Em primeiro lugar, empregando a transformação

$$1 + \frac{B_2}{2!}x^2 + \ldots = \frac{x}{e^x - 1} + \frac{x}{2} = \frac{x}{2}\cdot\frac{e^x + 1}{e^x - 1} = \frac{x}{2}\cdot\frac{e^{\frac{1}{2}x} + e^{-\frac{1}{2}x}}{e^{\frac{1}{2}x} - e^{\frac{1}{2}-x}}$$

teremos

$$\frac{x}{2}\operatorname{Coth}\frac{x}{2} = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{B_{2\nu}}{(2\nu)!}x^{2\nu}.$$

Substituindo-se x por $2x$, virá a série

$$x \operatorname{Coth} x = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{2^{2\nu}B_{2\nu}}{(2\nu)!}x^{2\nu},$$

para $|x| < \pi$, da qual, substituindo-se x por $-ix$, obteremos

$$x \operatorname{cotg} x = \sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}\frac{2^{2\nu}B_{2\nu}}{(2\nu)!}x^{2\nu}, \quad |x| < \pi.$$

A equação $2 \operatorname{cotg} 2x = \operatorname{cotg} x - \operatorname{tg} x$ fornece a série

$$\operatorname{tg} x = \sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu-1}\frac{2^{2\nu}(2^{2\nu}-1)}{(2\nu)!}B_{2\nu}x^{2\nu-1},$$

que se verifica para $|x| < \frac{\pi}{2}$.

Maiores detalhes sôbre êste assunto serão encontrados pelo leitor nos tratados especializados (1).

EXEMPLOS

1. Demonstrar que a série de potências para $\sqrt{1-x}$ ainda converge, quando $x = 1$.

2. Demonstrar que para qualquer valor positivo de ϵ existe um polinômio em x, que representa $\sqrt{1-x}$ no intervalo $0 \leqq x \leqq 1$, com êrro inferior a ϵ.

3. Provar que para qualquer valor positivo de ϵ existe um polinômio em t, que representa $|t|$ no intervalo $-1 \leqq t \leqq 1$, com êrro inferior a ϵ.

4.* *Teorema da aproximação de Weierstrass.* Demonstrar que se $f(x)$ fôr contínua em $a \leqq x \leqq b$, para qualquer valor positivo de ϵ existe um polinômio $P(x)$, tal que $|f(x) - P(x)| < \epsilon$, para todos os valores de x, no intervalo $a \leqq x \leqq b$.

5. Provar que o produto infinito que segue é convergente:

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1 + (\tfrac{1}{2})^{2n}); \qquad \prod_{n=2}^{\infty}\frac{n^3-1}{n^3+1}; \qquad \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^n}{n}\right), \text{ se } |z| < 1.$$

(1) Consulte-se, por exemplo, K. Knopp, *Theory and Applications of Infinite Series*, pág. 183 (Blackie & Son, Ltd.), 1928.

6. Demonstrar, pelos métodos do texto, que $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)$ é divergente.

7. Empregando a identidade

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\prod_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1-p_i^{-s}}\right) \qquad \text{(onde } p_i \text{ é o primo de ordem } i\text{),}$$

provar que o número de primos é infinito.

8. Demonstrar a identidade

$$\prod_{\nu=0}^{\infty}(1+x^{2^\nu})=\frac{1}{1-x}$$

para $|x|<1$.

Capítulo IX

SÉRIES DE FOURIER

Além das séries de potências, há outra classe de séries infinitas que desempenha papel particularmente importante, tanto na matemática pura quanto nas aplicações. São estas as séries de Fourier, cujos têrmos isolados são funções trigonométricas, representando suas somas funções periódicas.

1. Funções periódicas

1. Observações gerais.

As funções periódicas do tempo, isto é, funções cujo comportamento se repete em intervalos definidos de tempo, são encontradas em muitas aplicações. Na maior parte das máquinas verificam-se processos periódicos em combinação com a rotação do volante, por exemplo, a corrente alternada gerada por um dínamo. As funções periódicas são igualmente associadas a todos os fenômenos vibratórios.

Uma função periódica, com o período $2l$, é representada pela equação

$$f(x + 2l) = f(x),$$

verdadeira para qualquer valor de x. Frisamos, especialmente, que $2l$ é denominado *o período* [1]. É interessante notar que, além do período $2l$,

[1] Na representação das funções periódicas convém, muitas vêzes, que a variável independente x signifique um ponto da circunferência de um círculo, em lugar do ponto usual sôbre a reta. Se a função $f(x)$ tiver o período 2π, digamos, e se a equação

$$f(x + 2\pi) = f(x)$$

se verificar para todos os valores de x, chamando-se x o ângulo central de raio unitário, compreendido entre um raio inicial qualquer e o correspondente ao ponto variável da circunferência, a periodicidade da função $f(x)$ é expressa simplesmente pelo fato de que, a cada ponto da circunferência, corresponde sòmente um valor da função. No caso de uma máquina, por exemplo, a periodicidade pode ser expressa em função da posição de um ponto do volante.

a função $f(x)$ possui, necessàriamente, o período $4l$. desde que $f(x + 4l) = f(x + 2l) = f(x)$. Da mesma forma, a função terá períodos $6l, 8l, \ldots$, sendo também possível (embora não necessàriamente verdadeiro) que admita períodos menores, tais como l ou $l/5$. Gràficamente, em dois intervalos consecutivos quaisquer, de comprimento $2l$, a configuração da função será exatamente a mesma. Há uma segunda interpretação, que pode ser preferida pelo leitor, que considera a variável x como tempo (de acôrdo com o que, em certas ocasiões escreveremos t em lugar de x), representando, então, a função $f(x)$ o processo periódico ou, como também podemos dizer, uma *vibração* (ou *oscilação*). O período $2l = T$ é chamado, assim, o *período da vibração* (ou da *oscilação*).

Se uma função arbitrária, $f(x)$, *fôr dada num intervalo definido, digamos*, $-l \leqq x \leqq l$, *sempre será possível desenvolvê-la segundo uma função periódica*. Basta, apenas, definirmos $f(x)$, fora do intervalo, pela equação $f(x + 2nl) = f(x)$, onde n é um inteiro arbitrário, positivo ou negativo. Devemos assinalar que, se $f(x)$ fôr contínua no intervalo $-l \leqq x \leqq l$, porém, $f(-l) \neq f(+l)$, a função periódica desenvolvida será descontínua nos pontos $\pm l, \pm 3l, \ldots$ (figs. 7 e 8, págs. 441 e 442, nas quais $l = \pi$). Além disso, neste caso, o desenvolvimento não fornecerá a função unívoca $f(x)$ nos pontos $x = \pm l, \pm 3l, \ldots$, visto, por exemplo, termos definido $f(3l)$ como $f(l + 2l)$, o que dá $f(3l) = f(l)$, tendo também definido a mesma função como $f(-l + 4l)$, o que fornece $f(3l) = f(-l)$. Evitamos esta dificuldade desenvolvendo, não a função como foi definida, para $-l \leqq x \leqq l$, mas sim para $-l < x \leqq l$ ou $-l \leqq x < l$, quer dizer, poremos de lado um dos valores originais $f(-l)$ ou $f(+l)$.

Assinalaremos, agora, um fato de caráter geral relativo às funções periódicas, traduzido pela equação

$$\int_{-l-a}^{l-a} f(x)\,dx = \int_{-l}^{l} f(x)\,dx,$$

ou, em palavras: a integral de uma função periódica num intervalo cujo comprimento seja igual a um período $T = 2l$ tem sempre o mesmo valor, onde quer que esteja situado o intervalo. Para demonstrá-lo, basta observar que, em virtude da equação $f(\xi - 2l) = f(\xi)$, a substituição $x = \xi - 2l$ dá

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = \int_{\alpha+2l}^{\beta+2l} f(\xi)\,d\xi = \int_{\alpha+2l}^{\beta+2l} f(x)\,dx.$$

Em particular, para $\alpha = -l - a$ e $\beta = -l$, segue-se que

$$\int_{-l-a}^{-l} f(x)\,dx = \int_{l-a}^{l} f(x)\,dx,$$

logo,

$$\int_{-l-a}^{l-a} f(x)\,dx = \int_{-l-a}^{-l} f(x)\,dx + \int_{-l}^{l-a} f(x)\,dx$$
$$= \int_{l-a}^{l} f(x)\,dx + \int_{-l}^{l-a} f(x)\,dx = \int_{-l}^{l} f(x)\,dx,$$

que prova o enunciado. Recordando o significado geométrico da integral, o enunciado torna-se claro, observando-se a figura 1.

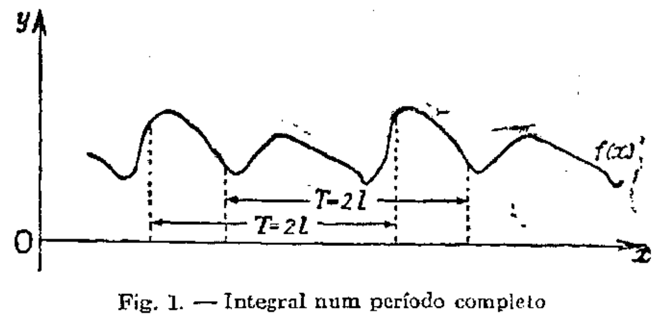


Fig. 1. — Integral num período completo

As funções periódicas mais simples, das quais partiremos para construir, mais tarde, outras mais gerais, são $a \operatorname{sen} \omega x$ e $a \cos \omega x$ ou, de modo mais geral, $a \operatorname{sen} \omega(x - \xi)$ e $a \cos \omega(x - \xi)$, onde $a (\geqq 0)$, $\omega (> 0)$ e ξ, são constantes. Chamaremos os processos representados por tais funções *vibrações senoidais* ou *vibrações harmônicas simples* (ou *oscilações*) (1). O período da vibração é $T = 2\pi/\omega$. O número ω é denominado *freqüência circular da vibração* (2). Como $1/T$ é o número de vibrações na unidade de tempo, ou a *freqüência*, ω será o *número de vibrações no tempo* 2π. O número a é denominado a *amplitude* da vibração, representando o valor máximo da função $a \operatorname{sen} \omega(x - \xi)$ ou $a \cos \omega(x - \xi)$ já que, tanto o seno como o co-seno têm 1 para seu maior valor. A quantidade $\omega(x - \xi)$ é chamada *fase* e $\omega\xi$ a *época*, ou *deslocamento da fase*.

(1) Estas fórmulas tomadas isoladamente (para todos os valores de a e ξ) representam a classe de tôdas as vibrações senoidais. As duas fórmulas são equivalentes, visto que $a \operatorname{sen} \omega(x - \xi) = a \cos \omega[x - (\xi + \pi/2\omega)]$.

(2) O leitor terá o necessário cuidado para não confundir *freqüência* com *freqüência circular* das vibrações (em inglês, *circular frequency*, em alemão, *Kreisfrequenz*).

Gràficamente estas curvas podem ser obtidas, desenhando-se a curva senoidal na razão de $1 \cdot \omega$ sôbre o eixo dos x, e $a : 1$ sôbre o dos y, transladando-se depois a curva para a distância ξ no sentido positivo do eixo dos x (fig. 2).

As fórmulas da adição das funções trigonométricas permitem, também, exprimir as vibrações senoidais da seguinte maneira:

$$\alpha \cos \omega x + \beta \operatorname{sen} \omega x \quad \text{e} \quad \beta \cos \omega x - \alpha \operatorname{sen} \omega x,$$

respectivamente, onde $\alpha = -a \operatorname{sen} \omega\xi$ e $\beta = a \cos \omega\xi$. Inversamente, cada função da forma

$$\alpha \cos \omega x + \beta \operatorname{sen} \omega x$$

representa uma vibração senoidal $a \operatorname{sen} \omega(x - \xi)$, com a amplitude

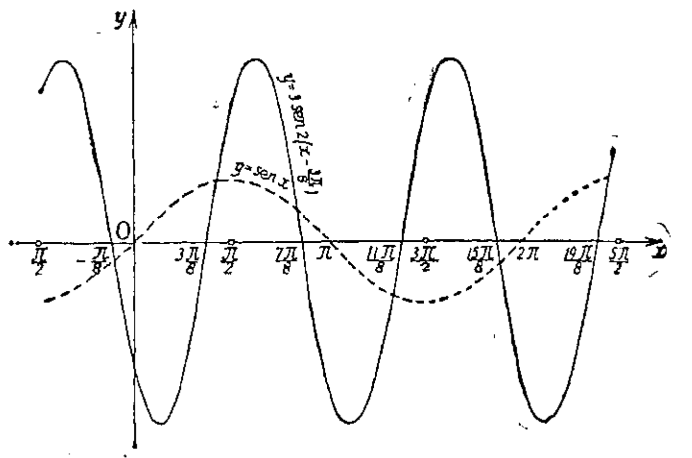


Fig. 2 — Vibrações senoidais

$a = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ e o deslocamento de fase $\omega\xi$ dado pelas equações $\alpha = -a \operatorname{sen} \omega\xi$, $\beta = a \cos \omega\xi$. Vemos, pela expressão $\alpha \cos \omega x + \beta \operatorname{sen} \omega x$, que a soma de duas ou mais funções com a mesma freqüência circular ω, sempre representa outra vibração senoidal, ainda com a mesma freqüência circular ω.

2. Superposição de vibrações senoidais. Harmônicos. Pulsações.

Embora muitas vibrações sejam senoidais (cap. V, § 4, pág. 296), verifica-se, entretanto, que a maior parte dos movimentos periódicos têm caráter mais complicado, sendo, em geral, resultantes da superposição de vibrações senoidais. Matemàticamente, isto significa, apenas, que o

movimento, por exemplo, a distância de um ponto à sua posição inicial em função do tempo, é dado por uma função que representa a soma de diversas funções periódicas puras, do tipo que estudamos acima. As ondas senoidais da função são, assim, empilhadas umas sôbre as outras (isto é, suas ordenadas são somadas), ou, como se diz comumente, elas são *superpostas*. Nesta disposição, admitimos que as freqüências circulares (e, naturalmente, os períodos, também) das vibrações superpostas são todos diferentes, pois a superposição de duas vibrações senoidais da mesma freqüência circular, dá outra vibração senoidal com freqüência circular idêntica (porém, com amplitude e deslocamento de fase diversos), como já vimos acima.

Considerando-se o caso mais simples, isto é, a superposição de apenas duas vibrações senoidais, com as freqüências circulares ω_1 e ω_2, vemos que há dois casos fundamentais diferentes, conforme as freqüências tenham ou não um quociente racional, isto é, como se diz, se elas forem comensuráveis ou incomensuráveis. Para iniciar, estudemos o primeiro caso, e como exemplo, tomemos a segunda freqüência circular, igual ao dôbro da primeira: $\omega_2 = 2\omega_1$. O período da segunda vibração será, assim, a metade do da primeira, $2\pi/2\omega_1 = T_2 = T_1/2$, e ela terá, não só o período T_2, mas, também, o duplo período T_1, visto a função repetir-se após êste duplo período. A função formada pela superposição das vibrações terá portanto, também, o período T_1. A segunda vibração, com o duplo da frequência circular, e com a metade do período da primeira, é chamada o *primeiro harmônico da vibração inicial* (ou *fundamental*).

Procedimento correspondente se verificaria se adicionássemos uma outra vibração, com a freqüência circular $\omega_3 = 3\omega_1$. Neste caso, igualmente, a função vibração sen $3\omega_1 x$ repetir-se-á, necessàriamente, com o período $2\pi/\omega_1 = T_1$. Tal vibração será o *segundo harmônico* da vibração dada. Da mesma forma podemos considerar o terceiro, quarto, $\ldots, (n-1)$ harmônicos, com as freqüências circulares $\omega_4 = 4\omega_1$, $\omega_5 = 5\omega_1, \ldots, \omega_n = n\omega_1$, e, além disso, com quaisquer deslocamentos de fase que quisermos. Cada um dêstes harmônicos repetir-se-á, necessàriamente, depois do período $T_1 = 2\pi/\omega_1$, e, por conseqüência, cada função obtida pela superposição de um certo número de vibrações, cada uma delas sendo um harmônico da freqüência circular fundamental, conhecida, ω_1, será uma função periódica, com o período $2\pi/\omega_1 = T_1$. Superpondo vibrações com as freqüências circulares ordenadas a partir

da fundamental até ao harmônico de ordem $(n - 1)$, obteremos uma função periódica da forma

$$S(x) = \alpha + \sum_{\nu=1}^{n} (a_\nu \cos \nu\omega x + b_\nu \operatorname{sen} \nu\omega x).$$

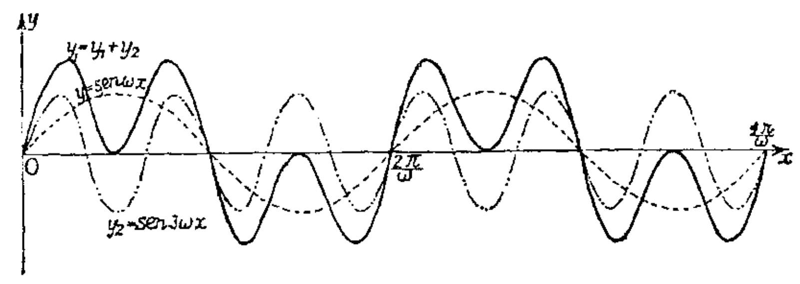


Fig. 3.(¹) — Composição de vibrações

(A constante α, que introduzimos a fim de tornarmos a fórmula mais geral, não afeta a periodicidade, visto ser periódica em cada período.) Como a função acima contém $2n + 1$ constantes que podemos esco-

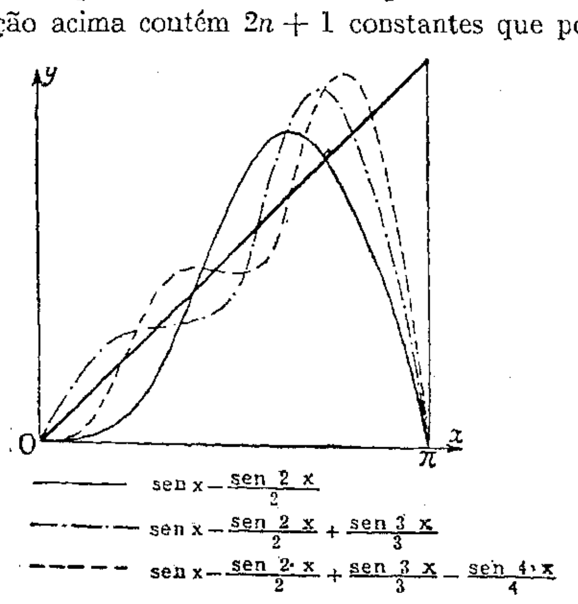


Fig. 4. — Composição de vibrações

lher arbitràriamente, estamos aptos para engendrar curvas muito complicadas, que não se assemelham, em absoluto, com as curvas senóides originais. As figuras 3, 4 e 5 indicam, gràficamente, o que acabamos de expor.

(¹) As proporções da figura correspondem a $\omega = 1$.

O têrmo "harmônico" se originou na acústica [1], onde, se uma vibração fundamental com freqüência circular ω corresponder a uma nota de certa altura, o primeiro, segundo, terceiro, etc., harmônicos, corresponderão à seqüência dos harmônicos da nota fundamental, isto é, à oitava, à dupla oitava, etc.

Em geral, no caso da superposição de vibrações, em que as freqüências circulares tiverem razões racionais, tais freqüências poderão ser representadas por múltiplos inteiros da freqüência circular fundamental comum. A superposição de duas vibrações dotadas de freqüências circulares incomensuráveis, ω_1 e ω_2, entretanto, representa um tipo de fenômenos intrìnsecamente diferentes. Neste caso, o processo resultante da superposição das vibrações senoidais não prolonga sua periodicidade. Não penetraremos nas discussões matemáticas que se originam nestas considerações, mas observaremos, de passagem, que tais funções sempre têm um caráter aproximadamente periódico, ou, como dizemos, *quase-periódico*. Recentemente foram realizados estudos pormenorizados sôbre as funções de que nos estamos ocupando.

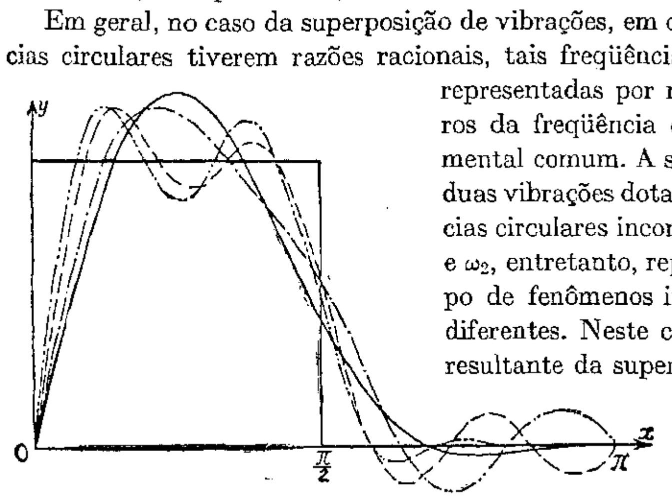


Fig. 5.[2] — Composição de vibrações

Uma observação final sôbre a superposição das vibrações senoidais, refere-se ao fenômeno das *pulsações*. Se fizermos a superposição de duas vibrações de amplitude unitária, porém, de freqüências circulares diferentes, ω_1 e ω_2, e se, para simplificar, tomarmos o mesmo valor de ξ para ambas (p. 427) (deixamos a generalização para uma fase arbitrária ao leitor), teremos que nos ocupar, ùnicamente, com o comportamento da função

$$y = \operatorname{sen} \omega_1 x + \operatorname{sen} \omega_2 x \qquad (\omega_1 > \omega_2 > 0).$$

(1) Na acústica empregam-se, também, os têrmos *harmônico superior* e *parcial*.

(2) As curvas traçadas na figura correspondem aos polinômios trigonométricos obtidos com o emprêgo de 3, 5, 6 e 7 têrmos, respectivamente, da série

$$\frac{\operatorname{sen} x}{1} + 2\frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} + \frac{\operatorname{sen} 5x}{5} + 2\frac{\operatorname{sen} 6x}{6} + \frac{\operatorname{sen} 7x}{7} + \frac{\operatorname{sen} 9x}{9} + \ldots .$$

Uma fórmula trigonométrica conhecida, nos dá

$$y = 2 \cos \tfrac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)x \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)x.$$

Esta equação representa um fênômeno que podemos interpretar como segue: temos uma vibração com a freqüência circular $\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$ e com o período $4\pi/(\omega_1 + \omega_2)$. Esta vibração, porém, não possui amplitude constante. Pelo contrário, a "amplitude" é dada pela expressão $2 \cos \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)x$, que varia com o período maior $4\pi/(\omega_1 - \omega_2)$. Êste ponto de vista é particularmente empregado e de fácil interpretação quando as duas freqüências circulares, ω_1 e ω_2, forem relativamente grandes, enquanto sua diferença $(\omega_1 - \omega_2)$, fôr pequena, comparada

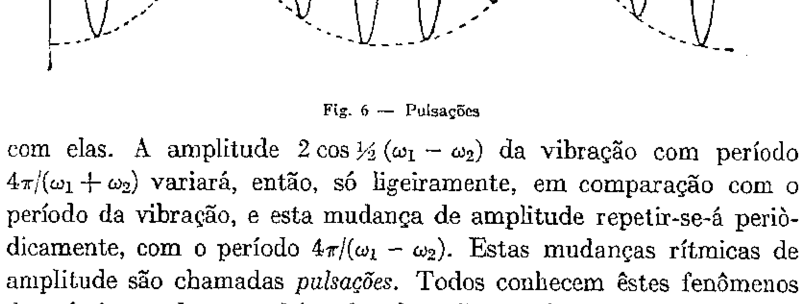


Fig. 6 — Pulsações

com elas. A amplitude $2 \cos \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)$ da vibração com período $4\pi/(\omega_1 + \omega_2)$ variará, então, só ligeiramente, em comparação com o período da vibração, e esta mudança de amplitude repetir-se-á periòdicamente, com o período $4\pi/(\omega_1 - \omega_2)$. Estas mudanças rítmicas de amplitude são chamadas *pulsações*. Todos conhecem êstes fenômenos da acústica e talvez, também, da telegrafia sem-fio. Nesta, as freqüências circulares ω_1 e ω_2 estão, via de regra, acima da capacidade de captação do ouvido humano, porém a diferença $\omega_1 - \omega_2$ situa-se entre as notas audíveis, ao passo que as vibrações originais são imperceptíveis pelo ouvido.

A figura 6 ilustra, gràficamente, um exemplo de pulsação.

2. Emprêgo da notação complexa

1. Observações gerais.

A investigação dos fenômenos vibratórios e das funções periódicas é simplificada quando se utilizam os números complexos, combinando cada par de funções trigonométricas $\cos \omega x$ e $\operatorname{sen} \omega x$, para formar uma expressão do tipo $\cos \omega x + i \operatorname{sen} \omega x = e^{i\omega x}$ (cap. VIII, § 7, pág. 411). Devemos ter presente que uma equação entre quantidades complexas é equivalente a *duas* entre quantidades reais e, além disso, que os resultados devem ser interpretados e tornados compreensivos no domínio da realidade.

Se substituirmos as funções trigonométricas pelas exponenciais, de acôrdo com a fórmula

$$2 \cos \theta = e^{i\theta} + e^{-i\theta}, \quad 2i \operatorname{sen} \theta = e^{i\theta} - e^{-i\theta},$$

teremos exprimido as vibrações senoidais, em função das quantidades complexas $e^{i\omega x}$, $e^{-i\omega x}$, ou

$$ae^{i\omega(x-\xi)}, \quad ae^{-i\omega(x-\xi)}$$

respectivamente, onde a, ω, e $\omega\xi$ representam as quantidades reais, amplitude, freqüência circular e deslocamento da fase. As vibrações reais são obtidas destas expressões complexas, de maneira simples, tomando-se partes reais e partes imaginárias.

A conveniência dêste método de representação, empregado em muitas aplicações, decorre de que as derivadas das vibrações reais, em relação ao tempo x, são obtidas derivando-se a função exponencial complexa como se i fôsse uma constante real, o que é representado pela fórmula

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dx} a\,[\cos \omega (x-\xi) + i \operatorname{sen} \omega (x-\xi)] \\ &\quad = a\omega\,[-\operatorname{sen} \omega (x-\xi) + i \cos \omega (x-\xi)\,] \\ &\quad = ia\omega\,[\,\cos \omega (x-\xi) + i \operatorname{sen} \omega (x-\xi)\,], \end{aligned}$$

ou

$$\frac{d}{dx} ae^{i\omega(x-\xi)} = ia\omega e^{i\omega(x-\xi)}.$$

2. Aplicação ao estudo das correntes alternadas.

Ilustraremos o que acabamos de expor por meio de um exemplo importante. Designaremos, no que vai a seguir, a variável independente, tempo, por t, em lugar de x, como o fizemos até aqui.

Consideremos um circuito elétrico com a resistência R e a indutância L, ao qual se imprime uma fôrça eletromotriz externa E (voltagem). No caso da corrente contínua, E é constante, sendo a corrente I dada pela lei de Ohm,

$$E = RI.$$

Tratando-se, porém, de corrente alternada, E será função do tempo t, e por conseguinte, I também o será, resultando, então, a seguinte expressão para a lei de Ohm (pág. 182)

$$E - L\frac{dI}{dt} = RI.$$

No caso mais simples, ao qual restringiremos êste estudo, a fôrça eletromotriz externa E é senoidal, com a freqüência circular ω. Se, em vez de tomarmos esta oscilação sob a forma $a \cos \omega t$ ou $a \operatorname{sen} \omega t$, combinarmos estas duas possibilidades, teremos E sob a forma complexa

$$E = \epsilon e^{i\omega t} = \epsilon \cos \omega t + i \epsilon \operatorname{sen} \omega t,$$

em que $\epsilon(> 0)$ representa a amplitude. Operaremos com esta "voltagem complexa", como se i fôsse um parâmetro real, obtendo-se, então, uma corrente complexa I. O significado da relação estabelecida entre as quantidades complexas E e I, é que a corrente que corresponde à fôrça eletromotriz $\epsilon \cos \omega t$ é a parte real de I, ao passo que a corrente que corresponde à fôrça eletromotriz $\epsilon \operatorname{sen} \omega t$ será a parte imaginária de I. A corrente complexa pode ser calculada imediatamente, se representarmos I por uma expressão da forma

$$I = \alpha e^{i\omega t} = \alpha(\cos \omega t + i \operatorname{sen} \omega t);$$

isto é, se estabelecermos a hipótese que I também é senoidal, com a freqüência circular ω. A derivada de I será, pois, dada por

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= i\alpha\omega e^{i\omega t} \\ &= \alpha\omega(-\operatorname{sen} \omega t + i \cos \omega t). \end{aligned}$$

Substituindo estas quantidades na fórmula generalizada da lei de Ohm, suprimindo-se o fator $e^{i\omega t}$, obteremos a equação $\epsilon - \alpha L i\omega = R\alpha$, ou

$$\alpha = \frac{\epsilon}{R + i\omega L},$$

de sorte que $$E = (R + i\omega L)I = WI.$$

Podemos considerar esta última equação como a lei de Ohm para correntes alternadas sob a forma complexa, se chamarmos a quantidade

$$W = R + i\omega L$$

a *resistência complexa* do circuito. A lei de Ohm é, assim, a mesma que para a corrente contínua: a corrente é igual à voltagem dividida pela resistência.

Escrevendo-se a resistência complexa sob a forma

$$W = we^{i\delta} = w \cos \delta + iw \operatorname{sen} \delta,$$

onde

$$w = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2}, \quad \operatorname{tg} \delta = \frac{\omega L}{R},$$

obteremos

$$I = \frac{\epsilon}{w} e^{i(\omega t - \delta)}.$$

De acôrdo com esta fórmula, a corrente terá o mesmo período (e freqüência circular) que a voltagem. A amplitude a da corrente é relacionada com a amplitude ϵ da fôrça eletromotriz, pela equação

$$a = \frac{\epsilon}{w},$$

e, além disso, há uma diferença de fase entre a corrente e a voltagem. A corrente não atinge seu máximo no mesmo tempo da voltagem, mas sim, δ/ω mais tarde, o mesmo se verificando, naturalmente, para o mínimo. Na engenharia elétrica a quantidade $w = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2}$ é freqüentemente denominada *impedância* ou *resistência da corrente alternada* do circuito para a freqüência circular ω. O deslocamento da fase, geralmente dado em graus, é chamado *retardamento*.

3. Representação complexa da superposição de vibrações senoidais.

Até agora, empregamos a notação complexa para representar uma combinação de *duas* vibrações senoidais. Entretanto, uma *única* vibração ou uma vibração composta, do tipo

$$S(x) = \alpha + \sum_{\nu=1}^{n} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \operatorname{sen} \nu x)$$

(para simplificar fizemos $\omega = 1$) podem, também, ser reduzidas à forma complexa, substituindo-se

$$\cos \nu x = \frac{1}{2}(e^{i\nu x} + e^{-i\nu x})$$

e

$$\operatorname{sen} \nu x = \frac{1}{2i}(e^{i\nu x} - e^{-i\nu x}).$$

A expressão acima transforma-se, então, em

$$S(x) = \sum_{\nu=-n}^{n} \alpha_\nu e^{i\nu x},$$

em que as quantidades complexas α_ν são ligadas às quantidades reais α, a_ν e b_ν pelas equações

$$a_\nu = \alpha_\nu + \alpha_{-\nu}, \quad \alpha = \alpha_0, \quad b_\nu = i(\alpha_\nu - \alpha_{-\nu}).$$

Para que a equação $a_\nu = \alpha_\nu + \alpha_{-\nu}$ possa incluir o caso em que $\nu = 0$, fazemos, geralmente, $\alpha = \alpha_0 = a_0/2$.

Inversamente, pode-se considerar uma expressão arbitrária da forma

$$\sum_{\nu=-n}^{n} \alpha_\nu e^{i\nu x}$$

como uma função representativa da superposição de vibrações, escrita sob forma complexa. Para que o resultado desta superposição possa ser real, é necessário, sòmente, que $\alpha_\nu + \alpha_{-\nu}$ seja real, e que $\alpha_\nu - \alpha_{-\nu}$, seja um imaginário puro, isto é, que α_ν e $\alpha_{-\nu}$ sejam números complexos conjugados.

4. Dedução de uma fórmula trigonométrica.

Empregando a notação complexa, podemos obter uma demonstração muito simples de uma fórmula de que precisaremos mais tarde. Tal é a *fórmula da adição trigonométrica*

$$\sigma_n(\alpha) = \tfrac{1}{2} + \cos\alpha + \cos 2\alpha + \ldots + \cos n\alpha = \frac{\operatorname{sen}(n + \frac{1}{2})\alpha}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}\alpha},$$

que se verifica para todos os valores de α, exceto $0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$.

Para demonstrá-lo, substituiremos a função co-seno pela sua expressão exponencial, e escreveremos a soma $\sigma_n(\alpha)$ sob a forma

$$\sigma_n(\alpha) = \tfrac{1}{2} \sum_{\nu=-n}^{n} e^{i\nu\alpha}.$$

No segundo membro teremos uma progressão geométrica com a razão comum $q = e^{i\alpha} \neq 1$. Empregando a fórmula comum da adição, teremos,

$$\sigma_n(\alpha) = \frac{1}{2} e^{-in\alpha} \cdot \frac{1 - q^{2n+1}}{1 - q} = \frac{1}{2} \frac{e^{-in\alpha} - e^{(n+1)i\alpha}}{1 - e^{i\alpha}}.$$

Multiplicando-se o numerador e o denominador por $e^{-i\alpha/2}$ virá:

$$\sigma_n(\alpha) = \frac{\operatorname{sen}(n + \frac{1}{2})\alpha}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}\alpha},$$

como queríamos demonstrar.

EXEMPLOS

1. Desenhar as curvas $y = \sum_{n=1}^{N} \frac{\operatorname{sen} nx}{n}$, para $N = 3, 5, 6$.

2. Desenhar as curvas $y = \sum_{n=1}^{N} \frac{\cos l}{n^4}$, para $N = 3, 6, 8$.

3. Calcular a soma $\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} 2\alpha + \ldots + \operatorname{sen} n\alpha$.

4. Se $s_m(\alpha) = \frac{\sigma_0(\alpha) + \sigma_1(\alpha) + \ldots + \sigma_m(\alpha)}{m+1}$, onde $\sigma_n(\alpha)$ tem o valor $\sigma_n(\alpha) = \frac{1}{2} + \cos \alpha + \cos 2\alpha + \ldots + \cos n\alpha$, demonstrar que

$$s_m(\alpha) = \frac{1}{m+1}\left[\frac{\operatorname{sen} \frac{(m+1)\alpha}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}}\right]^2.$$

(A expressão s_m é chamada "núcleo de Fejér", sendo da mais alta importância no estudo da série de Fourier).

5. Demonstrar que $$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} s_m(\alpha)d\alpha = 1,$$

sendo $s_m(\alpha)$ o núcleo de Fejér do exemplo anterior (Ex. 4).

3. SÉRIES DE FOURIER

A função

$$S(x) = \alpha + \sum_{\nu=1}^{n} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \operatorname{sen} \nu x)$$

resultante da superposição de vibrações senoidais, contêm $2n+1$ constantes arbitrárias, α, a_ν, b_ν. O problema que surge é indagar se tais consantes podem ser escolhidas de modo que no intervalo $-\pi \leqq x \leqq \pi$ a soma $S(x)$ se aproxime de uma função dada, $f(x)$ e, se assim fôr, como podemos determiná-las. Mais precisamente, verificaremos se a função $f(x)$ pode ser desenvolvida segundo a série infinita

$$f(x) = \alpha + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \operatorname{sen} \nu x).$$

Admitindo-se, por um momento, que êste desenvolvimento da função $f(x)$ seja efetivamente possível, e que a série possua convergência unifome no intervalo $-\pi \leqq x \leqq \pi$, obteremos uma reação simples entre a função $f(x)$ e os coeficientes $\alpha = \frac{1}{2}a_0$, a_ν e b_ν. (Veremos, em breve, que a notação $\alpha = \frac{1}{2}a_0$ se justifica plenamente.) Multiplicamos o de-

senvolvimento hipotético acima por cos νx e integramos têrmo por têrmo, o que é possível, dada a convergência uniforme admitida. Em virtude das relações ortogonais

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx \, dx = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n, \\ \pi, & \text{se } m = n \neq 0, \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \operatorname{sen} mx \cos nx \, dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n, \\ \pi, & \text{se } m = n \neq 0, \end{cases}$$

demonstradas no cap. IV, § 3 (pág. 217), obtemos, imediatamente, as fórmulas

$$a_\nu = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos \nu x \, dx$$

para os coeficientes. Da mesma forma, multiplicando-se a série por sen νx e integrando-se, virá:

$$b_\nu = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \operatorname{sen} \nu x \, dx.$$

Estas fómulas apresentam uma seqüência definida dos coeficientes a_ν e b_ν, usualmente denominados coeficientes de Fourier, para cada função $f(x)$, definida e contínua no intervalo $-\pi \leqq x \leqq \pi$, ou que tenha sòmente um número finito de descontinuidades no seu interior. Sendo dada a função $f(x)$, podemos usar essas quantidades a_ν e b_ν para formarmos as somas parciais da série de Fourier

$$S_n(x) = \tfrac{1}{2} a_0 + \sum_{\nu=1}^{n} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \operatorname{sen} \nu x),$$

o que permite, também, escrever a "série infinita de Fourier" correspondente. A questão consistirá em distinguir classes simples de funções $f(x)$ para as quais a série de Fourier seja convergente, representando, de fato, a função.

Para estabelecermos o resultado que vamos demonstrar, introduziremos a seguinte definição. Uma função $f(x)$ será *secionalmente regular* (1) num intervalo, se fôr *secionalmente contínua* (2) (isto é, contínua

(1) Em alemão: *stückweise glatt*. Em inglês: *sectionally smooth*.
(2) Em alemão: *stückweise stetig*. Em inglês: *sectionally continuous*.

no intervalo, exceto para um número finito de saltos com descontinuidades) e, além disso, se sua derivada de primeira ordem, $f'(x)$ fôr secionalmente contínua.

Imaginaremos a função $f(x)$, definida originàriamente no intervalo $-\pi \leqq x \leqq \pi$, como desenvolvida periòdicamente.

Em cada ponto no qual a função $f(x)$ tiver um salto de descontinuidade, será alterada, se necessário, assumindo então um valor igual à média aritmética dos limites da esquerda e da direita de $f(x)$. Podemos, pois, escrever

$$f(x) = \tfrac{1}{2}\,(f(x-0) + f(x+0)),$$

onde $f(x-0)$ e $f(x+0)$ são simplesmente os limites de $f(\bar{x})$ quando $\bar{x}$
1—16 se aproxima de x pela esquerda ou pela direita, respectivamente. Esta equação, como é lógico, será verdadeira para qualquer ponto x em que $f(x)$ fôr contínua.

Nosso objetivo é o teorema seguinte:

Se a função f(x) *fôr secionalmente regular, satisfazendo, ao mesmo tempo, a equação acima, o seu desenvolvimento segundo a série de Fourier é convergente em qualquer ponto* x *e representa a função* [1].

Demonstraremos, depois, o teorema:

Em qualquer intervalo fechado, no qual a função f(x) *(suposta periòdicamente desenvolvida) seja contínua e, também, secionalmente regular, a sua série de Fourier converge uniformemente.*

Finalmente:

Se a função f(x) *fôr secionalmente regular, não tendo descontinuidades, o seu desenvolvimento, segundo a série de Fournier, possuirá convergência absoluta.*

As demonstrações dêstes teoremas serão dadas no § 5 (pág. 447). Por enquanto, frisaremos que as funções que podem ser desenvolvidas segundo êstes teoremas possuem alto grau de arbitrariedade, ou seja, não é necessário que elas sejam dadas por uma única expressão analítica.

Na próxima seção tornaremos manifesta a extraordinária fertilidade dos desenvolvimentos segundo a série de Fourier, discutindo alguns exemplos.

[1] Notemos, de passagem, que êste teorema pode ser demonstrado para classes mais gerais de funções. Os resultados a que chegamos aqui, contudo, bastam para tôdas as aplicações.

4. Exemplos sôbre séries de Fourier

1. Observações preliminares.

Suponhamos uma função $f(x)$, com o período 2π, definida no intervalo $-\pi < x < \pi$. Fora dêste intervalo, tanto para a esquerda como para a direita, ela pode ser desenvolvida periòdicamente, como vimos na página 426.

Antes de entrarmos em detalhes, notemos que se $f(x)$ fôr uma função *par* (pág. 20), é claro que $f(x)$ sen νx será *ímpar*, ao passo que $f(x)$ cos νx será par, de sorte que

$$b_\nu = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \operatorname{sen} \nu x \, dx = 0; \quad a_\nu = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \cos \nu x \, dx.$$

Obtemos, assim, uma "série de co-senos." Se, por outro lado, a função $f(x)$ fôr ímpar, teremos

$$a_\nu = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos \nu x \, dx = 0; \quad b_\nu = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \operatorname{sen} \nu x \, dx.$$

Deduzimos, portanto, uma "série de senos". (1)

2. Desenvolvimento das funções $\psi(x) = x$ e $\varphi(x) = x^2$.

A função ímpar, x, nos dá $b_\nu = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \operatorname{sen} \nu x \, dx$ e, integrando-se por partes,

$$\frac{\pi}{2} b_\nu = \frac{-x \cos \nu x}{\nu}\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{\nu}\int_0^{\pi} \cos \nu x \, dx = (-1)^{\nu+1}\frac{\pi}{\nu}.$$

Logo, a função periódica $\psi(x)$, que é igual a x no intervalo $-\pi < x < \pi$ (fig. 7), permitirá o desenvolvimento

$$\psi(x) = 2\left(\frac{\operatorname{sen} x}{1} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} - + \dots\right).$$

Fazendo-se $x = \pi/2$, teremos a série de Gregório

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - + \dots,$$

que já conhecemos (pág. 319). A função $\psi(x)$ representada por esta série não é contínua. Pelo contrário, ela salta de 2π nos pontos $x = k\pi$, $k = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots$.

(1) Conseqüentemente, se a função $f(x)$ fôr dada, inicialmente, só no intervalo $0 < x < \pi$, poderemos desenvolvê-la no intervalo $-\pi < x < 0$, seja como função ímpar, seja como par, desenvolvendo-a correspondentemente, no intervalo $0 < x < \pi$, como série de senos ou de co-senos.

Nestes pontos de descontinuidade, isto é, nos pontos $x = k\pi$, $k = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots$, cada têrmo da série será zero, sendo, portanto, zero o valor da própria função. Logo, nos pontos de descontinuidade a série representa a média aritmética dos limites da esquerda e da direita

Sendo ξ um número fixo qualquer entre $-\pi$ e π, e se substituirmos x por $(x-\xi)$ nas séries acima, teremos

$$\psi(x-\xi) = 2\left[\frac{\text{sen}(x-\xi)}{1} - \frac{\text{sen}\,2(x-\xi)}{2} + \frac{\text{sen}\,3(x-\xi)}{3} - + \ldots\right]$$

$$= -\frac{2}{1}\,\text{sen}\,\xi\cos x + \frac{2}{1}\cos\xi\,\text{sen}\,x + \frac{2}{2}\,\text{sen}\,2\xi\cos 2x$$

$$-\frac{2}{2}\cos 2\xi\,\text{sen}\,2x - \frac{2}{3}\,\text{sen}\,3\xi\cos 3x + \frac{2}{3}\cos 3\xi\,\text{sen}\,3x + \ldots.$$

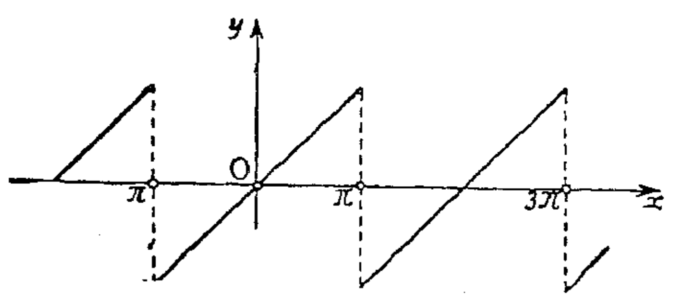


Fig. 7

Podemos, também, escrever estas expressões sob a forma de séries de Fourier, com os coeficientes

$$a_0 = 0, \quad a_n = 2\,\frac{(-1)^n}{n}\,\text{sen}\,n\xi, \quad b_n = 2\,\frac{(-1)^{n-1}}{n}\cos n\xi,$$

que tendem para zero quando n cresce; esta série representa uma função com as descontinuidades descritas acima, nos pontos $x = \xi \pm \pi$, $x = \xi \pm 3\pi, \ldots$.

Acharemos para a função par $\phi(x) = x^2$, integrando por partes duas vêzes que

$$a_\nu = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\cos\nu x\,dx = (-1)^\nu\,\frac{4}{\nu^2} \qquad (\nu > 0),$$

$$a_0 = \frac{2\pi^2}{3},$$

de forma que teremos o desenvolvimento

$$\varphi(x) = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - + \ldots\right).$$

Derivando esta série têrmo por têrmo e dividindo por 2, teremos novamente a série de $\psi(x) = x$.

3. Desenvolvimento da função $x \cos x$.

Para esta função ímpar, teremos

$$a_\nu = 0, \quad b_\nu = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x \cos x \operatorname{sen} \nu x \, dx.$$

Empregando a fórmula

$$\int_0^\pi x \operatorname{sen} \mu x \, dx = (-1)^{\mu+1}\frac{\pi}{\mu} \quad (\mu = 1, 2, \ldots)$$

estabelecida na subseção anterior, calculamos b_ν:

$$b_\nu = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x \cos x \operatorname{sen} \nu x \, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x[\operatorname{sen}(\nu+1)x + \operatorname{sen}(\nu-1)x]\, dx$$

$$= \frac{(-1)^{\nu+2}}{\nu+1} + \frac{(-1)^\nu}{\nu-1} = (-1)^\nu \frac{2\nu}{\nu^2-1} \quad (\nu = 2, 3, \ldots),$$

$$b_1 = -\frac{1}{2}.$$

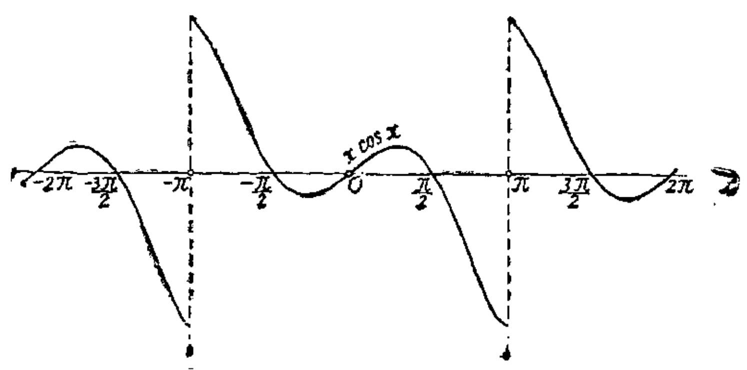


Fig. 8

Obtemos, pois, a série

$$x \cos x = -\frac{1}{2}\operatorname{sen} x + 2\sum_{\nu=2}^{\infty}\frac{(-1)^\nu \nu}{\nu^2-1}\operatorname{sen} \nu x,$$

que se transformará em

$$x(1+\cos x) = \frac{3}{2}\operatorname{sen} x + 2\left(\frac{\operatorname{sen} 2x}{1.2.3} - \frac{\operatorname{sen} 3x}{2.3.4} + \frac{\operatorname{sen} 4x}{3.4.5} - + \ldots\right).$$

se lhe adicionarmos a série estabelecida na página 440. Quando a função igual a $x \cos x$ no intervalo $-\pi < x < \pi$ fôr desenvolvida periòdicamente além dêle, ocorrerão as descontinuidades (fig. 8) já estabelecidas para a função $\psi(x)$ estudada no n.º 2. Por outro lado, se a função $x(1 + \cos x)$ fôr desenvolvida periòdicamente, ela permanecerá contínua nos extremos do intervalo, e, efetivamente, sua derivada também será contínua, visto as descontinuidades serem eliminadas pelo fator $1 + \cos x$ que, juntamente com sua derivada, se anula nos pontos extremos.

4. Função $f(x) = |x|$.

Esta função é par; conseqüentemente, $b_\nu = 0$ e

$$a_\nu = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x \cos \nu x \, dx,$$

que, integrada por partes nos dá:

$$\int_0^\pi x \cos \nu x \, dx = \frac{1}{\nu} x \operatorname{sen} \nu x \Big|_0^\pi - \frac{1}{\nu}\int_0^\pi \operatorname{sen} \nu x \, dx$$

$$= \begin{cases} 0, \text{ se } \nu \text{ fôr par e } \neq 0, \\ -\dfrac{2}{\nu^2}, \text{ se } \nu \text{ fôr ímpar.} \end{cases}$$

Por conseguinte,

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots\right).$$

Fazendo-se $x = 0$, obteremos a fórmula notável

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots .$$

5. Exemplo

A função definida pela equação

$$f(x) = \begin{cases} -1, \text{ para } -\pi < x < 0, \\ 0, \text{ para } x = 0, \\ +1, \text{ para } 0 < x < \pi, \end{cases}$$

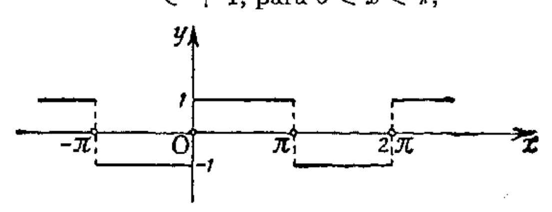


Fig. 9

como está representada na figura 9, é uma função ímpar. Logo, $a_\nu = 0$ e

$$b_\nu = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \operatorname{sen} \nu x \, dx = \begin{cases} 0 \text{ se } \nu \text{ fôr par,} \\ \dfrac{4}{\pi\nu} \text{ se } \nu \text{ fôr ímpar,} \end{cases}$$

de sorte que a série de Fourier para a função dada será

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{1} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} + \dots\right).$$

Para $x = \dfrac{2}{\pi}$, em particular, teremos, novamente, a série de Gregório.

Esta série pode ser deduzida da referente a $|x|$, pela derivação têrmo a têrmo.

6. Função $f(x) = |\operatorname{sen} x|$.

A função par $f(x) = |\operatorname{sen} x|$ pode ser desenvolvida segundo a série dos co-senos, sendo os coeficientes a_ν dados pelas seguintes transformações:

$$\frac{\pi}{2} a_\nu = \int_0^\pi \operatorname{sen} x \cos \nu x \, dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi [\operatorname{sen}(\nu+1)x - \operatorname{sen}(\nu-1)x]\, dx$$

$$= \begin{cases} 0 \text{ se } \nu \text{ fôr ímpar,} \\ \dfrac{-2}{\nu^2-1} \text{ se } \nu \text{ fôr par.} \end{cases}$$

Obteremos, então,

$$f(x) = |\operatorname{sen} x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{\cos 2\mu x}{4\mu^2 - 1}.$$

7. Desenvolvimento da função $\cos \mu x$. Resolução da co-tangente em frações parciais. Produto infinito do seno.

Seja $f(x) = \cos \mu x$ para $-\pi < x < \pi$, onde μ *não é inteiro*. Como $f(x)$ é par, teremos novamente $b_\nu = 0$, enquanto

$$\frac{\pi}{2} a_\nu = \int_0^\pi \cos \mu x \cos \nu x \, dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi [\cos(\mu+\nu)x + \cos(\mu-\nu)x]\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\operatorname{sen}(\mu+\nu)\pi}{\mu+\nu} + \frac{\operatorname{sen}(\mu-\nu)\pi}{\mu-\nu}\right]$$

$$= \frac{\mu(-1)^\nu}{\mu^2-\nu^2} \operatorname{sen} \mu\pi.$$

Dêste modo virá

$$\cos \mu x = \frac{2\mu \operatorname{sen} \mu\pi}{\pi}\left(\frac{1}{2\mu^2} - \frac{\cos x}{\mu^2 - 1^2} + \frac{\cos 2x}{\mu^2 - 2^2} - + \dots\right).$$

Esta função se conserva contínua nos pontos $x = \pm\pi$. Se fizermos $x = \pi$ e dividirmos ambos os membros por $\operatorname{sen} \mu\pi$, escrevendo, então, x em lugar de μ, teremos a equação

$$\operatorname{cotg} \pi x = \frac{2x}{\pi}\left(\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x^2-1^2} + \frac{1}{x^2-2^2} + \dots\right).$$

Esta é uma fórmula muito importante, freqüentemente discutida em análise e denominada: *resolução da co-tangente em frações parciais*. Podemos escrever esta série sob a forma

$$\operatorname{cotg} \pi x - \frac{1}{\pi x} = -\frac{2x}{\pi}\left(\frac{1}{1^2-x^2} + \frac{1}{2^2-x^2} + \dots\right).$$

Quando x estiver contido no intervalo $0 \leqq x \leqq q < 1$, o têrmo de ordem n do segundo membro será menor, em valor absoluto, do que $\dfrac{2}{\pi}\dfrac{1}{n^2-q^2}$. Logo, a série pos-

suirá convergência uniforme no intervalo, podendo ser integrada têrmo por têrmo. Obteremos, então,

$$\pi \int_0^x \left(\operatorname{cotg} \pi t - \frac{1}{\pi t}\right) dt = \log \frac{\operatorname{sen} \pi x}{\pi x} - \lim_{a \to 0} \log \frac{\operatorname{sen} \pi a}{\pi a} = \log \frac{\operatorname{sen} \pi x}{\pi x}$$

no primeiro membro, e

$$\log \left(1 - \frac{x^2}{1^2}\right) + \log \left(1 - \frac{x^2}{2^2}\right) + \ldots = \lim_{n \to \infty} \sum_{\nu=1}^{n} \log \left(1 - \frac{x^2}{\nu^2}\right)$$

no segundo, multiplicando ambos por π. Se passarmos da função logarítmica para a exponencial, teremos:

$$\frac{\operatorname{sen} \pi x}{\pi x} = e^{\lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{\nu=1}^{n} \log (1 - x^2/\nu^2)} = \lim_{n \to \infty} e^{\sum\limits_{\nu=1}^{n} \log (1 - x^2/\nu^2)}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \prod_{\nu=1}^{n} \left(1 - \frac{x^2}{\nu^2}\right).$$

Logo,

$$\operatorname{sen} \pi x = \pi x \left(1 - \frac{x^2}{1^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{3^2}\right) \ldots .$$

Obtivemos, assim, a notável expressão do seno, como produto infinito (¹). Fazendo $x = \frac{1}{2}$, virá o produto de Wallis

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{2\nu}{2\nu - 1} \cdot \frac{2\nu}{2\nu + 1} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots,$$

como foi obtido na página 224.

8. Outros exemplos.

Por transformações rápidas, como as anteriores, teremos os seguintes exemplos de desenvolvimentos em séries.

A função $f(x)$ definida pela equação $f(x) = \operatorname{sen} \mu x$ no intervalo $-\pi < x < \pi$ pode ser desenvolvida segundo a série

$$f(x) = \operatorname{sen} \mu x = -\frac{2 \operatorname{sen} \mu \pi}{\pi} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{\mu^2 - 1^2} - \frac{2 \operatorname{sen} 2x}{\mu^2 - 2^2} + \frac{3 \operatorname{sen} 3x}{\mu^2 - 3^2} - + \ldots\right).$$

Se fizermos $x = \dfrac{\pi}{2}$ e se empregarmos a relação $\operatorname{sen} \mu\pi = 2 \operatorname{sen} \dfrac{\mu\pi}{2} \cos \dfrac{\mu\pi}{2}$, teremos o desenvolvimento da secante em frações parciais, isto é, da função $\dfrac{1}{\cos \mu \dfrac{\pi}{2}}$. O desenvolvimento é

$$\pi \sec \pi x = \frac{\pi}{\cos \pi x} = 4 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu} (2\nu - 1)}{4x^2 - (2\nu - 1)^2},$$

em que escrevemos x para $\mu/2$.

(¹) Esta fórmula é particularmente interessante porque mostra que a função $\operatorname{sen} \pi x$ se anula nos pontos $x = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. A êste respeito ela corresponde à fatoração de um polinômio, quando os zeros respectivos forem conhecidos.

As séries para as funções hiperbólicas Ch μx e Sh μx $(-\pi < x < \pi)$, são

$$\operatorname{Ch} \mu x = \frac{2\mu}{\pi} \operatorname{Sh} \mu\pi \left(\frac{1}{2\mu^2} - \frac{\cos x}{\mu^2 + 1^2} + \frac{\cos 2x}{\mu^2 + 2^2} - \frac{\cos 3x}{\mu^2 + 3^2} + - \dots\right),$$

$$\operatorname{Sh} \mu x = \frac{2}{\pi} \operatorname{Sh} \mu\pi \left(\frac{\operatorname{sen} x}{\mu^2 + 1^2} - \frac{2 \operatorname{sen} 2x}{\mu^2 + 2^2} + \frac{3 \operatorname{sen} 3x}{\mu^2 + 3^2} - + \dots\right).$$

EXEMPLOS

1. Determinar o desenvolvimento das funções periódicas, com período 2π, segundo a série de Fourier, as quais são definidas pelas fórmulas

(a) e^{ax}. (b) $(x^2 - \pi^2)^2$. (c) sen $ax\,(1 + \cos x)$.
(d) $f(x) = 1$ $(a \leqq x \leqq b)$, $f(x) = 0$ $(-\pi < x < a)$, $f(x) = 0$ $(b < x \leqq \pi)$,

no intervalo $-\pi < x \leqq \pi$.

2. A função $f(t)$ é periódica, com o período 1, sendo definida por $f(t) = t$, em $0 \leqq x < 1$. Demonstrar que $f(t) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{\pi} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{sen} 2n\pi t}{n}$.

3. Os polinômios $B_n(t)$ (polinômios de Bernouilli) são definidos pelas relações:

(a) $B_1(t) = t - \frac{1}{2}$; (b) $B_n'(t) = n\, B_{n-1}(t)$; (c) $\int_0^1 B_n(t)\, dt = 0$.

Achar $B_2(t)$, $B_3(t)$, $B_4(t)$.

(*Nota*.— Os números $B_n(0)$ são racionais sendo, de fato, os mesmos números de Bernouilli, como se pode verificar nas págs. 422, 423).

4. Verificar os desenvolvimentos segundo a série de Fourier, para os seguintes polinômios de Bernouilli:

$$B_1(t) = -\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} 2n\pi t}{n}, \qquad B_3(t) = \frac{3}{2\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} 2n\pi t}{n^3},$$

$$B_2(t) = \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\pi t}{n^2}, \qquad B_4(t) = -\frac{3}{\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\pi t}{n^4}.$$

5. Demonstrar que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^4} = \dfrac{\pi^4}{90}$.

6. Demonstrar que $\dfrac{1}{1^3} - \dfrac{1}{3^3} + \dfrac{1}{5^3} - \dfrac{1}{7^3} + - \dots = \dfrac{\pi^3}{32}$.

7. Provar que (a) $1 + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{5^2} + \dfrac{1}{7^2} + \dots = \dfrac{\pi^2}{8}$.

(b) $1 - \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} - \dfrac{1}{4^2} + \dots = \dfrac{\pi^2}{12}$.

(c) $1 - \dfrac{1}{2^4} + \dfrac{1}{3^4} - \dfrac{1}{4^4} + \dots = \dfrac{7\pi^2}{720}$.

8. Estabelecer o produto infinito do co-seno da relação

$$\cos \pi x = \frac{\operatorname{sen} 2\pi x}{2 \operatorname{sen} \pi x}.$$

5. Convergência das séries de Fourier

Demonstraremos agora, rigorosamente, os teoremas enunciados no § 3 (pág. 439) e ilustrados no § 4 (pág. 440).

1. Convergência das séries de Fourier de funções secionalmente regulares.

Lembraremos, de início, que se $f(x)$ fôr uma função qualquer, definida e secionalmente contínua (isto é, contínua, exceto para um número finito de descontinuidades, no máximo) no domínio $-\pi \leqq x \leqq \pi$, podemos formar os coeficientes da série de Fourier para $f(x)$, de acôrdo com as fórmulas

$$a_\nu = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\cos\nu t\,dt, \quad b_\nu = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\,\mathrm{sen}\,\nu t\,dt,$$

sendo então possível escrevermos a série

$$\tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty}(a_\nu \cos\nu x + b_\nu\,\mathrm{sen}\,\nu x).$$

Esta é a denominada série de Fourier correspondente a $f(x)$, independentemente da sua convergência. Determinaremos, agora, as condições que $f(x)$ deve satisfazer para que se tenha certeza de que a série representa de fato a função e é convergente. Admitiremos que $f(x)$ é desenvolvida periòdicamente, fora do intervalo $-\pi < x \leqq \pi$.

Demonstraremos, então, o teorema

Se a função f(x) *fôr secionalmente regular* (1), *e se, em cada ponto de descontinuidade* (x), *satisfizer a equação* $f(x) = \frac{1}{2}[f(x-0) + f(x+0)]$, *a série de Fourier correspondente à função dada* f(x) *será convergente em qualquer ponto e representará a função.*

Para a demonstração, consideremos as somas parciais

$$S_n(x) = \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu \cos\nu x + b_\nu\,\mathrm{sen}\,\nu x).$$

Se substituirmos os coeficientes pelas integrais que estabelecemos acima, alterando a ordem da integração e da somação, virá

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{n}(\cos\nu t\cos\nu x + \mathrm{sen}\,\nu t\,\mathrm{sen}\,\nu x)\right]dt,$$

(1) Isto é, tanto $f(x)$ como sua derivada $f'(x)$ são secionalmente contínuas.

ou, empregando o teorema da adição dos co-senos,

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{n} \cos \nu(t - x)\, dt.\right]$$

Aplicando-se, então, a fórmula da adição trigonométrica (pág. 436), teremos

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\, \frac{\operatorname{sen}\,(n + \frac{1}{2})\,(t - x)}{\operatorname{sen}\,\frac{1}{2}\,(t - x)}\, dt.$$

Finalmente, fazendo-se $\tau = (t - x)$ e notando-se a periodicidade do integrando, obteremos

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x + \tau)\, \frac{\operatorname{sen}\,(n + \frac{1}{2})\tau}{\operatorname{sen}\,\frac{1}{2}\tau}\, d\tau.$$

Partindo da soma parcial $S_n(x)$ sob esta forma, podemos demonstrar, com o auxílio do lema abaixo, que $S_n(x)$ tende para $f(x)$.

Lema. Quando a função s(x) *fôr secionalmente contínua no intervalo* $a \leqq x \leqq b$, o *integrando*

$$I = \int_a^b s(t) \operatorname{sen} \lambda t\, dt$$

tenderá para 0, *à medida que* λ *crescer.*

Na demonstração deve-se admitir que $s(x)$ seja contínua no intervalo completo, visto que de outra forma precisaríamos, apenas, limitar o raciocínio aos subintervalos em que $s(x)$ é contínua.

Como no argumento empregado nas páginas 418 e seguintes, observaremos que, se λ fôr positivo, a função sen λt será alternadamente positiva e negativa nos intervalos sucessivos de cumprimento π/λ. Para valores grandes de λ, as contribuições dos intervalos adjacentes para a integral quase se cancelam, porque, em vista da continuidade, os valores de $s(x)$ em dois dêstes domínios adjacentes diferem muito pouco entre si. Usaremos esta circunstância, transformando a integral I pela substituição $t = \tau + h$, em que $h = \pi/\lambda$; então, $\operatorname{sen} \lambda t = -\operatorname{sen} \lambda\tau$ e

$$I = -\int_{a-h}^{b-h} s(\tau + h) \operatorname{sen} \lambda\tau\, d\tau.$$

Escrevendo-se, de novo, t em vez de τ, e somando-se as duas expres-

sões de I, virá

$$2I = -\int_{a-h}^{a} s(t+h) \operatorname{sen} \lambda t \, dt + \int_{a}^{b-h} [s(t) - s(t+h)] \operatorname{sen} \lambda t \, dt$$
$$+ \int_{b-h}^{b} s(t) \operatorname{sen} \lambda t \, dt.$$

Se M fôr um limite superior do valor absoluto de $s(x)$, isto é, se para qualquer valor de x, no domínio considerado, $|s(x)| \leqq M$, a desigualdade

$$2\,|I| \leqq 2Mh + \int_{a}^{b-h} |s(t) - s(t+h)|\, dt$$

decorre imediatamente da expressão encontrada para I. Seja, agora, ϵ uma quantidade positiva qualquer; se escolhermos λ tão grande que no intervalo completo $a \leqq t \leqq b - h$ a expressão $|s(t) - s(t+h)|$ permaneça menor do que $\epsilon/(b-a)$, e também, $Mh = \dfrac{M\pi}{\lambda} < \dfrac{\epsilon}{2}$, teremos $|I| < \epsilon$. Conseqüentemente, desde que podemos escolher ϵ tão pequeno quanto quisermos, $\lim\limits_{\lambda \to \infty} I = 0$. (1)

Além dêste lema, precisamos da fórmula de integração

$$\int_{0}^{\pi} \frac{\operatorname{sen}(n + \frac{1}{2})t}{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}t}\, dt = \frac{\pi}{2},$$

que se verifica para qualquer inteiro positivo n. Isto se demonstra ràpidamente, empregando-se a fórmula da soma dos co-senos, visto que

$$\int_{0}^{\pi} \frac{\operatorname{sen}(n + \frac{1}{2})\,t}{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}t}\, dt = \int_{0}^{\pi} \left(\tfrac{1}{2} + \sum_{1}^{n} \cos \nu t\right) dt = \frac{\pi}{2}.$$

Demonstração do teorema principal. — Pelo lema estabelecido, será fácil demonstrarmos o teorema principal, isto é, comprovar a fórmula

$$\lim_{n \to \infty} S_n(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x+t) \frac{\operatorname{sen}(n + \frac{1}{2})\,t}{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}t}\, dt = f(x).$$

(1) Admitindo-se que $s(x)$, além de ser contínua, possui a derivada $s'(x)$ secionalmente contínua; a demonstração do lema decorre, simplesmente, da integração por partes. Teremos, então,

$$\int_a^b s(t) \operatorname{sen} \lambda t \, dt = \frac{1}{\lambda}\left[s(a) \cos \lambda a - s(b) \cos \lambda b + \int_a^b s'(t) \cos \lambda t \, dt \right].$$

Vemos logo, nesta expressão, que à medida que λ cresce, o segundo membro tende para zero.

Começaremos subdividindo o intervalo de integração na origem. Para valores fixos de x, a função [1]

$$s(t) = \frac{f(x+t) - f(x+0)}{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} t}$$

é secionalmente contínua no domínio $0 \leqq t \leqq \pi$. Isto é claro quando $0 < t \leqq \pi$, ao passo que a continuidade quando $t = 0$ decorre da hipótese feita, de existir derivada do segundo membro

$$\lim_{t \to 0,\, t>0} \frac{f(x+t) - f(x+0)}{t} = \lim_{t \to +0} \frac{f(x+t) - f(x+0)}{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} t} \cdot \frac{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} t}{t}$$
$$= \lim_{t \to +0} \frac{f(x+t) - f(x+0)}{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} t}.$$

Logo, quando $\lambda = n + \frac{1}{2}$ crescer, a integral

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi s(t) \operatorname{sen} \lambda t \, dt$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi f(x+t) \frac{\operatorname{sen} \lambda t}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} t} dt - \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi f(x+0) \frac{\operatorname{sen} \lambda t}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} t} dt$$

tenderá para zero.

Como, porém, o fator $f(x+0)$ pode ser excluído da segunda integral do segundo membro, e como a integral $\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen} \lambda t}{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} t} dt$ é igual a $\frac{\pi}{2}$ para $\lambda = n + \frac{1}{2}$, obtemos logo a equação [2]

$$\lim_{\lambda \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi f(x+t) \frac{\operatorname{sen} \lambda t}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} t} dt = \frac{1}{2} f(x+0).$$

Da memsma forma teremos

$$\lim_{\lambda \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 f(x+t) \frac{\operatorname{sen} \lambda t}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} t} dt = \frac{1}{2} f(x-0),$$

ao intervalo $-\pi \leqq t \leqq 0$ e, por adição, virá

$$\lim_{\lambda \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x+t) \frac{\operatorname{sen} \lambda t}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} t} dt = f(x).$$

[1] Para esta notação, veja-se a página 439.

[2] Fazendo-se $x = 0$, $f(t) = (\operatorname{sen} \frac{1}{2} t)/t$ nesta equação, e substituindo t por u/λ, obteremos a importante relação (págs. 251-253).

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_0^{\lambda\pi} \frac{\operatorname{sen} u}{u} du = \frac{\pi}{2}.$$

2. Investigações subseqüentes sôbre a convergência.

Na vizinhança dos pontos em que a função $f(x)$ é descontínua (pontos críticos), a série de Fournier não é uniformemente convergente, pois, de acôrdo com o cap. VIII, § 4 (pág. 393), tôda a série de funções contínuas, uniformemente convergente, tem soma contínua. Não obstante, temos o seguinte teorema importante:

Se uma função secionalmente regular e periódica não tiver descontinuidades, sua série de Fourier converge absoluta e uniformemente. A convergência da série de Fourier para qualquer função secionalmente regular é uniforme em todo o intervalo fechado que não contiver pontos de descontinuidade da função.

Para demonstrar êste teorema, partiremos de uma desigualdade fundamental, satisfeita pelos coeficientes da série de Fourier de qualquer, função $f(x)$, secionalmente contínua (observe-se que não se imaginou $f(x)$ secionalmente regular). Esta desigualdade, denominada *desigualdade de Bessel*, estabelece, para qualquer valor de n

$$\frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{\nu=1}^{n} (a_\nu^2 + b_\nu^2) \leqq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} [f(x)]^2 \, dx.$$

A demonstração decorre de que a expressão

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \left[f(x) - \tfrac{1}{2} a_0 - \sum_{\nu=1}^{n} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \operatorname{sen} \nu x) \right]^2 dx$$

é sempre positiva ou nula. Se calcularmos a integral, desenvolvendo o colchête sob o sinal, lembrando as relações ortogonais e a definição dos coeficientes de Fourier, obteremos imediatamente a desigualdade de Bessel sob a forma

$$\int_{-\pi}^{+\pi} [f(x)]^2 \, dx - \pi \left[\frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{\nu=1}^{n} (a_\nu^2 + b_\nu^2) \right] \geqq 0.$$

Além da desigualdade de Bessel, empregamos a de Schwarz (pág. 13): se $u_1, u_2, \ldots, u_n$ e $v_1, v_2, \ldots, v_n$, forem números reais, arbitrários, será sempre verdade que

$$\left(\sum_{\nu=1}^{n} u_\nu v_\nu \right)^2 \leqq \sum_{\nu=1}^{n} u_\nu^2 \cdot \sum_{\nu=1}^{n} v_\nu^2,$$

ocorrendo o sinal de igualdade sòmente quando as seqüências u e v forem proporcionais.

Admitiremos, agora, que a função periódica $f(x)$ seja secionalmente regular e, também, contínua. A derivada $g(x) = f'(x)$ será secional-

mente contínua, sendo fácil de demonstrar que os coeficientes da série de Fourier, c_ν e d_ν, de $g(x)$, satisfazem as relações

$$c_0 = 0$$
$$\left.\begin{aligned} c_\nu &= \nu b_\nu \\ d_\nu &= -\nu a_\nu \end{aligned}\right\} (\nu \geqq 1);$$

integrando por partes, teremos

$$c_\nu = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} g(x) \cos \nu x \, dx$$
$$= \frac{1}{\pi} f(x) \cos \nu x \Big|_{-\pi}^{+\pi} + \frac{\nu}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \operatorname{sen} \nu x \, dx = \nu b_\nu,$$

verificando-se demonstração semelhante para os outros enunciados.

A desigualdade de Bessel, aplicada à função $g(x)$ dá, pois,

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu^2 (a_\nu^2 + b_\nu^2) = \sum_{\nu=1}^{n} (c_\nu^2 + d_\nu^2) \leqq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} [g(x)]^2 \, dx.$$

Se, para abreviar, designarmos o segundo membro por M^2, e aplicarmos a desigualdade de Schwarz, acharemos que, quando $m > n$,

$$\sum_{\nu=n+1}^{m} | a_\nu \cos \nu x + b_\nu \operatorname{sen} \nu x | \leqq \sum_{\nu=n+1}^{m} \sqrt{a_\nu^2 + b_\nu^2}$$
$$= \sum_{\nu=n+1}^{m} \left(\frac{1}{\nu} \nu \sqrt{a_\nu^2 + b_\nu^2} \right) \leqq M \sqrt{\sum_{\nu=n+1}^{m} \frac{1}{\nu^2}},$$

visto que $\sqrt{a_\nu^2 + b_\nu^2}$ é a amplitude da função periódica $a_\nu \cos \nu x + b_\nu \operatorname{sen} \nu x$.

Graças, porém à convergência de $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2}$, o segundo membro, que é independente de x, pode ser tornado tão pequeno quanto desejarmos, escolhendo-se n e m suficientemente grandes, o que demonstra a convergência absoluta e uniforma da série [1].

A fim d provar o teorema acima para funções secionalmente regulares, consideramos uma *função especial*, $\psi(x)$, dêste tipo.

(1) As mesmas considerações mostram, incidentalmente, que a soma $\sum^{n} \nu^{2h}(a_\nu^2 + b_\nu^2)$ se mantém abaixo de um limite fixo, para as funções periódicas com derivadas contínuas de ordem $(h-1)$ e, pelo menos, com derivadas secionalmente contínuas, de ordem h. Êste procedimento dá uma indicação precisa e definida, sôbre a ordem em que os coeficientes de Fourier se anulam. Para tais funções, as séries de Fourier das derivadas superiores à de ordem $(h-1)$, convergem absoluta e uniformemente.

No domínio $-\pi < x < \pi$, a definição estabelece a igualdade entre $\psi(x)$ e x. Fora dêste intervalo, $\psi(x)$ é desenvolvida periòdicamente. De acôrdo com o exposto na página 440, a sua série de Fourier será

$$2\left(\frac{\operatorname{sen} x}{1} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} - + \dots\right).$$

Esta série não pode ser uniformemente convergente, porque sua soma é a função descontínua $\psi(x)$. Mostraremos, entretanto, que a convergência é uniforme em qualquer intervalo $-l \leqq x \leqq l$, para o qual $0 < l < \pi$.

A demonstração é baseada num artifício especial [1]. Observamos que, no intervalo $-l \leqq x \leqq l$, a função $\cos\frac{x}{2}$ jamais é menor do que a quantidade positiva $\cos\frac{l}{2} = \kappa$. Multiplicando-se o valor absoluto da diferença entre as somas parciais de ordem m e n da série acima ($m > n$), isto é, a expressão

$$\begin{aligned} &| S_m(x) - S_n(x) | \\ &\quad = 2\left|\frac{\operatorname{sen}(n+1)x}{n+1} - \frac{\operatorname{sen}(n+2)x}{x+2} + - \dots \pm \frac{\operatorname{sen} mx}{m}\right| \end{aligned}$$

pela função $\cos\frac{x}{2}$, teremos, de acôrdo com a fórmula trigonométrica conhecida, $2 \operatorname{sen} u \cos v = \operatorname{sen}(u+v) + \operatorname{sen}(u-v)$, o valor absoluto da expressão

$$\begin{aligned} &2\cos\frac{x}{2}\left[\frac{\operatorname{sen}(n+1)x}{n+1} - \frac{\operatorname{sen}(n+2)x}{n+2} + - \dots \pm \frac{\operatorname{sen} mx}{mx}\right] \\ &\qquad = \frac{\operatorname{sen}(n+3/2)x}{n+1} - \frac{\operatorname{sen}(n+5/2)x}{n+2} + - \dots \pm \frac{\operatorname{sen}(mx+1/2)x}{m} \\ &+ \frac{\operatorname{sen}(n+1/2)x}{n+1} - \frac{\operatorname{sen}(n+3/2)x}{n+2} + \frac{\operatorname{sen}(n+5/2)x}{n+3} - + \dots . \end{aligned}$$

(1) Somos conduzidos, naturalmente, a êste artifício, observando que a função $2y \cos y$, desenvolvida periòdicamente. além do intervalo $-\frac{\pi}{2} \leqq y \leqq \frac{\pi}{2}$ permanece contínua e, de acôrdo com a primeira parte do teorema, a sua série de Fourier deve convergir uniformemente e representar a função. Tal série, entretanto, será obtida pela multiplicação da série de Fourier referente a $2y$ por $\cos y$. Se fizermos $y = x/2$, a multiplicação dará a série considerada no texto.

Reduzindo-se os têrmos do segundo membro que têm os mesmos numeradores, obteremos a relação

$$\frac{\operatorname{sen}(n+\frac{1}{2})x}{n+1} \pm \frac{\operatorname{sen}(m+\frac{1}{2})x}{m}$$

$$+\frac{\operatorname{sen}(n+\frac{3}{2})x}{(n+1)(n+2)} - \frac{\operatorname{sen}(n+\frac{5}{2})x}{(n+2)(n+3)} + - \dots \mp \frac{\operatorname{sen}(m-\frac{1}{2})x}{(m-1)m},$$

mas, como $\cos\frac{x}{2} \geqq \kappa$, e $|\operatorname{sen} u| \leqq 1$, teremos a aproximação

$$|S_m(x) - S_n(x)|$$
$$\leqq \frac{1}{\kappa}\left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{m} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{1}{(m-1)m}\right].$$

O segundo membro, porém, não depende de x e, em virtude da convergência da série $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu(\nu+1)}$, pode ser tomado tão pequeno quanto quisermos, pela escolha de n e m suficientemente grandes. Isto implica na convergência uniforme da série de Fourier, conforme tínhamos afirmado.

Uma vez obtido o desenvolvimento de uma função descontínua particular, podemos (pág. 441) transferir a descontinuidade para qualquer ponto arbitrário do intervalo, pela translação da curva ou do sistema de coordenadas. Efetivamente, a função

$$\psi(x-\xi) = 2\left[\frac{\operatorname{sen}(x-\xi)}{1} - \frac{\operatorname{sen}2(x-\xi)}{2} + \frac{\operatorname{sen}3(x-\xi)}{3} - + \dots\right]$$

é contínua, exceto nos pontos $(2k+1)\pi + \xi$, onde k é inteiro. Passando êstes pontos, porém, a função salta de -2π, do valor de π ao de $-\pi$, enquanto nos próprios pontos o seu valor é zero.

Se $f(x)$ fôr uma função secionalmente regular, descontínua sòmente nos pontos $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$, do intervalo $-\pi \leqq x \leqq \pi$, e se passando por êstes pontos, da esquerda para a direita, ela saltar de $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m$, respectivamente, a função

$$f(x) + \frac{\delta_1}{2\pi}\psi(x+\pi-\xi_1) + \frac{\delta_2}{2\pi}\psi(x+\pi-\xi_2) + \dots$$
$$+ \frac{\delta_m}{2\pi}\psi(x+\pi-\xi_m)$$

será contínua e secionalmente regular, e, portanto, pela demonstração anterior, poderá ser desenvolvida numa série de Fourier, uniformemente convergente. Obtemos, assim, a série de Fourier da função $f(x)$, somando têrmo a têrmo um número finito de séries de Fourier, correspondentes às funções $-\frac{\delta_1}{2\pi}\psi(x+\pi-\xi_1), \ldots, -\frac{\delta_m}{2\pi}\psi(x+\pi-\xi_m)$. O teorema fica, pois, demonstrado.

Êste resultado é perfeitamente adequado para a maioria das investigações práticas e das aplicações. Devemos, porém, assinalar que o estudo desta série levou ainda mais longe. As condições aqui estabelecidas para os desenvolvimentos em série de Fourier são *suficientes*, porém, de modo algum, *necessárias*. Funções com propriedades de continuidade muito menores do que as que estudamos podem, também, ser representadas por séries de Fourier. Há bibliografia abundante sôbre estas questões e sôbre o problema geral do desenvolvimento das funções segundo a série de Fourier. Como resultado notável destas investigações, citaremos a existência de funções contínuas cujas séries de Fourier não convergem em intervalo algum, por menor que êle seja. Um resultado desta espécie não impugna, de modo algum, a utilidade da série de Fourier; pelo contrário, deve ser admitido como evidente que o conceito de função contínua envolva possibilidades razoàvelmente complicadas, como já demonstramos, com a apresentação de tais funções que não possuem derivada em parte alguma.

APÊNDICE AO CAPÍTULO IX

Integração de séries de Fourier

Uma das propriedades mais notáveis das séries de Fourier é a sua integrabilidade têrmo por têrmo. Em geral, tôda a série uniformemente convergente pode ser integrada têrmo por têrmo; de outro modo a integração conduzirá a resultados falsos. Em contraste com isto, temos o seguinte teorema para as séries de Fourier:

Quando $f(x)$ *fôr secionalmente contínua no domínio* $-\pi \leqq x \leqq \pi$, *e* $\frac{1}{2}a_0 + \Sigma\,(a_\nu \cos x + b_\nu \operatorname{sen} x)$ *fôr a série de Fourier correspondente a*

f(x), *esta série pode ser integrada têrmo a têrmo entre dois limites quaisquer* ξ e x *do intervalo* $-\pi \leqq x \leqq \pi$. *Em símbolos,*

$$\int_\xi^x f(x)\,dx = \int_\xi^x \tfrac{1}{2} a_0\,dx + \sum_1^\infty \left(\int_\xi^x a_\nu \cos \nu x\,dx + \int_\xi^x b_\nu \operatorname{sen} \nu x\,dx \right).$$

Além disso, para qualquer valor fixo de ξ *a série do segundo membro será uniformemente convergente em* x. O notável neste teorema é que não sòmente é desnecessário supor que a série de Fourier correspondente a $f(x)$ seja uniformemente convergente, como também não precisamos admitir que ela convirja.

Para demonstrá-lo, seja a função $F(x)$ definida pela equação $F(x) = \int_{-\pi}^x [f(x) - \tfrac{1}{2} a_0]\,dx$. Esta função é secionalmente regular e, pela definição de a_0, temos $F(\pi) = F(-\pi) = 0$, de sorte que $F(x)$ pode ser desenvolvida periódica e continuamente. A série de Fourier $\tfrac{1}{2}A_0 + \sum_{\nu=1}^\infty (A_\nu \cos \nu x + B_\nu \operatorname{sen} \nu x)$ correspondente à função $F(x)$ converge, portanto, uniformemente para $F(x)$. Procuremos, agora, determinar os coeficientes de A_ν e B_ν. Pela integração por partes (como na pág. 449) achamos que, para $\nu > 0$, $A_\nu = -b_\nu/\nu$ e $B_\nu = a_\nu/\nu$. Logo, para quaisquer valores ξ e x do intervalo $-\pi \leqq x \leqq \pi$, teremos

$$\begin{aligned} F(x) - F(\xi) &= \sum_{\nu=1}^\infty [A_\nu(\cos \nu x - \cos \nu\xi) + B_\nu(\operatorname{sen} \nu x - \operatorname{sen} \nu\xi)] \\ &= \sum_{\nu=1}^\infty \left[\frac{a_\nu}{\nu}(\operatorname{sen} \nu x - \operatorname{sen} \nu\xi) - \frac{b_\nu}{\nu}(\cos \nu x - \cos \nu\xi) \right], \end{aligned}$$

uniformemente convergente em x. Se substituirmos $F(x)$ pelo seu valor dado pela definição, virá

$$\int_\xi^x f(x)\,dx - \tfrac{1}{2} a_0 \int_\xi^x dx = \sum_{\nu=1}^\infty \left(a_\nu \int_\xi^x \cos \nu x\,dx + b_\nu \int_\xi^x \operatorname{sen} \nu x\,dx\right),$$

o que queríamos demonstrar.

É fácil ver que se $f(x)$ fôr periódica e secionalmente contínua, a integração têrmo por têrmo pode ser efetuada sôbre qualquer intervalo.

Capítulo X

ESBÔÇO DA TEORIA DAS FUNÇÕES DE DIVERSAS VARIÁVEIS

Até aqui lidamos com funções de uma única variável independente. Estudaremos, agora, funções de diversas variáveis independentes, visto as aplicações ao cálculo forçarem-nos a dar êste passo. Efetivamente, as relações que ocorrem na natureza são traduzidas por funções que, geralmente, não dependem de uma só, mas de duas, três, ou mais variáveis independentes. Assim, por exemplo, o volume de um gás ideal será função de uma única variável, a pressão, se mantivermos a temperatura constante, porém, no caso contrário, não o será. Em geral, a temperatura também varia, e o volume dependerá de dois valores, a saber, da pressão e da temperatura; é, portanto, uma função de duas variáveis.

Do ponto de vista da matemática pura, também urge um estudo detalhado das funções de diversas variáveis independentes. Tiraremos vantagem do que expusemos anteriormente, de tal sorte que, em muitos casos, faremos sòmente generalizações ou extensões dos raciocínios já conhecidos.

Em geral é suficiente estudar-se o caso de duas variáveis independentes, x e y, desde que não sejam essenciais novas considerações para a extensão às funções de três ou mais variáveis. A fim de conservarmos a maior simplicidade possível, tanto nos enunciados quanto na notação, consideraremos normalmente só duas variáveis independentes.

Sendo impossível darmos um desenvolvimento sistemático do cálculo diferencial e integral destas funções neste volume, reservamos esta matéria para o II volume dêste tratado. No momento daremos,

apenas, ao leitor, uma visão preliminar dos novos conceitos e operações mais importantes. Freqüentemente nos basearemos na intuição plausível, deixando a demonstração rigorosamente desenvolvida para o II volume.

1. CONCEITO DE FUNÇÃO NO CASO DE DIVERSAS VARIÁVEIS

1. Funções e seus domínios de definição.

As equações da forma

$$u = x^2 + y^2, \quad u = x - y, \quad u = xy, \quad \text{ou} \quad u = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

admitem um *valor funcional u* para cada par de valores (x, y). Nos três primeiros dos nossos exemplos esta correspondência se verifica para qualquer sistema de valores (x, y), ao passo que, no último, ela sòmente tem lugar quando a desigualdade $x^2 + y^2 \leqq 1$ fôr verdadeira.

Nestes casos, u é uma *função das variáveis independentes x e y*. Empregaremos esta expressão sempre que uma lei qualquer dê o valor de u, como *variável dependente*, correspondente a cada par de valores (x, y), num dado conjunto. A relação entre x, y e u pode ser fornecida por uma "equação funcional" como acima, ou por descrição verbal, como por exemplo: "u é a área de um retângulo cujos lados são x e y", ou ainda, ser deduzido de observações físicas, como no caso da declinação magnética para diversas latitudes e longitudes. O essencial é que exista a relação de *correspondência*. Do mesmo modo, u será função de três variáveis independentes, x, y, z se, para cada conjunto de valores (x, y, z) de uma determinada série, existir um valor correspondente de u, fornecido por alguma lei definida; igualmente, no caso geral de n variáveis independentes, $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

O conjunto de valores que o par (x, y) pode receber, é denominado *domínio da definição* da função $u = f(x, y)$. Neste capítulo concentraremos a atenção nos tipos mais simples de domínio de definição. Consideraremos (x, y) limitada ou pela chamada *região retangular* (*domínio*),

$$a \leqq x \leqq b, \quad c \leqq y \leqq d,$$

ou mesmo por um círculo, determinado por uma desigualdade da forma

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 \leqq r^2.$$

No caso de funções de três variáveis x, y, z, podemos ainda considerar sòmente regiões retangulares

$$a \leqq x \leqq b, \quad c \leqq y \leqq d, \quad e \leqq z \leqq f$$

e esféricas

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 \leqq r^2.$$

Quando se tratar de mais de três variáveis independentes, a intuição geométrica falha, porém muitas vêzes é conveniente estender-se a terminologia geométrica a tais casos. Assim, para funções de n variáveis $x_1, \ldots, x_n$, imaginaremos as regiões

$$a_1 \leqq x_1 \leqq b_1, \quad a_2 \leqq x_2 \leqq b_2, \quad \ldots, \quad a_n \leqq x_n \leqq b_n$$

e, também,

$$(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \ldots + (x_n - a_n)^2 \leqq r^2,$$

que chamaremos de regiões retangulares e esféricas, respectivamente.

2. Os tipos mais simples de funções.

Justamente como no caso das funções de uma só variável, as funções mais simples são as *racionais inteiras* ou *polinômios*. O polinômio do primeiro grau, mais geral (função linear), é da forma

$$u = ax + by + c,$$

em que a, b e c são constantes. O polinômio geral do segundo grau é representado por

$$u = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f.$$

O polinômio geral é a soma de têrmos da forma $a_{mn}x^my^n$, onde as quantidades a_{mn} são constantes arbitrárias.

As *funções racionais fracionárias* são quocientes de polinômios; a esta classe pertence, por exemplo, a função *linear fracionária*

$$u = \frac{ax + by + c}{a'x + b'y + c'}.$$

A extração de raízes leva-nos das funções racionais às *algébricas* [1], como por exemplo,

$$u = \sqrt{\frac{x - y}{x + y}} + \sqrt[3]{\frac{(x + y)^2}{x^3 + xy}}.$$

Na construção de funções mais complicadas, de diversas variáveis, quase sempre recaímos nas funções de uma variável, já conhecidas [2]; por exemplo,

$$u = \operatorname{sen}(xy) \quad \text{ou} \quad u = \log(y^2 + \cos \tfrac{1}{2} x).$$

3. Representação geométrica das funções

Assim como representamos as funções de uma variável por curvas, procuramos caracterizar geomètricamente as de duas por meio de *superfícies*; no que segue, examinaremos sòmente funções passíveis de tal representação. Podemos realizar esta representação muito fàcilmente imaginando um sistema de coordenadas no espaço, com as coordenadas x, y e u, e marcando, acima de cada ponto (x, y) do domínio da definição da função, (R), o ponto P, com a terceira coordenada $u = f(x, y)$. À medida que o ponto (x, y) percorrer a região R, P descreverá uma superfície no espaço. Esta superfície será a representação geométrica da função.

Inversamente, na geometria analítica, as superfícies no espaço são representadas por funções de duas variáveis, de sorte que entre tais superfícies e funções devem existir relações recíprocas.

Por exemplo, à função

$$u = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

corresponde o *hemisfério*, situado acima do plano $x\,y$, com raio unitário e centro na origem. À função $u = x^2 + y^2$ corresponde o *parabolóide de revolução*, obtido pela revolução da parábola $u = x^2$ em tôrno do eixo dos u (fig. 1). Os gráficos de $u = x^2 - y^2$ e de $u = xy$ são parabolóides hiperbólicos (fig. 2). Finalmente, a função linear $u = ax + by + c$ é representada, no espaço, por um plano [3].

(1) A definição precisa de "função algébrica" é dada na pág. 485.

(2) Veja-se, também, a seção relativa às funções compostas (pág. 472).

(3) Se uma das variáveis independentes, digamos, y, não ocorrer na função $u = f(x, y)$, de sorte que u dependa exclusivamente de x, isto é, $u = g(x)$, a função será representada no espaço xyu por uma superfície cilíndrica, obtida elevando-se perpendiculares ao plano ux, pelos pontos da curva $u = g(x)$.

A representação por meio das coordenadas retangulares apresenta, entretanto, duas desvantagens. Em primeiro lugar, a intuição falha sempre que tivermos que lidar com três ou mais variáveis independentes. Em segundo lugar, mesmo no caso de duas variáveis independentes, apenas, é muitas vêzes mais conveniente reduzir-se a discussão sòmente ao plano xy, visto que, neste plano, é possível desenhar-se e efetuar construções geométricas, sem dificuldades. Baseando-nos neste ponto de vista, devemos preferir outra representação geométrica da função, baseada nas *linhas de nível*. Tomaremos, no plano xy, todos os pontos para os quais $u=f(x, y)$ tem um valor constante, digamos, $u=k$. Em geral tais

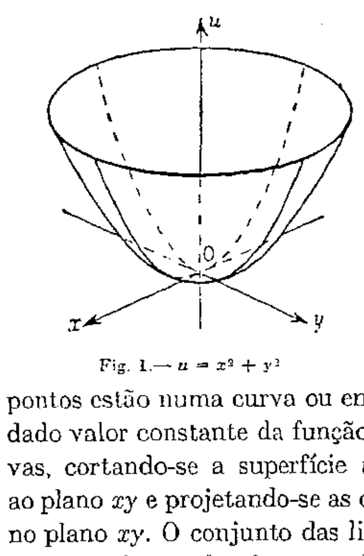


Fig. 1.— $u = x^2 + y^2$

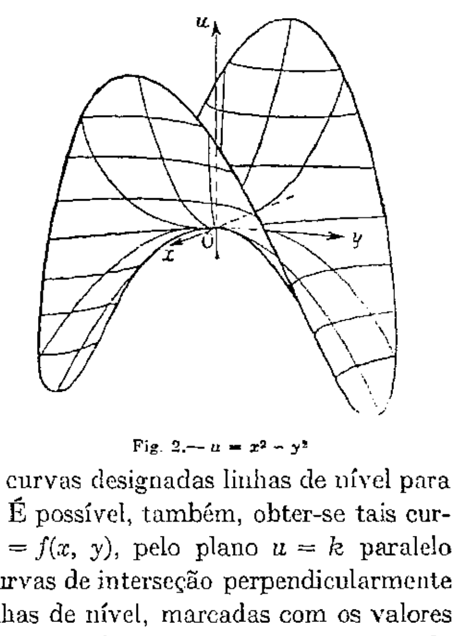


Fig. 2.— $u = x^2 - y^2$

pontos estão numa curva ou em curvas designadas linhas de nível para dado valor constante da função. É possível, também, obter-se tais curvas, cortando-se a superfície $u = f(x, y)$, pelo plano $u = k$ paralelo ao plano xy e projetando-se as curvas de interseção perpendicularmente no plano xy. O conjunto das linhas de nível, marcadas com os valores correspondentes k_1, k_2, ..., de altura k, dá-nos a representação da função. Em geral se atribuem a k valores em progressão aritmética, digamos, $k=vk$, onde $v=1, 2, \ldots$. A distância entre as linhas de nível dá, então, a medida da curvatura da superfície $u = f(x, y)$, visto o valor da função mudar da mesma quantidade entre duas linhas vizinhas. Quando as linhas de nível forem muito próximas, a função decresce ou cai ràpidamente; no caso das linhas se distanciarem, a superfície é achatada. Êste é o princípio segundo o qual se desenham as plantas topográficas e geológicas.

A função linear $u = ax + by + c$ é representada, neste método, por um sistema de linhas retas paralelas $ax + by + c = k$. A função $u = x^2 + y^2$ é representada por um conjunto de círculos concêntricos (*fig.* 3). A função $u = x^2 - y^2$, cuja superfície apresenta um patamar na origem, é representada pelas hipérboles indicadas na figura 4.

O método de representação das funções pelas linhas de nível apresenta a vantagem de poder ser estendido, também, às funções de três variáveis independentes. Em lugar das linhas de nível, usaremos, en-

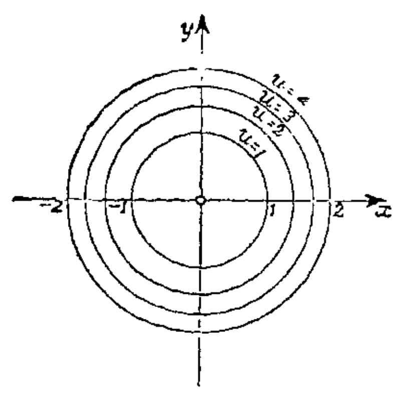


Fig. 3.— Linhas de nível de $u = x^2 + y^2$

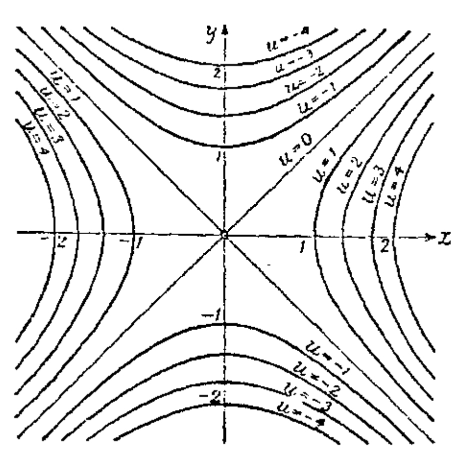


Fig. 4.— Linhas de nível de $u = x^2 - y^2$

tão, as *superfícies de nível* $f(x, y, z) = k$, em que k é uma constante à qual se atribui qualquer seqüência de valores, convenientemente escolhida. Por exemplo, as superfícies de nível da função $u=x^2+y^2+z^2$ são esferas concêntricas com centro na origem do sistema de coordenadas.

EXEMPLO

1. Desenhar as curvas de nível de cada uma das funções seguintes, para $z = -2, -1, 0, 1, 2, 3$.

(*a*) $z = x^2y$.

(*b*) $z = x^2 + y^2 - 1$.

(*c*) $z = x^2 - y^2$.

(*d*) $z = y^2$.

(*e*) $z = y\left(1 - \dfrac{1}{x^2 + y^2}\right)$.

2. Continuidade

1. Definição.

Como no caso de uma só variável, o requisito fundamental para que as funções de duas variáveis independentes possam ser traduzidas geomètricamente, leva-nos à condição analítica de continuidade. Também aqui, o conceito de continuidade é fornecido pela seguinte definição: *qualquer função* u = f(x, y), *definida num domínio* R, *será contínua no ponto* (ξ, η) *de* R *se, para todos os pontos* (x, y) *próximos de* (ξ, η) *o valor da função* f(x, y) *diferir muito pouco de* $f(\xi, \eta)$, *tornando-se tal diferença arbitràriamente pequena, sòmente quando* (x, y) *estiver suficientemente próximo de* (ξ, η).

Mais precisamente: *a função* f(x, y), *definida no intervalo* R, *será contínua no ponto* (ξ, η) *de* R, *desde que, para qualquer número positivo,* ϵ, *seja possível determinar-se uma distância positiva* $\delta = \delta(\epsilon)$ *(em geral dependente de* ϵ *e tendendo para* 0 *com* ϵ*) tal que, para qualquer ponto da região, cuja distância de* (ξ, η) *fôr menor do que* δ *(isto é, para os quais a desigualdade*

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 \leqq \delta^2$$

se verifique) a relação

$$|f(x, y) - f(\xi, \eta)| \leqq \epsilon$$

seja satisfeita. Em outras palavras, a expressão

$$|f(\xi + h, \eta + k) - f(\xi, \eta)| \leqq \epsilon$$

deve verificar-se para todos os pares de valores (h, k) tais que $h^2 + k^2 \leqq \delta^2$ e $(\xi + h, \eta + k)$ pertençam à região R.

Quando uma função fôr contínua em qualquer ponto da região R, diremos que ela é contínua em R.

Na definição da continuidade pode-se substituir a condição de distância $h^2 + k^2 \leqq \delta^2$ pela seguinte, que lhe é equivalente:

A qualquer $\epsilon > 0$ *corresponderão dois valores positivos* δ_1 e δ_2 *tais que*

$$|f(\xi + h, \eta + k) - f(\xi, \eta)| \leqq \epsilon$$

sempre que $\qquad |h| \leqq \delta_1 \quad e \quad |k| \leqq \delta_2.$

Estas duas condições são equivalentes. Se a condição original fôr satisfeita, o mesmo se verificará com a segunda, se tomarmos $\delta_1 = \delta_2 = \delta/\sqrt{2}$.

Recìprocamente, se a segunda condição se verificar o mesmo acontecerá com a primeira, se atribuirmos a δ o menor dos valores δ_1 e δ_2.

Os seguintes fatos são mais ou menos claros:

A soma, a diferença e o produto de funções contínuas são também funções contínuas. O quociente de funções contínuas é uma função contínua, exceto onde o denominador se anular. Funções contínuas de funções contínuas são contínuas (ver a nota das págs. 473, 474). Em particular, *todos os polinômios são contínuos e tôdas as frações racionais são contínuas, salvo quando o denominador se anular* [1].

2. Exemplos de descontinuidades.

No caso de funções de uma só variável, deparamos com três espécies de descontinuidades: descontinuidades infinitas, saltos descontínuos, e descontinuidades em que não há limite de aproximação por um ou por ambos os lados. Para as funções de duas ou mais variáveis, não é possível estabelecer-se classificação tão simples. Em particular, a situação torna-se ainda mais complicada, porque as descontinuidades não ocorrem ùnicamente em pontos isolados, mas também ao longo de curvas inteiras.

Assim, a linha $x = y$ é uma linha de descontinuidade infinita para a função $u = \frac{1}{x - y}$. Como nos aproximamos desta linha, tanto por um como pelo outro lado, segue-se que u cresce numéricamente, além de qualquer limite, através de valores positivos e de valores negativos. A função $u = \frac{1}{(x-y)^2}$ tem a mesma linha de descontinuidade, porém, tende para $+\infty$ quando nos aproximamos da linha por qualquer lado. A função $u = \frac{1}{x^2 + y^2}$ possui o único ponto de descontinuidade $x = 0$, $y = 0$. A função $u = \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ não se aproxima de limite algum, à medida que nos aproximamos da origem. A superfície que a representa é obtida, efetuando-se a rotação de $u = \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ em tôrno do eixo dos u.

Outro exemplo instrutivo de função descontínua é dado pela função racional $u = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$. Esta função é indefinida para $x = 0$, $y = 0$ e podemos suplementar

(1) Outro fato óbvio que, entretanto, merece citação, é o seguinte: *se uma função* $f(x)$ *fôr contínua na região* R, e *diferente de zero no ponto interior* P *da região, será possível estabelecer-se, na vizinhança de* P, *digamos, um círculo, contido inteiramente em* R, *no qual* $f(x, y)$ *não seja igual a zero, em parte alguma.* O valor da função em P sendo a, podemos traçar um círculo tão pequeno em tôrno de P, que o valor da função, no seu interior, seja diferente de a de quantidade menor do que $a/2$, portanto, certamente, diferente de zero.

a definição, admitindo que $u(0, 0) = 0$. Esta equação apresenta um tipo peculiar de descontinuidade na origem. Se fizermos $x = 0$, isto é, se nos deslocarmos ao longo do eixo dos y, a função tornar-se-á $u(0, y) = 0$, com o valor constante 0 para qualquer valor de y. Ao longo do eixo dos x teremos, semelhantemente, $u(x, 0) = 0$. Assim, na origem, a função $u(x, y)$ será contínua em y se atribuirmos a x o valor constante 0, e contínua em x se atribuirmos a y o valor constante 0. Não obstante, a função é descontínua, quando considerada como função das duas variáveis x e y, visto que, em qualquer ponto da linha $x = y$, acharemos que $u = 1$, de modo que podemos determinar pontos arbitràriamente próximos da origem, nos quais u tenha o valor 1. A função é, pois, descontínua na origem (¹), não podendo ser definida em tal ponto, de modo a tornar-se contínua.

O exemplo que acabamos de ver mostra que uma função pode ser contínua em x para qualquer valor fixo de y e contínua em y para qualquer valor fixo de x, sendo, não obstante, descontínua, quando considerada como função das duas variáveis. O ponto essencial, na definição da continuidade, é que o valor da função num ponto P deve ficar arbitràriamente próximo do seu valor no ponto Q, desde que Q esteja situado suficientemente perto de P, não sendo permissível restringir a posição de Q em relação a P de qualquer outra forma.

Exemplos

1. Examinemos a continuidade da função $x = \dfrac{x^2 + y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. Desenhemos as curvas de nível $z = k$ $(k = -4, -2, 0, 2, 4)$. Mostremos (num gráfico) o comportamento de z sòmente como função de x para $y = -2, -1, 0, 1, 2$. Vejamos, ainda, o comportamento de z ùnicamente como função de y, para $x = 0, \pm 1, \pm 2$. Finalmente, estabeleçamos o comportamento de z como função só de r, quando θ fôr constante (r e θ sendo as coordenadas polares).

2. Demonstrar a continuidade das seguintes funções:

(a) $\operatorname{sen}(x^2 + y)$

(b) $\dfrac{\operatorname{sen} xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

(c) $\dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$

(d) $x^2 \log(x^2 + y^2)$.

(¹) Mais geralmente, temos para a linha reta $y = \operatorname{tg} \alpha$ inclinada do ângulo α sôbre o eixo dos x, $u = 2 \operatorname{tg} \alpha/(1 + \operatorname{tg}^2\alpha) = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha = \operatorname{sen} 2\alpha$. A superfície correspondente à função $u = 2xy/(x^2+y^2)$ é, pois, formada pela rotação de uma reta, que forma ângulos retos com o eixo dos x, em tôrno dêle mesmo, até coincidir com êste eixo, e, simultâneamente, elevando-a ou baixando-a, de sorte que a altura $\operatorname{sen} 2\alpha$ esteja associada com o ângulo α. Quando α cresce até 45°, a linha reta se eleva até a altura 1, e subseqüentemente cai ao nível do eixo dos y e abaixo dêle na profundidade 1; depois sobe, de novo, até alcançar o nível do eixo dos x. A superfície descrita pelo movimento da reta é denominada *cilindróide*, tendo importância na mecânica.

3. Determinar se as funções que seguem são ou não contínuas e, no caso negativo, onde são descontínuas:

(a) $\operatorname{sen} \dfrac{y}{x}$. (b) $\dfrac{x^3 + y^2}{x^2 + y^2}$. (c) $\dfrac{x^3 + y^2}{x^3 + y^3}$. (d) $\dfrac{x^3 + y^2}{x^2 + y}$.

3. Derivadas de uma função de diversas variáveis

1. Definição. Representação geométrica.

Atribuindo-se valores numéricos definidos a todas menos uma das variáveis de uma função de diversas variáveis, e permitindo que sòmente uma delas, digamos x, possa variar, a função transformar-se-á numa de uma única variável. Consideremos, por exemplo, a função

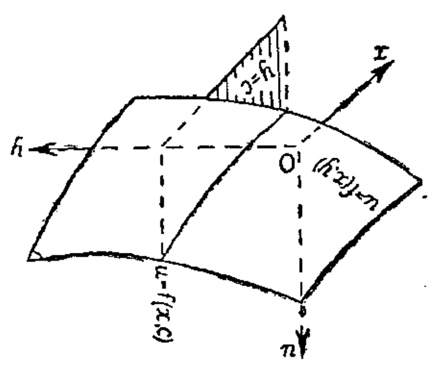


Fig. 5

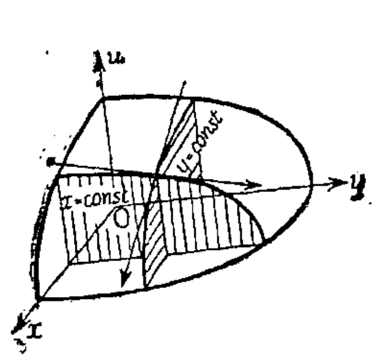


Fig. 6

Seções de $u = f(x, y)$

$u = f(x, y)$ de duas variáveis x e y e demos a y o valor fixo e definido $y = y_0 = c$. A função $u = f(x, y_0)$ da única variável x pode, então, ser representada, geomètricamente, de maneira simples, cortando-se a superfície $u = f(x, y)$ pelo plano $y = y_0$ (figs. 5 e 6). A curva de interseção assim obtida no plano tem para equação $u = f(x, y_0)$. Derivando-se esta função da maneira usual no ponto $x = x_0$ (admitiremos que a derivada exista, efetivamente), teremos *a derivada parcial de* f(x, y) *em relação a* x, no ponto (x_0, y_0). De acôrdo com a definição corrente de derivada, ela será o limite [1]

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h,\ y_0) - f(x_0,\ y_0)}{h}.$$

[1] Se (x_0, y_0) fôr um ponto do contôrno da região da definição, faremos uma restrição: na passagem do limite o ponto $(x + h, y_0)$ deve permanecer sempre na mesma região.

Geomètricamente esta derivada parcial significa a tangente do ângulo compreendida entre uma paralela ao eixo dos x e a tangente à curva $u = f(x, y_0)$. Ela é, portanto, a *inclinação da superfície* $u = f(x, y)$ *na direção do eixo dos* x.

Existem diversas notações para representar esta derivada parcial. Dentre elas, mencionaremos as seguintes:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = f_x(x_0, y_0) = u_x(x_0, y_0).$$

Se quisermos salientar que a derivada parcial é o limite do quociente das diferenças, escreveremos

$$\frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial}{\partial x}f.$$

Empregamos, nesta notação, uma letra especial ∂, em lugar do d comum, empregado na derivação das funções de uma variável, para significar que a operação se refere a uma função de diversas variáveis, e a derivação em relação a uma delas.

Às vêzes é conveniente empregar-se o símbolo de Cauchy, D, mencionado na página 90, e escrever

$$\frac{\partial f}{\partial x} = D_x f;$$

no nosso estudo, porém, raramente usaremos tal notação.

A derivada parcial de $f(x, y)$ em relação a y, no ponto (x_0, y_0), é definida de maneira idêntica pela relação

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k} = f_y(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y} = D_y f(x_0, y_0).$$

Ela representa a inclinação da curva de interseção da superfície $u=f(x,y)$ com o plano $x = x_0$, perpendicular ao eixo dos x.

Imaginemos agora o ponto (x_0, y_0), considerado fixo até aqui, como variável e, de acôrdo com esta hipótese, omitamos os índices 0. Em outras palavras, consideremos a derivação como realizada em qualquer ponto (x, y) da região de definição de $f(x, y)$. As duas derivadas serão, assim, funções de x e y:

$$u_x(x, y) = f_x(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \quad \text{e} \quad u_y(x, y) = f_y(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}.$$

Por exemplo, a função $u = x^2 + y^2$ tem as derivadas parciais $u_x = 2x$ (derivando-se em relação a x, o têrmo y^2 é considerado constante, sendo, portanto, a sua derivada igual a 0) e $u_y = 2y$. As derivadas parciais de $u = x^3y$ são $u_x = 3x^2y$ e $u_y = x^3$.

Podemos, do mesmo modo, estabelecer a seguinte definição para um número qualquer de variáveis independentes (n):

$$\frac{\partial f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_1} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1 + h, x_2, \ldots, x_n) - f(x_1, x_2, \ldots x_n)}{h} = f_{x_1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = D_{x_1} f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

admitindo-se que exista o limite.

Naturalmente, podemos também formar *derivadas parciais de ordem superior* de $f(x, y)$, derivando sucessivamente as derivadas de "primeira ordem", $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$, em relação a cada uma das variáveis. Indicamos a ordem da derivação pelos índices ou pela ordem dos símbolos ∂x e ∂y no "denominador", da direita para a esquerda [1], usando, então, os seguintes símbolos para as derivadas parciais de segunda ordem:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} = D^2{}_{xx} f,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = f_{xy} = D^2{}_{xy} f,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} = f_{yx} = D^2{}_{yx} f,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy} = D^2{}_{yy} f.$$

Da mesma forma, escreveremos as derivadas parciais de terceira ordem, como segue:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = f_{xxx},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial y\, \partial x^2} = f_{yxx},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2\, \partial y} = f_{xxy}, \text{ etc.};$$

(1) Na Europa continental, por outro lado, $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ é escrita, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}$.

e, em geral, a derivada de ordem n, por

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x^{n-1}}\right) = \frac{\partial^n f}{\partial x^n} = f_{x^n},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x^{n-1}}\right) = \frac{\delta^n f}{\partial y\, \partial x^{n-1}} = f_{yx^{n-1}}, \text{ etc.}$$

Finalmente, estudaremos alguns exemplos de cálculo de derivadas parciais. De acôrdo com a definição, tôdas as variáveis independentes menos aquela em relação à qual é efetuada a derivação, são consideradas constantes. Teremos, pois, que considerar as outras variáveis como constantes, efetuando a derivação pelas regras que regem a derivação das funções de uma só variável.

Assim, por exemplo, teremos:

1. Função $\qquad f(x, y) = xy;$

primeiras derivadas: $\qquad f_x = y, f_y = x;$

segundas derivadas: $\qquad f_{xx} = 0, f_{xy} = f_{yx} = 1, f_{yy} = 0.$

2. Função $\qquad f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

primeiras derivadas: $\qquad f_x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad f_y = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$

(As derivadas parciais do raio vector $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, da origem ao ponto (x, y), em relação a x e y, são dadas pelo co-seno $\cos\varphi = x/r$ e pelo seno, $\operatorname{sen}\varphi = y/r$, do ângulo φ que o raio vector faz com a direção positiva do eixo dos x.)

Segundas derivadas:

$$f_{xx} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{x^2 + y^2} = \frac{y^2}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} = \frac{\operatorname{sen}^2\varphi}{r},$$

$$f_{xy} = f_{yx} = -\frac{xy}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} = -\frac{\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi}{r},$$

$$f_{yy} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - \dfrac{y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{x^2 + y^2} = \frac{x^2}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} = \frac{\cos^2\varphi}{r}.$$

3. A função recíproca do raio vector em três dimensões é:

$$f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{1}{r};$$

derivadas de primeira ordem:

$$f_x = -\frac{x}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}} = -\frac{x}{r^3},$$

$$f_y = -\frac{y}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}} = -\frac{y}{r^3},$$

$$f_z = -\frac{z}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}} = -\frac{z}{r^3};$$

derivadas de segunda ordem:

$$f_{xx} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5}, \quad f_{yy} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3y^2}{r^5}, \quad f_{zz} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3z^2}{r^5},$$

$$f_{xy} = f_{yx} = \frac{3xy}{r^5}, \quad f_{yz} = f_{zy} = \frac{3yz}{r^5}, \quad f_{zx} = f_{xz} = \frac{3zx}{r^5}.$$

Donde se verifica que a equação

$$f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = -\frac{3}{r^3} + \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} = 0$$

se verifica para todos os valores de x, y e z, exceto $0, 0, 0$, para a função $f = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.
Como se diz, a equação

$$f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = 0$$

é satisfeita idênticamente em x, y, z, pela função $f(x, y, z) = 1/r$.

4. Função $$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{y}} e^{-(x-a)^2/4y};$$

primeiras derivadas:

$$f_x = \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{-(x-a)}{2y} e^{-(x-a)^2/4y},$$

$$f_y = \left[\frac{-1}{2y^{3/2}} + \frac{(x-a)^2}{4y^{5/2}}\right] e^{-(x-a)^2/4y};$$

segundas derivadas:

$$f_{xx} = \left[\frac{-1}{2y^{3/2}} + \frac{(x-a)^2}{4y^{5/2}}\right] e^{-(x-a)^2/4y},$$

$$f_{xy} = f_{yx} = \left[\frac{3}{4}\frac{x-a}{y^{5/2}} - \frac{(x-a)^3}{8y^{7/2}}\right] e^{-(x-a)^2/4y},$$

$$f_{yy} = \left[\frac{3}{4}\frac{1}{y^{5/2}} - \frac{3}{4}\frac{(x-a)^2}{y^{7/2}} + \frac{(x-a)^4}{16y^{9/2}}\right] e^{-(x-a)^2/4y}.$$

A equação

$$f_{xx} - f_y = 0$$

é, portanto, satisfeita idênticamente em x e y.

Justamente como no caso de uma única variável independente, possuir derivadas é uma propriedade especial das funções [1]. Sempre a mesma, tal propriedade é possuída por tôdas as funções de importância prática, exceto, talvez, em pontos isolados excepcionais.

Em contraste com as funções de uma variável, a existência de derivadas *não* implica na continuidade da função. Isto é claramente demonstrado pelo exemplo $u = \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}$ já estudado nas páginas 464, 465. Apesar de existirem derivadas parciais em tôda a parte, a função
-17 é descontínua na origem. Entretanto, como estabelece o teorema seguinte, a existência de *derivadas com limite* acarreta a continuidade:

Se a função f(x, y) *tiver derivadas parciais* f_x e f_y *em qualquer ponto da região* R *e se tais derivadas satisfizerem em qualquer parte as desigualdades*

$$|f_x(x, y)| < M, \quad |f_y(x, y)| < M,$$

em que M *é independente de* x *e de* y, *a função* f(x, y) *será contínua em qualquer ponto de* R.

Em particular, se f_x e f_y forem contínuas, serão necessàriamente limitadas, de sorte que $f(x, y)$ será também contínua.

A demonstração dêste teorema será apresentada no II volume.

O leitor deve ter observado que em todos os exemplos apresentados a equação $f_{xy} = f_{yx}$ é satisfeita. Em outras palavras, não há diferença se derivarmos a função, primeiro em relação a x e depois em relação a y, ou vice-versa. Esta ocorrência não é acidental, em face do seguinte teorema:

Se as derivadas parciais "mistas" f_{xy} *e* f_{yx} *de uma função* f(x, y) *forem contínuas na região* R, *a equação*

$$f_{yx} = f_{xy}$$

tem lugar em qualquer parte do interior de R, *isto é, a ordem de derivação em relação a* x *e a* y *é indiferente.*

[1] A expressão "derivável" significa *mais* do que a simples existência das derivadas parciais em relação a x e a y. Veja-se o II vol.

Aplicando êste teorema a f_x e f_y, depois a f_{xx}, f_{xy}, f_{yy}, e assim sucessivamente, acharemos que

$$f_{xxy} = f_{xyx} = f_{yxx},$$
$$f_{xyy} = f_{yxy} = f_{yyx},$$
$$f_{xxyy} = f_{xyxy} = f_{xyyx} = f_{yxxy} = f_{yxyx} = f_{yyxx}, \text{ etc.}$$

e, em geral, teremos o seguinte resultado:

Na derivação repetida de uma função de duas variáveis a ordem da derivação pode ser mudada à vontade, desde que, ùnicamente, as derivadas em questão sejam funções contínuas.

Para a demonstração dêste teorema remetemos o leitor ao **II** volume.

EXEMPLOS

1. Achar a primeira derivada parcial de:

(a) $\sqrt[3]{x^2 + y^2}$. (d) $\dfrac{1}{\sqrt{1 + x + y^2 + z^2}}$.

(b) $\operatorname{sen}(x^2 - y)$. (e) $y \operatorname{sen}(xz)$.

(c) $e^{x \cdot y}$. (f) $\log \sqrt{1 + x^2 + y^2}$.

2. Determinar tôdas as derivadas parciais de primeira e de segunda ordem de

(a) xy. (d) x^y.

(b) $\log xy$. (e) e^{xy}.

(c) $\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} y)$.

3.* Achar uma função $f(x, y)$ que seja função de $(x^2 + y^2)$ e que seja, também, um produto da forma $\psi(x)\psi(y)$, isto é, que resolva as equações

$$f(x, y) = \varphi(x^2 + y^2) = \psi(x)\psi(y)$$

em relação às funções incógnitas.

4. REGRA DA CADEIA E DERIVAÇÃO DAS FUNÇÕES INVERSAS

4. Funções de funções (funções compostas).

Acontece, muitas vêzes, que uma função u das variáveis independentes x, y, é dada sob a forma

$$u = f(\xi, \eta, \ldots),$$

em que os argumentos $\xi, \eta, \ldots$, são êles mesmos funções de x e de y:

$$\xi = \phi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y), \quad \ldots .$$

Neste caso, diremos que

$$u = f(\xi, \eta, \ldots) = f[\phi(x, y), \psi(x, y), \ldots] = F(x, y)$$

é uma função composta de x e y.

Por exemplo, a função

$$u = e^{x^2y}(x + y)^3$$

pode ser escrita como função composta, pelas relações

$$u = e^{\xi}\eta^3 = f(\xi, \eta); \ \xi = x^2y, \ \eta = x + y.$$

Do mesmo modo, a função

$$u = \log(x + 1) \, . \operatorname{arc\,cos} \sqrt{4 - x^2 - y^2}$$

pode ser expressa sob a forma

$$u = \eta \operatorname{arc\,cos} \xi = f(\xi, \eta); \quad \xi = \sqrt{4 - x^2 - y^2}, \quad \eta = \log(x + 1).$$

A fim de tornar êste conceito mais preciso suporemos, de início, que as funções $\xi = \phi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$, $\ldots$ são definidas numa certa região das variáveis independentes x, y. A qualquer ponto (x, y) de R, corresponderá um ponto $(\xi, \eta, \ldots)$ do espaço, como coordenadas ξ, η, $\ldots$. À medida que o ponto (x, y) se deslocar sôbre R, o ponto $(\xi, \eta, \ldots)$ descreverá um certo conjunto de valores. Admitiremos que o ponto $(\xi, \eta, \ldots)$ permaneça sempre no interior da região S, para a qual $f(\xi, \eta, \ldots)$ é definida. A função $u = f[\phi(x, y), \psi(x, y), \ldots] = F(x,y)$ será, pois, definida na região R.

Reportando-nos aos exemplos apresentados, achamos no primeiro que ξ e η são definidas para qualquer valor de x, y e $f(\xi, \eta)$ o é para quaisquer ξ, η, de sorte que a região R escolhida pode ser tomada como sendo todo o plano xy. No segundo exemplo, entretanto, a região S é limitada pela desigualdade $|\xi| \leqq 1$, visto que, para $|\xi| > 1$, a função arc cos ξ não é definida. Em segundo lugar, a região R é restringida pelas desigualdades $x + 1 > 0$ a $x^2 + y^2 \leqq 4$, ao passo que ξ e η não são definidos para outros valores. Em terceiro lugar, a região R deve ser limitada, além disso, pela desigualdade $3 \leqq x^2 + y^2$ a fim de que o ponto de coordenadas ξ, η possa cair em S; ou seja, a restrição $|\xi| \leqq 1$ implica $x^2 + y^2 \geqq 3$. Logo, R consiste da parte do círculo $3 \leqq x^2 + y^2 \leqq 4$ que fica à direita da linha $x = -1$.

O seguinte teorema sôbre funções compostas, é conseqüência imediata das definições:

Quando a função $u = f(\xi, \eta, \ldots)$ *fôr contínua em* S *e as funções* $\xi = \phi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$, $\ldots$ *o forem em* R *a função composta* $u = F(x, y)$

será contínua em R. O leitor está habilitado a demonstrar esta tese sòzinho.

2. Regra da cadeia.

Voltemos, agora, nossa atenção para as funções compostas do tipo $u = f(\xi, \eta, \ldots)$, em que $\xi, \eta, \ldots$ dependem da única variável x.

$$\xi = \phi(x), \quad \eta = \psi(x), \ \ldots .$$

Para tais funções temos o importante teorema conhecido como *regra da cadeia*:

Se a função $u = f(\xi, \eta, \ldots)$ *tiver derivadas parciais de primeira ordem, contínuas em* S, *e suas funções* $\xi = \phi(x)$, $\eta = \psi(x)$, ... *tiverem derivadas de primeira ordem contínuas no intervalo* R, $a \leqq x \leqq b$, *teremos* $u = f[\phi(x), \psi(x), \ldots] = F(x)$, *a qual terá derivada contínua em* R, *e*

$$F'(x) = f_\xi \phi'(x) + f_\eta \eta'(x) + \ \ldots .$$

O segundo membro desta equação é uma abreviação de

$$f_\xi[\phi(x), \psi(x), \ldots]\, \phi'(x) + \ \ldots .$$

A fim de simplificar a notação, admitiremos que f é função dos três argumentos ξ, η, ζ. Designaremos por x_0 um ponto fixo arbitrário no intervalo $a \leqq x \leqq b$, por ξ_0, η_0, ζ_0 os valores correspondentes de $\xi_0 = \phi(x_0)$, $\eta_0 = \psi(x_0)$, $\zeta_0 = \chi(x_0)$, e por ξ, η, ζ, os valores de $\phi(x)$, $\psi(x)$, $\chi(x)$, correspondentes ao ponto variável $x = x_0 + h$. Escreveremos, em primeiro lugar, a identidade

$$\begin{aligned} &F(x) - F(x_0) \\ &\qquad = f(\xi, \eta, \zeta) - f(\xi_0, \eta_0, \zeta_0) \\ &\qquad = [f(\xi, \eta, \zeta) - f(\xi_0, \eta, \zeta)] + [f(\xi_0, \eta, \zeta) - f(\xi_0, \eta_0, \zeta)] \\ &\qquad\qquad + [f(\xi_0, \eta_0, \zeta) - f(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)]. \end{aligned}$$

Observamos, em cada colchête do segundo membro, que sòmente uma das variáveis muda de valor. Logo, podemos aplicar o teorema do valor médio das funções de uma só variável a cada um dos colchêtes, obtendo

$$\begin{aligned} &F(x) - F(x_0) \\ &\qquad = (\xi - \xi_0) f_\xi(\bar{\xi}, \eta, \zeta) + (\eta - \eta_0) f_\eta(\xi_0, \bar{\eta}, \zeta) + (\zeta - \zeta_0) f_\zeta(\xi_0, \eta_0, \bar{\zeta}), \end{aligned}$$

em que $\bar{\xi}$ está situado entre ξ_0 e ξ, $\bar{\eta}$ entre η_0 e η, e $\bar{\zeta}$ entre ζ_0 e ζ. A aplicação do teorema do valor médio dá

$$\begin{aligned}\xi - \xi_0 &= \phi(x) - \phi(x_0) = (x - x_0)\,\phi'(x_1),\\ \eta - \eta_0 &= \psi(x) - \psi(x_0) = (x - x_0)\,\psi'(x_2),\\ \zeta - \zeta_0 &= \chi(x) - \chi(x_0) = (x - x_0)\,\chi'(x_3),\end{aligned}$$

onde x_1, x_2 e x_3 ficam entre x_0 e x. Substituindo êstes valores na última equação e dividindo-a por $x - x_0$, teremos

$$\begin{aligned}&\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} =\\ &\quad = f_\xi(\bar{\xi}, \eta, \zeta)\,\phi'(x_1) + f_\eta(\xi_0, \bar{\eta}, \zeta)\,\psi'(x_2) + f_\zeta(\xi_0, \eta_0, \bar{\zeta})\,\chi'(x_3).\end{aligned}$$

Façamos, agora, x tender para x_0. Graças à continuidade de $\phi(x)$, $\psi(x)$ e de $\chi(x)$, as quantidades ξ, η e ζ tendem para ξ_0, η_0 e ζ_0, respectivamente, e, "a fortiori", $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, e $\bar{\zeta}$ devem fazer o mesmo. Do mesmo modo, x_1, x_2 e x_3 tendem para x_0. Como tôdas as funções do segundo membro são contínuas, teremos

$$\begin{aligned}&\lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = F'(x_0)\\ &\quad = f_\xi(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)\,\phi'(x_0) + f_\eta(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)\,\psi'(x_0) + f_\zeta(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)\,\chi'(x_0).\end{aligned}$$

ficando, assim, estabelecida a fórmula para $F'(x)$.

A continuidade de $F'(x)$ decorre imediatamente da fórmula, visto que ϕ', ψ' e χ' são contínuas por hipótese e f_ξ, f_η e f_ζ são funções contínuas.

Êste teorema pode ser ampliado para as funções compostas de duas ou mais variáveis, como segue:

Se a função $u = f(\xi, \eta, \ldots)$ *tiver derivadas parciais de primeira ordem, contínuas na região* S, *e se as funções* $\xi = \phi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$, $\ldots$ *tiverem derivadas parciais de primeira ordem, contínuas em* R, *a função* $u = F(x, y) = f[\phi(x, y), \psi(x, y), \ldots]$ *terá derivadas parciais de primeira ordem, contínuas em* R, *e tais derivadas serão dadas pelas fórmulas*

$$\begin{aligned}F_x &= f_\xi \phi_x + f_\eta \psi_x + \ldots,\\ F_y &= f_\xi \phi_y + f_\eta \psi_y + \ldots.\end{aligned}$$

Estas fórmulas são, em geral, escritas, abreviadamente, como segue

$$\begin{aligned}u_x &= u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x + \ldots,\\ u_y &= u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y + \ldots.\end{aligned}$$

Para deduzi-las introduziremos, temporàriamente, a notação $g(x) = \phi(x, y_0)$, $h(x) = \psi(x, y_0)$, $\ldots$ em que y_0 é um valor fixo de y. Da definição das derivadas parciais deduzimos que $g'(x) = \phi_x(x, y_0)$, $h'(x) = \psi_x(x, y_0)$, $\ldots$. Do mesmo modo, se escrevermos $H(x) = F(x, y_0)$, teremos $H'(x) = F_x(x, y_0)$. Apliquemos o teorema que acabamos de demonstrar à função $u = H(x) = f(\xi, \eta, \ldots) = f[g(x), h(x), \ldots]$, vindo, então,

$$H'(x_0) = f_\xi g'(x_0) + f_\eta h'(x_0) + \ldots .$$

Voltando aos símbolos originais, teremos

$$F_x(x_0, y_0) = f_\xi \phi_x(x_0, y_0) + f_\eta \psi_x(x_0, y_0) + \ldots .$$

A outra fórmula é demonstrada de maneira idêntica.

Se quisermos calcular as derivadas de ordem mais elevada, basta derivar novamente o segundo membro destas fórmulas em relação a x e a y, considerando f_ξ, f_η, $\ldots$ como funções compostas. Então, para $u = f(\xi, \eta) = f[\phi(x, y), \psi(x, y)]$, virá

$$\begin{aligned}
u_{xx} &= f_{\xi\xi}\phi_x^2 + 2f_{\xi\eta}\phi_x\psi_x + f_{\eta\eta}\psi_x^2 + f_\xi\phi_{xx} + f_\eta\psi_{xx},\\
u_{xy} &= f_{\xi\xi}\phi_x\phi_y + f_{\xi\eta}(\phi_x\psi_y + \phi_y\psi_x) + f_{\eta\eta}\psi_x\psi_y + f_\xi\phi_{xy} + f_\eta\psi_{xy},\\
u_{yy} &= f_{\xi\xi}\phi_y^2 + 2f_{\xi\eta}\phi_y\psi_y + f_{\eta\eta}\psi_y^2 + f_\xi\phi_{yy} + f_\eta\psi_{yy}.
\end{aligned}$$

3. Exemplos.[1]

1. $u = e^{x \operatorname{tg} y + y \cos x}$.

Faremos $\xi = x \operatorname{tg} y$, $\eta = y \cos x$, de sorte que $\xi_x = \operatorname{tg} y$, $\xi_y = \dfrac{x}{\cos^2 y}$, $\eta_x = -y \operatorname{sen} x$, $\eta_y = \cos x$. Visto que $e^{\xi+\eta}$, teremos $u_\xi = u_\eta = e^{\xi+\eta}$ e

$$u_x = e^{x \operatorname{tg} y + y \cos x}(\operatorname{tg} y - y \operatorname{sen} x),$$

$$u_y = e^{x \operatorname{tg} y + y \cos x}\left(\frac{x}{\cos^2 y} + \cos x\right).$$

2. Um exemplo de função composta com uma única variável é apresentado por

$$u = [g(x)]^{h(x)} = \xi^\eta = f(\xi, \eta),$$

onde faremos $\xi = g(x)$ e $\eta = h(x)$. Obteremos, imediatamente,

$$\begin{aligned}
\frac{du}{dx} &= f_\xi\xi' + f_\eta\eta' = \eta\xi^{\eta-1}\xi' = \xi^\eta \log \xi . \eta'\\
&= [g(x)]^{h(x)}\left[h(x)\frac{g'(x)}{g(x)} + h'(x)\log g(x)\right].
\end{aligned}$$

Já tratamos um caso especial dêste tipo, embora empregando um método artificial (pág. 203).

(1) Salientaremos que as derivações que seguem podem ser efetuadas diretamente, sem o emprêgo da regra da cadeia.

4. Mudança de variáveis independentes.

Um tipo particularmente importante de funções compostas ocorre no processo de mudança das variáveis independentes. Por exemplo, seja a função $u = f(\xi, \eta)$ de ξ, η, as quais interpretaremos como coordenadas retangulares no plano $\xi\eta$. Se girarmos os eixos de um ângulo θ, no plano dos ξ, η, obteremos um novo sistema de coordenadas x, y, referido a ξ, η, pelas equações:

$$\xi = x\cos\theta - y\,\text{sen}\,\theta, \qquad \eta = x\,\text{sen}\,\theta + y\cos\theta,$$
$$x = \xi\cos\theta + \eta\,\text{sen}\,\theta, \qquad y = -\xi\,\text{sen}\,\theta + \eta\cos\theta.$$

A função $u = f(\xi, \eta)$ pode, então, ser expressa em função das novas variáveis x, y, por:

$$u = f(\xi, \eta) = F(x, y).$$

A regra da cadeia permite escrever

$$u_x = u_\xi\cos\theta + u_\eta\,\text{sen}\,\theta, \quad u_y = -u_\xi\,\text{sen}\,\theta + u_\eta\cos\theta.$$

Assim, as derivadas parciais são transformadas pelas mesmas fórmulas que as variáveis independentes. Isto também se verifica no caso de rotação dos eixos no espaço.

Outro tipo importante de mudança de coordenadas é a passagem das retangulares, x, y, às polares, r, θ. Efetua-se esta mudança por meio das equações

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta,$$
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \theta = \text{arc tg}\,\frac{y}{x}.$$

Verificamos então que para a função arbitrária $u = f(x, y)$, com derivadas parciais de primeira ordem contínuas, virá

$$u = f(x, y) = f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta) = F(r, \theta),$$

$$u_x = u_r r_x + u_\theta\theta_x = u_r\frac{x}{r} - u_\theta\frac{y}{r^2} = u_r\cos\theta - u_\theta\,\frac{\text{sen}\,\theta}{r},$$

$$u_y = u_r r_y + u_\theta\theta_y = u_r\frac{y}{r} + u_\theta\frac{x}{r^2} = u_r\,\text{sen}\,\theta + u_\theta\,\frac{\cos\theta}{r}.$$

Daí obtemos a equação

$$u_x^2 + u_y^2 = u_r^2 + \frac{1}{r^2} u_\theta^2,$$

que é muito empregada.

Consideremos o caso geral do par de funções $\xi = \phi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$, ambas contínuas e possuindo derivadas contínuas na região R do plano xy. Estas equações dão um ponto $\xi = \phi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$ do plano $\xi\eta$, correspondente a cada ponto (x, y) de R. Quando (x, y) percorre R, o ponto correspondente (ξ, η) percorrerá um determinado conjunto de valores S do plano $\xi\eta$. É possível, naturalmente, que diversos pontos distintos (x, y) dêm os mesmos valores ξ, η, assim como que a diversos pontos (x, y) corresponda sòmente um ponto (ξ, η). Admitiremos que êste caso *não* se verifica, mas ao contrário, que a cada ponto $Q(\xi, \eta)$ de S corresponda exatamente *um único ponto* $P(x, y)$ em R. Podemos, assim, considerar a correspondência sob outro ponto de vista, dizendo que Q corresponde a P, ou que P corresponde a Q. Êste último ponto de vista pode ser enunciado como segue: a cada ponto (ξ, η) de S correspondem um x e um determinado y, a saber, as coordenadas de P, ou, em equações há duas funções $x = g(\xi, \eta)$, $y = h(\xi, \eta)$, definidas em S, as quais representam a correspondência inversa de $\xi = \phi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$.

Acontece, por vêzes, que as funções $g(\xi, \eta)$, $h(\xi, \eta)$ não são fáceis de calcular, mesmo no caso de existirem efetivamente. Devemos, pois, procurar determinar as derivadas parciais g_ξ, g_η, h_ξ, h_η, diretamente das derivadas parciais ϕ_x, ϕ_y, ψ_x, ψ_y, sem calcular g e h. Para isto, observemos que se escolhermos qualquer ponto $Q(\xi, \eta)$, determinando o seu ponto correspondente $P[g(\xi, \eta), h(\xi, \eta)]$ em R, achando, então, o ponto S que corresponde a P, o qual é dado por $\phi[g(\xi, \eta), h(\xi, \eta)]$, $\psi[g(\xi, \eta)\ h(\xi, \eta)]$, teremos voltado ao ponto Q. Ou seja, as equações $\xi = \phi[g(\xi, \eta), h(\xi, \eta)]$, $\eta = \psi[g(\xi, \eta), h(\xi, \eta)]$ são identidades em ξ e η. Derivemos [1] agora ambos os membros das duas equações em relação a ξ e η. Teremos

$$1 = \phi_x g_\xi + \phi_y h_\xi, \qquad 0 = \phi_x g_\eta + \phi_y h_\eta,$$

$$0 = \psi_x g_\xi + \psi_y h_\xi, \qquad 1 = \psi_x g_\eta + \psi_y h_\eta.$$

[1] Se uma equação exprime relação de *identidade*, a sua derivação relativamente a qualquer variável independente conduz a outra identidade, como se deduz da definição.

Resolvendo êste sistema de equações, virá

$$g_\xi = \frac{\psi_y}{D}, \ \ g_\eta = -\frac{\phi_y}{D}, \ \ h_\xi = -\frac{\psi_x}{D}, \ \ h_\eta = \frac{\phi_x}{D},$$

ou

$$x_\xi = \frac{\eta_y}{D}, \ \ x_\eta = -\frac{\xi_y}{D}, \ \ y_\xi = -\frac{\eta_x}{D}, \ \ y_\eta = \frac{\xi_x}{D},$$

onde representamos por D o determinante

$$D = \xi_x\eta_y - \xi_y\eta_x = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \xi}{\partial x} & \dfrac{\partial \xi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial x} & \dfrac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix},$$

que admitimos ser diferente de zero.

O determinante D, denominado *determinante funcional* ou *jacobiniano de* (ξ, η) em relação a (x, y), ocorre com tanta freqüência que geralmente se emprega um símbolo especial para o mesmo

$$D = \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)}.$$

EXEMPLOS

1. Calcular as derivadas parciais de primeira ordem de

(a) $f = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy \cos z}}$. (c) $f = x^2 + y \log(1 + x^2 + y^2 + z^2)$.

(b) $f = \text{arc sen}\, \dfrac{x}{z + y^2}$. (d) $f = \text{arc tg}\, \sqrt{x + yz}$.

2. Calcular as derivadas de (a) $f = x^{x^x}$, (b) $f = \left[\left(\dfrac{1}{x}\right)^{1/x}\right]^{1/x}$.

3. Demonstrar que se $f(x, y)$ satisfizer a "equação de Laplace"

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0,$$

deverá se verificar $\phi(x, y) = f\left(\dfrac{x}{x^2 + y^2}, \dfrac{y}{x^2 + y^2}\right)$.

4. Demonstrar que as funções

(a) $f(x, y) = \log \sqrt{x^2 + y^2}$. (b) $g(x, y, z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.

(c) $h(x, y, z, w) = \dfrac{1}{x^2 + y^2 + z^2 + w^2}$,

satisfazem as respectivas "equações de Laplace"

$$(a)\ f_{xx} + f_{yy} = 0. \qquad (b)\ g_{xx} + g_{yy} + g_{zz} = 0.$$
$$(c)\ h_{xx} + h_{yy} + h_{zz} + h_{ww} = 0.$$

5. Dada $z = r^2 \cos\theta$, onde r e θ são coordenadas polares, determinar z_x e z_y no ponto $\theta = \pi/4$, $r = 2$.

Exprimir z_r e z_θ em função de z_x e z_y.

6. A função $u(x, y)$ transforma-se em $U(\xi, \eta)$, função de ξ e de η, fazendo-se $\xi = a + \alpha x + \beta y$, $\eta = b - \beta x + \alpha y$, onde a, b, α e β são constantes e $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Demonstrar que

$$U_{\xi\xi}\, U_{\eta\eta} - U_{\xi\eta}^2 = u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2.$$

7. Estabelecer o determinante jacobiniano das seguintes transformações:

$$(a)\ \xi = ax + by, \quad \eta = cx + dy; \qquad (b)\ r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x};$$
$$(c)\ \xi = x^2, \quad \eta = y^2.$$

8. Se $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ e $u = u(\xi, \eta)$, demonstrar que

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \cdot \frac{\partial(u, v)}{\partial(\xi, \eta)}.$$

9. Como corolário do exemplo anterior (n.º 8) mostrar que

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{1}{\dfrac{\partial(u, v)}{\delta(x, y)}}.$$

10. Com os dados do exemplo 9, determinar o jacobiniano das transformações inversas das do exemplo 7.

5. Funções implícitas

No estudo das funções de diversas variáveis, não obtivemos, até agora, relações análogas às funções inversas. Podemos considerar a função inversa de $y = f(x)$ como a função obtida quando se resolve a equação $y - f(x) = 0$ em relação a x. Nesta seção procuraremos resolver as equações $F(x, y) = 0$ em relação a x ou a y, de modo mais geral, discutindo o comportamento das funções de diversas variáveis, de forma correspondente.

Mesmo na geometria analítica elementar, as curvas são freqüentemente representadas, não pelas equações $y = f(x)$ ou $x = \phi(y)$, mas por uma equação da forma $F(x, y) = 0$, compreendendo x e y. Por

exemplo, o círculo, $x^2 + y^2 - 1 = 0$, a elipse, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, e a lemniscata, $(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0$. Para se obter y em função de x, ou x em função de y, é mister resolver-se a equação em relação a y ou a x. Diremos, então, que a função $y = f(x)$ ou $x = \phi(y)$, assim determinada, é definida, *implìcitamente*, pela equação $F(x, y) = 0$, e que a solução desta equação nos dá a função *explìcitamente*. Nos exemplos que apresentamos acima e em muitos outros a solução é viável e as raízes são obtidas explìcitamente, em funções elementares. Em outros casos, porém, as soluções podem ser expressas em função de séries infinitas ou de outros processos de limites, isto é, as soluções $y = f(x)$ ou $x = \phi(y)$ podem ser tão aproximadas quanto desejarmos.

Basearemos a nossa discussão sôbre a função implícita $F(x, y) = 0$, em vez de recorrermos às soluções exatas ou aproximadas da equação, por ser mais conveniente sob muitos pontos de vista.

A idéia de que tôda a função $F(x, y)$ conduz a $y = f(x)$ ou $x = \phi(y)$ contidas implìcitamente em $F(x, y) = 0$ é errônea, e até é fácil apresentar exemplos de funções $F(x, y)$ que, quando igualadas a zero, não admitem soluções compostas de funções de uma só variável. Assim, por exemplo, a equação $x^2 + y^2 = 0$ é satisfeita pelo único par de valores $x = 0$, $y = 0$, enquanto que $x^2 + y^2 + 1 = 0$ não se verifica para valor algum (real). É, portanto, necessário investigar êste assunto mais detidamente, a fim de saber-se quando a equação $F(x, y)$ pode, efetivamente, ser resolvida, e quais as propriedades da sua solução. Não poderemos estudar estas particularidades, com os detalhes desejados, aqui, porém, apresentaremos as demonstrações rigorosamente desenvolvidas no 2.º volume. Contentar-nos-emos, por ora, com a interpretação geométrica, a qual sugere os resultados desejados.

1. Interpretação geométrica de funções implícitas.

Representaremos a função $u = F(x, y)$ por uma superfície num espaço de três dimensões, a fim de discutirmos geomètricamente o problema que nos ocupa. Determinar os valores (x, y) que satisfazem a equação $F(x, y) = 0$, é o mesmo que estabelecer os valores (x, y) que verificam as duas equações $F(x, y) = u$, $u = 0$; em outras palavras, visamos encontrar a interseção da superfície $u = F(x, y)$ com o plano $u = 0$, que é o próprio plano xy. Suporemos, então, que dispomos de um ponto definido (x_0, y_0) que satisfaz a equação $F(x_0, y_0) = 0$; isto é,

no ponto (x_0, y_0), a superfície $u = F(x, y)$ tem um ponto comum com o plano $u = 0$. (Se êste ponto não existir, não haverá interseção e a equação $F(x, y) = 0$ não poderá ser resolvida.) Se o plano tangente à superfície $u = F(x, y)$ no ponto (x_0, y_0) *não fôr horizontal*, cortará o plano $u = 0$, segundo uma única linha reta. A intuição nos diz, então, que a superfície $u = F(x, y)$, muito próxima do plano tangente, cortará, igualmente, o plano $u = 0$, segundo uma curva única, perfeitamente definida. *A extensão* de tal curva não nos interessa. O plano tangente será horizontal, se ambas as curvas $u = F(x_0, y_0)$ e $u = F(x, y)$ tiverem tangentes lineares horizontais no ponto (x_0, y_0); isto é, se $F_x(x_0\ y_0) = 0$ e $F_y(x_0, y_0) = 0$. Assim, se tanto $F_x(x_0, y_0) \neq 0$ ou $F_y(x_0, y_0) \neq 0$, o plano tangente não será horizontal e, como acabamos de ver podemos esperar uma solução da forma $y = f(x)$ ou $x = \phi(y)$.

Se, por outro lado, tanto $F_x(x_0, y_0)$, como $F_y(x_0, y_0)$ tiverem o valor zero, isto não constitui garantia da existência ou da possibilidade de solução.

Por exemplo, para $F = 1 - \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ a superfície esférica correspondente, $u = 1 - \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ tem o ponto (0,0) comum com o plano xy. As derivadas parciais $F_x(0, 0)$ e $F_y(0, 0)$, são ambas nulas, e verificamos que nenhum outro ponto além de (0, 0) satisfaz a equação $F = 0$. Para a função $F(x, y) = xy$ achamos que $F(0, 0) = 0$, ao passo que $F_x(0, 0) = F_y(0, 0) = 0$. Neste caso, qualquer ponto, tanto do eixo dos x como do eixo dos y satisfaz a equação $F(x, y) = 0$. Na vizinhança da origem, não teremos, portanto, uma única solução, $x = \phi(y)$ ou $y = f(x)$. Vemos, assim, que quando $F_x(x_0, y_0) = F_y(x_0, y_0) = 0$, não há certeza sôbre a existência da solução.

Conseqüentemente, se retornarmos ao caso em que uma das derivadas parciais,— digamos $F_y(x_0, y_0)$, para objetivarmos,— é diferente de zero, a sugestão gráfica de que uma superfície regular possa ser cortada por um plano não-tangente segundo uma curva regular, leva-nos a admitir a veracidade do seguinte teorema:

Se a função $F(x, y)$ *tiver derivadas contínuas* F_x *e* F_y *e se a equação* $F(x_0, y_0) = 0$ *fôr satisfeita no ponto* (y_0, x_0), *ao passo que* $F_y(x_0, y_0)$ *é diferente de zero, podemos marcar, em tôrno do ponto* (x_0, y_0) *um retângulo* $x_1 \leqq x \leqq x_2$, $y_1 \leqq y \leqq y_2$ *de tal modo que, para qualquer* x *do intervalo* $x_1 \leqq x \leqq x_2$, *a equação* $F(x, y) = 0$ *determine sòmente um valor* $y = f(x)$ *pertencente ao domínio* $y_1 \gtreqqless y \gtreqqless y_2$. *Esta função* $y = f(x)$ *satisfaz a equação* $y_0 = f(x_0)$, *enquanto que*

$$F[x, f(x)] = 0$$

é satisfeita por qualquer x *do intervalo. Além disso, a função* y = f(x) *é contínua e possui derivadas contínuas.*

Êste teorema é passível de demonstração rigorosa, como veremos no 2.° volume. Aceitando-o, porém, como provado, é possível acrescentarmos o seguinte:

A derivada da função y = f(x) *é dada pela equação*

$$y' = f'(x) = -\frac{F_x}{F_y}.$$

Obtém-se êste resultado, imediatamente, usando-se a regra da cadeia, visto que $\frac{d}{dx}F[x, f(x)] = F_x\frac{dx}{dx} + F_y\frac{df}{dx} = F_x + F_yf'$. Como, porém, $F[x, f(x)]$ é identicamente nula, sua derivada também o será; logo, $F_x + F_yf' = 0$, ficando assim estabelecida a fórmula.

Considerando-se o segundo membro desta fórmula como uma função composta de x, e derivando-o de acôrdo com a regra da cadeia, substituindo y' por $-F_x/F_y$, virá

$$\begin{aligned} y'' &= -\frac{F_y(F_{xx} + F_{yx}y') - F_x(F_{xy} + F_{yy}y')}{F_y^2} \\ &= -\frac{F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2}{F_y^3}. \end{aligned}$$

Continuando o processo, poderemos calcular y''', y'''', etc.

Empregando esta fórmula, podem-se estabelecer, usualmente, as derivadas das funções implícitas muito mais fàcilmente do que resolvendo-as primeiro, para então derivá-las.

Por exemplo, para o círculo

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

teremos

$$y' = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{x}{y}.$$

A verificação é fácil. Resolvendo a equação do círculo em função de y, obteremos duas soluções, a saber, $y = \sqrt{1 - x^2}$ e $y = -\sqrt{1 - x^2}$, dando os semicírculos superior e inferior, respectivamente. Para o superior, teremos

$$y' = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}},$$

enquanto que, para o inferior virá

$$y' = \frac{+x}{\sqrt{1 - x^2}},$$

de sorte que em qualquer caso, $y' = -\frac{x}{y}$.

Apresentaremos, como outro exemplo, $F(x, y) = e^{x+y} + y - x = 0$. Achamos que $F_x(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = 0$, enquanto que $F_y(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = 2$. A equação tem, assim, a solução $y = f(x)$. O cálculo efetivo da função $f(x)$ pode apresentar dificuldades. Não obstante, temos

$$y' = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{e^{x+y} - 1}{e^{x+y} + 1}.$$

Para que a função $f(x)$ possa ter um máximo ou um mínimo, devemos ter $y' = 0$, isto é, $e^{x+y} - 1 = 0$, donde $y = -x$. Substituindo-se $y = -x$ na equação $F(x, y) = 0$, teremos $1 - 2x = 0$, donde, $x = \frac{1}{2}$, $y = -\frac{1}{2}$. Se calcularmos $f''(x)$ para $x = \frac{1}{2}$ verificaremos que ela é negativa, assim como $-\frac{1}{2}$ é o valor máximo de y.

Êste teorema sugere, imediatamente, uma extensão às funções implícitas de maior número de variáveis independentes:

Seja $F(x, y, \ldots, z, u)$ *uma função contínua das variáveis independentes* $x, y, \ldots, z, u$, *com derivadas parciais contínuas,* $F_x, F_y, \ldots, F_z, F_u$. *Seja, ainda,* $F(x_0, y_0, \ldots, z_0, u_0) = 0$ *e* $F_u(x_0, y_0, \ldots, z_0, u_0) \neq 0$, *para o sistema de valores* $(x_0, y_0, \ldots, z_0, u_0)$. *Podemos, então, determinar um intervalo* $u_1 \leqq u \leqq u_2$ *em tôrno de* u_0, *assim como uma região* R *que contenha* $(x_0, y_0, \ldots, z_0)$ *de tal modo que a equação* $F(x, y, \ldots, z, u) = 0$ *seja satisfeita para qualquer* $(x, y, \ldots, z)$ *de* R, *por um único valor de* u *do intervalo fixado. Tal valor de* u, *que representaremos por* $u = f(x, y, \ldots, z)$, *é função contínua de* $x, y, \ldots, y$, *e possui derivadas parciais contínuas* $f_x, f_y, \ldots, f_z$, *sendo*

$$u_0 = f(x_0, y_0, \ldots, z_0).$$

As derivadas de f *são dadas pelas equações*

$$\begin{aligned} F_x + F_u f_x &= 0, \\ F_y + F_u f_y &= 0, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ F_z + F_u f_z &= 0. \end{aligned}$$

A demonstração da existência e da continuidade de u é apresentada no 2.º volume, para onde, novamente, remetemos o leitor. As fórmulas para f_{xy}, etc., decorrem imediatamente da regra de cadeia.

Incidentalmente, o conceito de função implícita nos capacita a dar uma definição geral do têrmo "função algébrica". Dizemos que $u = f(x, y, \ldots, z)$ é uma *função algébrica* das variáveis independentes

$x, y, \ldots, z$, quando u puder ser definido implìcitamente por uma equação da forma $F(x, y, \ldots, z, u) = 0$, em que F é um polinômio em $x, y, \ldots, z, u$; isto é, se u satisfizer uma "equação algébrica". As funções que não satisfazem equação algébrica alguma são denominadas *transcendentes* (pág. 24).

Como exemplo da fórmula de derivação, vejamos o elipsóide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{u^2}{c^2} - 1 = 0.$$

Teremos, para as derivadas parciais,

$$u_x = -\frac{2x}{a^2} \cdot \frac{c^2}{2u} = -\frac{c^2}{a^2} \cdot \frac{x}{u},$$

$$u_y = -\frac{2y}{b^2} \cdot \frac{c^2}{2u} = -\frac{c^2}{b^2} \cdot \frac{y}{u};$$

derivando, novamente, virá

$$u_{xx} = -\frac{c^2}{a^2} \cdot \frac{1}{u} + \frac{c^2}{a^2} \cdot \frac{x}{u^2} u_x = -\frac{c^2a^2u^2 + c^4x^2}{a^4u^3},$$

$$u_{xy} = +\frac{c^2}{a^2} \cdot \frac{x}{u^2} u_y = -\frac{c^4}{a^2b^2} \frac{xy}{u^3},$$

$$u_{yy} = -\frac{c^2}{b^2} \cdot \frac{1}{u} + \frac{c^2}{b^2} \cdot \frac{y}{u^2} u_y = -\frac{c^2b^2u^2 + c^4y^2}{b^4u^3}.$$

EXEMPLOS

1. Demonstrar que as seguintes equações têm soluções únicas em relação **a** y, nas proximidades dos pontos indicados:

(a) $x^2 + xy + y^2 = 7$ $\quad (2, 1)$.

(b) $x \cos xy = 0$ $\quad \left(1, \frac{\pi}{2}\right)$.

(c) $xy + \log xy = 1$ $\quad (1, 1)$.

(d) $x^5 + y^6 + xy = 3$ $\quad (1, 1)$.

2. Determinar a primeira derivada das soluções do primeiro exemplo.

3. Achar as segundas derivadas das soluções do exemplo 1.

4. Achar os valores máximo e mínimo da função $y = f(x)$ definida pela equação $x^2 + xy + y^2 = 27$.

5. Mostrar que a equação $x + y + z = \operatorname{sen} xyz$ pode ser resolvida em relação a z nas proximidades de $(0, 0, 0)$. Determinar as derivadas parciais da solução.

6. Integrais múltiplas e repetidas

1. Integrais múltiplas.

Consideremos a função $u = f(x, y)$, definida e contínua no retângulo $R(a \leqq x \leqq b,\ c \leqq y \leqq d)$, que admite ùnicamente valores positivos. Queremos atribuir um volume à porção do espaço tridimensional limitado pelo retângulo R, pela superfície $u = f(x, y)$. pelos quatro planos $x = a$, $x = b$, $y = c$, $y = d$, perpendiculares ao plano xy. Além disso, o volume deve ser definido de modo a satisfazer certas condições elementares: (1) se a região tridimensional fôr um prisma, — isto é, se a função u fôr uma constante k, — o volume será igual ao pro-

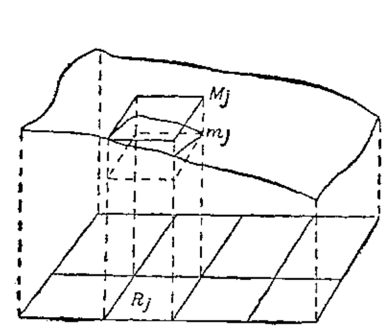


Fig. 7

duto da base pela altura. $V = (b - a)(d - c)k$; (2) se dividirmos o retângulo R em outros menores R_1 e R_2, por meio de linhas retas, o volume construído sôbre R deve ser igual ao volume construído sôbre R_1, mais o correspondente a R_2; (3) se a região tridimensional R_1 contiver R_2 inteiramente, o volume de R_1 será, no mínimo, igual ao de R_2.

Estas considerações conduzem-nos a um método para definir V, o qual é, apenas, uma extensão do método para definir as áreas já apresentado no cap. II (págs. 77 e seg.). Traçando linhas paralelas aos lados, subdividremos o retângulo R nos retângulos menores $R_1, R_2, \ldots, R_n$, cujas áreas representaremos por $\Delta R_1, \Delta R_2, \ldots, \Delta R_n$. Em cada um dos retângulos R_j a função tem um valor extremo inferior, m_j, e um superior, M_j. Portanto, um prisma de base R_j e altura M_j abrange inteiramente a porção do volume citado acima de R_j, ao passo que esta porção de volume contém o prisma de base R_j e altura m_j (fig. 7).

Vemos, assim, que o volume da porção de que estamos nos ocupando fica entre $m_j R_j$ e $M_j T R_j$. O volume total, portanto, será tal que

$$\sum_{j=1}^{n} m_j \Delta R_j \leqq V \leqq \sum_{j=1}^{n} M_j \Delta R_j.$$

Suponhamos, agora, que o número n de retângulos cresce além de qualquer limite, de sorte que o comprimento da maior diagonal tenda para zero. A intuição leva-nos a esperar que as duas somas $\Sigma m_j \Delta R_j$ e $\Sigma M_j \Delta R_j$ sejam ambas convergentes, tendendo para o mesmo limite. Tal limite será, portanto, denominado o *volume V*.

O leitor por certo observou que efetuamos uma generalização imediata da discussão do cap. II (pág. 78). Como naquela ocasião, chamaremos o limite comum das duas somas $\Sigma m_j R_j$ e $\Sigma M_j R_j$, *a integral da função* $u = f(x, y)$ *sôbre o retângulo* R, representando-a pelo símbolo

$$\iint_R f(x, y)\, dr.$$

Ê claro que, se em cada retângulo R_j escolhermos um ponto (ξ_j, η_j), determinando o valor correspondente da função $f(\xi_j, \eta_j)$, a relação limite

$$\lim_{n \to \infty} \Sigma f(\xi_j, \eta_j) \Delta R_j = \iint_R f(x, y)\, dr$$

deverá se verificar, visto a soma $\Sigma f(\xi_j, \eta_j)\Delta R_j$ se achar entre $\Sigma m_j \Delta R_j$ e $\Sigma M_j \Delta R_j$, as quais se aproximam da integral como limites.

Como método particular da subdivisão de R em retângulos menores, podemos dividir o lado $a \leqq x \leqq b$ em n intervalos de comprimento $\Delta x = (b - a)/n$, e o lado $c \leqq y \leqq d$ em m intervalos de comprimento $\Delta y = (d - c)/m$, tirando então paralelas aos eixos pelos pontos de divisão marcados. A área de cada retângulo R_j será, assim, $\Delta R_j = \Delta x \Delta y$. Escolhendo um ponto arbitrário (ξ_j, η_j) em cada retângulo R_j, formaremos a soma

$$\Sigma_j f(\xi_j, \eta_j)\Delta R_j = \Sigma_j f(\xi_j, \eta_j)\Delta x \Delta y.$$

Quando n e m crescerem sem limitação, esta soma aproximar-se-á da integral como limite. O tipo de subdivisão empregado sugere uma outra notação para a integral, a qual se usa, correntemente, desde o tempo de Leibnitz, a saber,

$$\iint_R f(x, y)\, dx\, dy.$$

A demonstração da existência dêste limite, no caso de $u = f(x, y)$ ser contínua, pode ser feita de acôrdo com a exposição apresentada no apêndice do capítulo II (págs. 731 e segs.). Devemos, porém, admitir, mesmo sem demonstração, o seguinte enunciado mais prático:

Se a função f(x, y) *fôr contínua, exceto ao longo de um número finito de curvas regulares* [1] y = f(x) *ou* x = ϕ(y) *nas quais* f(x, y) *apresenta saltos de descontinuidade, a integral dupla*

$$\iint_R f(x, y)\, dr$$

existe.

A demonstração dêste teorema fica transferida para o 2.º volume. Ela se baseia, essencialmente, em que, quando o número de retângulos cresce, a área total, tendo pontos comuns com as curvas de descontinuidade, tende para zero. Assim, embora M_j e m_j possam diferir consideràvelmente para os retângulos, êles dão lugar a uma pequena diferença entre as somas $\Sigma M_j \Delta R_j$ e $\Sigma m_j \Delta R_j$.

Com esta hipótese, podemos determinar a área da superfície $u = f(x, y)$ para a qual (x, y) percorre a região R, mais ou menos complicada. Admitamos, pois, que esta região R seja delimitada por um número finito de curvas $x = \phi(y)$ ou $y = \psi(x)$ com derivadas contínuas, e que $f(x, y)$ seja contínua em R. Fechamos R no retângulo R', e nos pontos de R' que não pertencem a R, damos a $f(x, y)$ o valor 0. Fazemos, então, a integral $\iint_{R'} f(x, y)\, dr$, tomada na região R', representar o volume sob a superfície $u = f(x, y)$, quando (x, y) estiver em R. Representa-se, geralmente, esta integral por $\iint_R f(x, y)\, dr$.

Alguns teoremas simples, porém importantes, decorrem da definição acima. Contentar-nos-emos em enunciar tais teoremas, visto o leitor poder demonstrá-los sem dificuldade.

Se f(x, y) *e* g(x, y) *forem integráveis sôbre um retângulo, o mesmo acontecerá com* f ± g *e com* cf, *sendo* c *uma constante*:

$$\iint_R [f(x, y) \pm g(x, y)]\, dr = \iint_R f(x, y)\, dr \pm \iint_R g(x, y)\, dr,$$

$$\iint_R cf(x, y)\, dr = c \iint_R f(x, y)\, dr.$$

[1] Por curvas regulares designamos, como anteriormente, curvas com derivadas contínuas.

Se $f(x, y) \geqq g(x, y)$ *em* R, *teremos*

$$\iint_R f(x, y)\, dr \geqq \iint_R g(x, y)\, dr.$$

Se R *fôr a soma das regiões* R_1 *e* R_2, *virá*:

$$\iint_R f(x, y)\, dr = \iint_{R_1} f(x, y)\, dr + \iint_{R_2} f(x, y)\, dr.$$

2. Redução das integrais duplas a integrais simples repetidas.

Obtivemos a definição das integrais duplas, com sua interpretação como volume, e com as inúmeras possibilidades de utilização que a nossa experiência com as integrais simples sugere. Não dispomos, porém, até agora, de um método para calculá-las. Nesta seção veremos como é possível avaliar estas integrais, reduzindo o seu cálculo ao de duas integrais simples.

Suporemos que $u = f(x, y)$ é uma função definida e contínua no retângulo R, $a \leqq x \leqq b$, $c \leqq y \leqq d$. Tomando-se um valor qualquer x_0 do intervalo $a \leqq x \leqq b$, a função $f(x_0, y)$ será uma função contínua do resto variável y. Logo, a integral

$$\int_c^d f(x_0, y)\, dy$$

existe, podendo ser calculada pelos métodos apresentados nos capítulos anteriores. Esta integral tem um valor definido para cada valor de x_0 que escolhermos. Em outras palavras, a integral será uma função $\phi(x_0)$ da quantidade x_0;

$$\int_c^d f(x, y)\, dy = \phi(x).$$

Por exemplo, seja $u = f(x, y) = x^2y^3$, $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 3$. A integral $\int_0^3 x^2y^3\, dy$ poderá ser calculada para cada valor fixo de x no intervalo $0 \leqq x \leqq 1$, valendo, efetivamente, $\frac{81}{4}x^2$, ou seja, uma função de x. Por outro lado, se $f(x, y) = e^{xy}$, $1 \leqq x \leqq 2$, $1 \leqq y \leqq 4$, teremos $\int_1^4 e^{xy}\, dy = \frac{1}{x}(e^{4x} - e^x)$.

Tendo determinado, assim, a função $\phi(x)$, podemos demonstrar a sua continuidade, a qual é simples conseqüência da continuidade uni-

forme de $f(x, y)$. É, portanto, possível integrar $\phi(x)$ entre os limites a e b, obtendo-se a "integral repetida"

$$\int_a^b \phi(x)\,dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\,dy\right] dx.$$

Invertendo-se a ordem do processo, isto é, calculando-se primeiro a função de y definida por $\int_a^b f(x, y)\,dx$, e depois integrando-se de c a d, obtém-se a outra integral repetida

$$\int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\,dx\right] dy.$$

Estas integrais, como vimos, são obtidas pela dupla aplicação dos métodos ordinários de integração simples, os quais já foram expostos nos capítulos anteriores. A sua importância reside no seguinte:

Para funções contínuas f(x, y), *e para funções* f(x, y) *que apresentem, no máximo, saltos de descontinuidade num número finito de curvas regulares, as integrais repetidas são iguais às integrais duplas:*

$$\iint_R f(x, y)\,dr = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\,dy\right] dx$$
$$= \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\,dx\right] dy.$$

Contentar-nos-emos com a discussão intuitiva do caso em que $f(x, y)$ for contínua. Na discussão original da integral dupla, considerada como o volume do retângulo de base $a \leqq x \leqq b$, $c \leqq y \leqq d$, sob a superfície $u = f(x, y)$, obtivemos êste volume, subdividindo o sólido em prismas verticais e fazendo com que as diagonais das bases se aproximassem de zero. Podemos, também, em vez disso, dividir o sólido em fatias de largura $k = (d - c)/n$, traçando as linhas $y = c + \nu k$ ($\nu = 0, 1, \ldots, n$) paralelas ao eixo dos x, e fazendo passar um plano perpendicular ao dos xy, em cada uma destas linhas (fig. 8). Tais planos dividem o sólido em n fatias, as quais se tornam cada vez mais delgadas, à medida que n cresce, e cujo volume total é igual à integral dupla. Vemos, pois, que o volume de cada fatia é aproximadamente

(mas não de maneira absoluta, naturalmente), igual ao produto da espessura k pela área da face esquerda, isto é, igual a

$$k \int_a^b f(x, c + \nu k)\, dx.$$

Podemos, portanto, escrever

$$\phi(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx$$

e o volume procurado será, então, representado aproximadamente por

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} k\phi(c + \nu k).$$

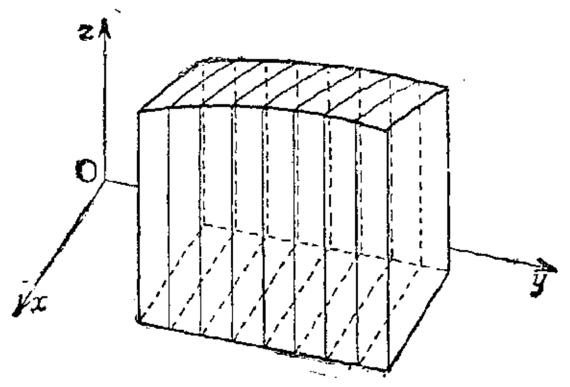


Fig. 8

À medida que $n \to \infty$ estas somas tendem para

$$\int_c^d \phi(y)\, dy.$$

É, pois, razoável esperar que o volume, ou a integral dupla, seja exatamente

$$\int_c^d \phi(y)\, dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\, dx\right] dy,$$

que é o enunciado feito acima. Raciocínio semelhante permite verificar o enunciado

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\, dy\right] dx = \iint_R f(x, y)\, dr$$

3. Exemplos e observações.

Alguns exemplos mostrarão como se emprega êste teorema na avaliação das integrais duplas. A função $u = f(x, y) = x^3y$, $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 2$, dá

$$\iint_R x^3y\, dr = \int_0^1 \left(\int_0^2 x^3y\, dy \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} x^3y^2 \Big|_0^2 \right) dx$$
$$= \int_0^1 2x^3\, dx = \frac{1}{2} x^4 \Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

O exemplo acima pertence a uma classe geral de funções cuja integração é simplificada pelo seguinte teorema:

Se a função u = f(x, y), a ≦ x ≦ b, c ≦ y ≦ d, *puder ser representada pelo produto de uma função sòmente de* x *por outra função sòmente de* y,

$$f(x, y) = \phi(x)\psi(y),$$

a integral dupla de f *será o produto de duas integrais simples*:

$$\iint_R f(x, y)\, dr = \left| \int_a^b \phi(x)\, dx \right| \left| \int_c^d \psi(y)\, dy \right|.$$

Isto se verifica porque, fazendo-se a integração em relação a y, a função $\phi(x)$ pode ser considerada como constante e colocada antes do sinal da integral, enquanto que, integrando-se em relação a x, $\int_c^d \psi(y)\, dy$ será constante. Logo,

$$\int_a^b \left[\int_c^d \phi(x)\psi(y)\, dy \right] dx = \int_a^b \left[\phi(x) \int_c^d \psi(y)\, dy \right] dx$$
$$= \left[\int_c^d \psi(y)\, dy \right] \left[\int_a^b \phi(x)\, dx \right].$$

A função $u = \text{sen}\,(x + y)$, $0 \leqq x \leqq \pi/2$, $0 \leqq y \leqq \pi/2$, nos dá:

$$\iint_R \text{sen}\,(x + y)\, dr = \int_0^{\pi/2} \left[\int_0^{\pi/2} \text{sen}(x + y)\, dy \right] dx$$
$$= \int_0^{\pi/2} \left[-\cos\left(x + \frac{\pi}{2} \right) + \cos x \right] dx = \int_0^{\pi/2} (\text{sen}\, x + \cos x)\, dx$$
$$= (-\cos x + \text{sen}\, x) \Big|_0^{\pi/2} = 1 + 1 = 2.$$

Calculemos de novo o volume V do prisma vertical cuja base, no plano xy, é limitada pelos eixos coordenados e pela linha $x + y = 1$, e que fica abaixo do plano $u = 2x + 3y$. Em primeiro lugar estendamos, a função $u = f(x, y)$ ao qua-

drado $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 1$, igualando-a a 0, do lado de fora do triângulo (a base do prisma). Então, para cada valor de x contido no intervalo, a função $f(x, y)$ será diferente de zero sòmente para $0 \leqq y \leqq 1 - x$. Logo,

$$\int_0^1 f(x, y)\,dy = \int_0^{1-x} f(x, y)\,dy = \int_0^{1-x} (2x + 3y)\,dy$$

$$= 2x(1 - x) + \frac{3}{2}(1 - x)^2 = -\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2},$$

e

$$V = \iint_R f(x, y)\,dr = \int_0^1 \left(-\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2}\right) dx = \frac{5}{6}.$$

O artifício empregado é passível de extensão a qualquer função $u = f(x, y)$ definida na região R e limitada, por cima e por baixo, pelas curvas $y = \psi(x)$ e $y = \phi(x)$. Imaginemos que R seja definida pelas desigualdades $a \leqq x \leqq b$, $\phi(x) \leqq y \leqq \psi(x)$. Marquemos o retângulo R', $a \leqq x \leqq b$, $c \leqq y \leqq d$, contendo R completamente, e do lado de fora de R façamos $f = 0$. Teremos

$$\int_c^d f(x, y)\,dy = \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\,dy$$

para qualquer valor de x no intervalo $a \leqq x \leqq b$, de sorte que

$$\iint_R f(x, y)\,dr = \iint_{R'} f(x, y)\,dr = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\,dy\right] dx$$

$$= \int_a^b \left[\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\,dy\right] dx.$$

Para acharmos o volume do elipsóide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{u^2}{c^2} - 1 = 0$, notemos que $\frac{1}{2}V$ é o volume de $u = f(x, y) = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$, sendo a função $f(x, y)$ definida sòmente no interior da elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqq 1, \quad \text{ou} \quad -b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \leqq y \leqq b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, \quad -a \leqq x \leqq a.$$

Calculando a integral repetida, teremos, primeiramente,

$$\int_{-b}^{b} f(x, y)\,dy = \int_{-b\sqrt{1-x^2/a^2}}^{b\sqrt{1-x^2/a^2}} c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\,dy$$

$$= -\frac{1}{2}c\left(b - \frac{bx^2}{a^2}\right) \operatorname{arc\,cos} \frac{y}{\sqrt{b^2 - b^2x^2/a^2}} + \frac{cy}{2}\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\,\Bigg|_{-b\sqrt{1-x^2/a^2}}^{+b\sqrt{1-x^2/a^2}}$$

$$= -\frac{c}{2}\left(b - \frac{bx^2}{a^2}\right)(0 - \pi) + 0 = \frac{c\pi}{2}b\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right).$$

Prosseguindo com a integração, virá

$$\frac{1}{2} V = \int_{-a}^{a} \left[\int_{-b}^{b} f(x, y)\, dy \right] dx = \int_{-a}^{a} \frac{\pi}{2} cb \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \frac{\pi c}{2} b \left(x - \frac{x^3}{3a^2}\right)\Big|_{-a}^{a}$$
$$= \frac{\pi}{2} cb \left(\frac{4}{3} a\right) = \frac{2\pi}{3} abc.$$

de modo que $$V = \frac{4}{3} \pi abc.$$

4. Coordenadas polares.

Na definição da integral dupla, a subdivisão em retângulos foi escolhida, naturalmente, por ser a mais conveniente em relação às coordenadas retangulares. Como sabemos, porém, há muitas aplicações nas quais as coordenadas polares são mais adequadas do que as retangulares. Considerando-se a função $f(\rho, \phi)$ em que ρ e ϕ são as coordenadas polares, a subdivisão mais conveniente não será em retângulos, mas sim em regiões limitadas por arcos de círculo ρ = constante e raio ϕ = constante. Suponhamos, então, que a função $f(\rho, \phi)$ é definida na região R, determinada pelas desigualdades $a \leqq \rho \leqq b$, $\alpha \leqq \phi \leqq \beta$ (Se $f(\rho, \phi)$ fôr definida originàriamente numa região R', não dêste tipo, incluiremos R' numa região R, maior, da forma desejada, e faremos $f(\rho, \phi) = 0$, fora de R'.) Como anteriormente (pág. 486) introduziremos os pontos de subdivisão $\rho_0 = a, \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n = b$, $\phi_0 = \alpha$, $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_m = \beta$, traçando os correspondentes raios e arcos de círculo, dividindo, assim, R nas regiões R_{ij} de área ΔR_{ij}. Em cada R_{ij} escolheremos um ponto (ρ_{ij}, ϕ_{ij}) e faremos a soma $\Sigma f(\rho_{ij}, \phi_{ij}) \Delta R_{ij}$, deixando, então, m e n crescerem sem limite. A soma tenderá, novamente, para o volume correspondente à superfície $u = f(\rho, \phi)$, podendo ser representado pela integral

$$\iint_R f(\rho, \phi)\, dr.$$

Até aqui, nada de essencialmente novo. O importante é saber como calcular estas integrais, reduzindo-as a integrais repetidas ou a integrais em função de coordenadas retangulares. Para isto, tracemos um par de eixos retangulares num novo plano, o plano $\rho\phi$, chamando os eixos assim traçados, eixo dos ρ e eixo dos ϕ, respectivamente. Marcamos um ponto no plano $\rho\phi$ com as coordenadas retangulares, ρ, ϕ,

correspondente ao ponto de R com as *coordenadas polares* ρ, ϕ. Assim, a região R, $a \leqq \rho \leqq b$, $\alpha \leqq \phi \leqq \beta$ será representada no plano $\rho\phi$ pelo retângulo R', $a \leqq \rho \leqq b$, $\alpha \leqq \phi \leqq \beta$, e cada uma das regiões parciais R_{ij}, $\rho_{i-1} \leqq \rho \leqq \rho_i$, $\phi_{j-1} \leqq \phi \leqq \phi_j$, pelos pequenos retângulos R_{ij}. Entretanto, a área $\Delta R_{ij}'$ do retângulo R_{ij}' *não é* a mesma área ΔR_{ij} de R_{ij}. A relação existente entre elas é estabelecida com facilidade. A área $\Delta R_{ij}'$ é simplesmente $(\phi_j - \phi_{j-1})(\rho_i - \rho_{i-1})$, ao passo que a área ΔR_{ij} é dada pela fórmula

$$\begin{aligned}\Delta R_{ij} &= \tfrac{1}{2}(\phi_j - \phi_{j-1})(\rho_i^2 - \rho_{i-1}^2)\\ &= \tfrac{1}{2}(\rho_i + \rho_{i-1})(\phi_j - \phi_{j-1})(\rho_i - \rho_{i-1}) = \tfrac{1}{2}(\rho_i + \rho_{i-1})\Delta R_{ij}'.\end{aligned}$$

Escolhamos, agora, em cada região R_{ij} o ponto $\bar{\rho}_i = \tfrac{1}{2}(\rho_i + \rho_{i-1})$, $\bar{\phi}_j = \tfrac{1}{2}(\phi_j + \phi_{j-1})$. Teremos, por definição,

$$\iint_R f(\rho, \phi)\, dr = \lim \Sigma f(\bar{\rho}_i, \bar{\phi}_j)\Delta R_{ij}.$$

Mas, $$\Sigma f(\bar{\rho}_i, \bar{\phi}_j)\Delta R_j = \Sigma f(\bar{\rho}_i, \bar{\phi}_j)\bar{\rho}_i \Delta R_{ij}',$$

sendo a última expressão, justamente, a soma formada na definição da integral dupla da função $f(\rho, \phi)\rho$, sôbre o retângulo R', no plano $\rho\phi$. Logo, à medida que a largura da subdivisão diminuir, a soma aproximar-se-á da integral, e

$$\begin{aligned}\iint_R f(\rho, \phi)\, dr &= \iint_{R'} f(\rho, \phi)\rho\, dr' = \iint_{R'} f(\rho, \phi)\rho\, d\rho\, d\phi\\ &= \int_a^b \left[\int_\alpha^\beta f(\rho, \phi)\rho\, d\phi\right] d\rho = \int_\alpha^\beta \left[\int_a^b f(\rho, \phi)\rho\, d\rho\right] d\phi.\end{aligned}$$

Como exemplo, calculemos o volume V da esfera de raio a. O hemisfério superior será dado pela equação $u = \sqrt{a^2 - \rho^2}$, $0 \leqq \rho \leqq a$, $0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$. Assim,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}V &= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^a \sqrt{a^2 - \rho^2}\,\rho\, d\rho\right) d\varphi = \int_0^{2\pi}\left[-\frac{1}{3}(a^2 - \rho^2)^{3/2}\Big|_0^a\right] d\phi\\ &= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} a^3 d\varphi = \frac{2\pi a^3}{3},\end{aligned}$$

de sorte que $V = \dfrac{4}{3}\pi a^3$.

5. Cálculo de $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$.

As fómulas da subseção precedente habilitam-nos a calcular a área sob a curva $y = e^{-x^2}$, $-\infty < x < \infty$, que ocorre freqüentemente na teoria das probabilidades. Esta integração é especialmente interessante, visto podermos avaliar a integral definida entre $-\infty$ e ∞ de uma função da qual não é possível determinar, nem uma função primitiva, nem a integral indefinida.

Consideremos, em primeiro lugar, a integral I_a da *função* $e^{-(x^2+y^2)} = e^{-\rho^2}$ sôbre o círculo $0 \leqq \rho \leqq a$. Ela é dada por

$$I_a = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^a e^{-\rho^2} \rho\, d\rho \right) d\phi = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-a^2} \right) d\phi = \pi(1 - e^{-a^2}).$$

O quadrado $-a \leqq x \leqq a$, $-a \leqq y \leqq a$, contém o círculo $0 \leqq \rho \leqq a$, sendo contido, por sua vez, no círculo $0 \leqq \rho \leqq 2a$, e o integrando $e^{-x^2-y^2}$ é positivo em qualquer posição; logo,

$$\pi(1 - e^{-a^2}) = I_a \leqq \int_{-a}^{a} \left(\int_{-a}^{a} e^{-x^2-y^2}\, dy \right) dx \leqq I_{2a} = \pi(1 - e^{-4a^2}).$$

A integral pode ser escrita sob a forma

$$\int_{-a}^{a} e^{-x^2} \left(\int_{-a}^{a} e^{-y^2}\, dy \right) dx = \left(\int_{-a}^{a} e^{-x^2}\, dx \right)^2,$$

logo

$$\pi(1 - e^{-a^2}) \leqq \left(\int_{-a}^{a} e^{-x^2}\, dx \right)^2 \leqq \pi(1 - e^{-4a^2}).$$

Se deixarmos, agora, a crescer sem limite, teremos a equação

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi},$$

ficando, assim, calculada a integral proposta.

6. Momento e centro de massa. Momentos de inércia.

No cap. V, § 2 (pág. 283) vimos que o momento de um sistema de pontos $P_1, P_2, \ldots, P_n$, tendo por coordenadas (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\ldots$, (x_n, y_n) e massas m_1, m_2, $\ldots$, m_n, em relação ao eixo dos x, é dado por $\sum_{\nu=1}^{n} m_i y_i$, e que a ordenada do seu centro de massa é fornecida pela equação

$$\eta = \frac{1}{M} \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu y_\nu, \quad \text{onde} \quad M = \sum_{\nu=1}^{n} m_i,$$

com expressões análogas para o momento em relação ao eixo dos y, e para a abscissa do centro de massa. Estenderemos, agora, estas con-

siderações às massas distribuídas uniformemente na região R. Suporemos que a massa está distribuída com a densidade 1 em tôda a região R, isto é, que cada porção de R com a área ΔR tenha, também, a massa ΔR. A massa total M de R será, pois, igual à área de R,

$$M = \iint_R dr.$$

Dividamos R em porções $R_1, \ldots, R_n$ com áreas $\Delta R_1, \ldots, \Delta R_n$ e, numa certa porção R_ν fixemos um ponto (ξ_ν, η_ν). Se imaginarmos que a massa total de ΔR_ν da porção R_ν está concentrada no ponto (ξ_ν, η_ν), o momento do sistema resultante de pontos em relação ao eixo dos x será $\Sigma\, \eta_\nu \Delta R_\nu$, sendo a ordenada do centro de gravidade

$$\frac{\Sigma \eta_\nu \Delta R_\nu}{\Sigma \Delta R_\nu} = \frac{\Sigma \eta_\nu \Delta R_\nu}{M}.$$

Fazendo-se $n \to \infty$, enquanto o diâmetro da maior R tende para 0, as somas acima tenderão para as integrais

$$T_x = \iint_R y\, dr, \qquad \eta = \frac{\iint_R y\, dr}{M}$$

respectivamente. Estas expressões serão tomadas como as *definições* do momento T_x de R em relação ao eixo x, e da ordenada η do seu centro de massa. Da mesma forma, o momento em relação ao eixo dos y e a abscissa ξ do centro de massa, são dados, respectivamente, por

$$T_y = \iint_R x\, dr, \quad \xi = \frac{\iint_R x\, dr}{M}, \quad \text{onde} \quad M = \iint_R dr.$$

Por exemplo, o momento do semicírculo R, $-\rho \leqq x \leqq \rho$, $0 \leqq y \leqq \sqrt{\rho^2 - x^2}$, em relação ao eixo dos x, será:

$$T_x = \iint_R y\, dr = \int_{-\rho}^{\rho} \left(\int_0^{\sqrt{\rho^2 - x^2}} y\, dy \right) dx$$
$$= \int_{-\rho}^{\rho} \frac{1}{2} (\rho^2 - x^2) dx = \frac{1}{2} \left(\rho^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-\rho}^{\rho} = \frac{2}{3} \rho^3,$$

e visto que $M = \iint_R dr = \text{área } R = \frac{1}{2} \pi \rho^2,$

$$\eta = \frac{2}{3} \rho^3 \div \left(\frac{1}{2} \pi \rho^2 \right) = \frac{4}{3} \frac{\rho}{\pi}.$$

Partindo da definição do momento de inércia I_x de um sistema de partículas,

$$I_x = \Sigma m_\nu y_\nu^2,$$

e empregando raciocínio semelhante, obteremos a expressão do momento de inércia da região R em relação ao eixo dos x:

$$I_x = \iint_R y^2\,dr,$$

e, da mesma forma, teremos o momento de inércia em relação ao eixo dos y,

$$I_y = \iint_R x^2\,dr.$$

Fórmulas análogas são estabelecidas para regiões tridimensionais R; as coordenadas ξ, η, ζ, do centro de massa serão dadas por

$$\xi = \frac{\iiint_R x\,dr}{M}, \quad \eta = \frac{\iiint_R y\,dr}{M}, \quad \zeta = \frac{\iiint_R z\,dr}{M},$$

onde $M = \iiint_R 1\,dr =$ volume de R. Para estabelecermos os momentos de inércia I_x, I_y, I_z de R em relação aos eixos dos x, y, z, respectivamente, lembraremos que a distância do ponto (x, y, z) ao eixo dos x, é $\sqrt{y^2 + z^2}$; logo, para o sistema de partículas, o momento de inércia, em relação ao eixo dos x será $\Sigma m_\nu \sqrt{(y_\nu^2 + z_\nu^2)^2} = \Sigma m_\nu (y_\nu^2 + z_\nu^2)$. Dividindo R em sub-regiões e passando ao limite como o fizemos anteriormente, teremos a fórmula

$$I_x = \iiint_R (y^2 + z^2)\,dr.$$

Semelhantemente,

$$I_y = \iiint_R (x^2 + z^2)\,dr,$$

$$I_z = \iiint_R (x^2 + y^2)\,dr.$$

Assim, o momento de inércia do cubo, $-h \leqq x \leqq h$, $-h \leqq y \leqq h$, $-h \leqq z \leqq h$ em relação ao eixo dos x, é:

$$\begin{aligned} I_z &= \int_{-h}^{h} \left\{ \int_{-h}^{h} \left[\int_{-h}^{h} (x^2 + y^2)\,dz \right] dy \right\} dx \\ &= \int_{-h}^{h} \left[\int_{-h}^{h} 2h(x^2 + y^2)\,dy \right] dx = \int_{-h}^{h} 2h \left(2x^2 h + \frac{2}{3} h^3 \right) dx \\ &= \frac{4h}{3} (x^3 h + x h^3) \Big|_{-h}^{h} = \frac{4h}{3} (4h^4) = \frac{16}{3} h^5. \end{aligned}$$

A importância do momento de inércia, como já observamos no capítulo V (pág. 286), reside em que êle desempenha, no movimento rotativo, o mesmo papel que a massa no movimento de translação. Por exemplo, se a região R girar em tôrno do eixo dos x com a velocidade angular ω, a sua energia cinética será $\frac{1}{2}I_x\omega^2$. Esta, porém, não é a única aplicação do conceito de momento de inércia; êle é igualmente importante, por exemplo, no cálculo das estruturas, em que se estabeleceu que a resistência das vigas de um determinado material é proporcional ao momento de inércia da seção transversal em relação a uma linha que passe pelo seu centro de massa. O leitor encontrará amplos detalhes sôbre êste assunto em qualquer tratado de resistência dos materiais.

7. Outras aplicações.

O leitor por certo não terá imaginado que as aplicações que temos apresentado tenham esgotado as possibilidades da integral dupla. Por exemplo, não demonstramos o importante teorema que afirma que a área A da superfície $z = f(x, y)$, em que (x, y) está em R, é dada pela integral

$$A = \iint_R \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dr$$

desde que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sejam contínuas. Deixamos igualmente de lado muitos outros aspectos interessantes, os quais serão desenvolvidos no 2.º volume, visto não se situarem entre as finalidades do presente volume.

Exemplos

1. Efetuar as seguintes integrações:

(a) $\displaystyle\int_0^a \int_0^b xy\,(x^2 - y^2)dy\,dx.$

(b) $\displaystyle\int_0^\pi \int_0^\pi \cos\,(x + y)dy\,dx.$

(c) $\displaystyle\int_1^e \int_1^2 \frac{1}{xy}\,dy\,dx.$

(d) $\displaystyle\int_0^a \int_0^b xe^{xy}\,dy\,dx.$

(e) $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y^2 \, dy \, dx.$

(f) $\int_0^2 \int_0^{2-x} y \, dy \, dx.$

2. Calcular o volume compreendido entre o plano dos xy e o parabolóide $z = 2 - x^2 - y^2$.

3. Achar o volume comum aos dois cilindros $x^2 + z^2 = 1$ e $y^2 + z^2 = 1$.

4. Achar, pela integração, a menor das duas porções em que um plano corta a esfera de raio r, sendo h ($< r$) a distância perpendicular ao centro.

5. Determinar a área, o centro de gravidade, os momentos em relação aos eixos dos x e dos y, assim como os momentos de inércia em relação aos mesmos eixos, das seguintes figuras:

(a) semicírculo $0 \leqq y \leqq \sqrt{r^2 - x^2}$;

(b) retângulo $0 \leqq x \leqq a$, $0 \leqq x \leqq b$;

(c) retângulo $-a \leqq x \leqq a$, $-b \leqq y \leqq b$;

(d) elipse $|y| \leqq b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$;

(e) triângulo de vértices $(0, 0)$, $(a, 0)$, $(0, b)$.

6. Achar o volume, o centro de gravidade e os momentos de inércia em relação aos eixos dos x, y e z, das seguintes figuras:

(a) paralelepípedo $0 \leqq x \leqq a$, $0 \leqq y \leqq b$, $0 \leqq z \leqq c$;

(b) hemisfério $0 \leqq z \leqq \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$;

(c) prisma triangular de vértices $(0, 0, 0)$, $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, $(0, 0, c)$.

CAPÍTULO XI

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARA OS TIPOS MAIS SIMPLES DE VIBRAÇÕES

Já deparamos, em diversas oportunidades, com equações diferenciais, isto é, com equações por meio das quais devemos determinar uma função incógnita e que envolvem, não sòmente a própria função, mas, também, as suas derivadas.

O problema mais simples dêste tipo consiste no cálculo da integral indefinida de uma dada função $f(x)$. Êste problema exige a determinação de uma função $y = F(x)$ que satisfaça a equação diferencial $y' - f(x) = 0$. Já resolvemos um problema dêste tipo no cap. III, § 7 (pág. 178), onde mostramos que uma equação da forma $y' = \alpha y$ é satisfeita pela função exponencial $y = ce^{\alpha x}$. Como vimos no cap. V (pág. 294), as equações diferenciais surgem com os problemas da mecânica e, na verdade, muitos ramos da matemática pura, e quase tôda a matemática aplicada dependem destas equações. Neste capítulo, estudaremos as equações diferenciais dos tipos mais simples de vibrações, sem nos aprofundarmos na teoria geral. Estas aplicações não apresentam, apenas, valor teórico, mas são, também, muito importantes na matemática aplicada.

É conveniente ter presente no espírito as seguintes idéias gerais e definições. *Solução* de uma equação diferencial é uma função que, substituída na relação original, a satisfaz para qualquer valor da variável independente considerada. A expressão *integral* é usada, muitas vêzes, em lugar de *solução*: primeiramente porque o problema consiste, mais ou menos, numa generalização da integração comum; depois, porque acontece, freqüentemente, que a solução seja encontrada, de fato, por integração.

1. Problemas sôbre vibrações em mecânica e em física

1. Vibrações mecânicas simples.

O tipo mais simples de vibrações mecânicas já foi estudado no cap. V, § 4 (pág. 295). Consideramos, naquela ocasião, uma partícula de massa M que se movia livremente sôbre o eixo dos x e que voltava à posição inicial, $x = 0$, por uma fôrça elástica. A grandeza desta fôrça era proporcional ao deslocamento x; efetivamente, igualamo-la a $-kx$, sendo k uma constante positiva, e significando o sinal negativo que a fôrça é sempre dirigida para a origem. Imaginemos agora que existe, também, uma fôrça de atrito proporcional à velocidade da partícula, $dx/dt = \dot{x}$, e oposta à mesma. Esta fôrça será dada por uma expressão da forma $-r\dot{x}$, com uma constante positiva de atrito r. Finalmente, admitiremos que a partícula sofra a ação de uma fôrça externa, a qual será uma função $f(t)$ do tempo t. Pela lei fundamental de Newton, o produto da massa m pela aceleração $\ddot{x}$ deve ser igual à fôrça total, isto é, à fôrça elástica, mais o atrito e mais a fôrça externa. A equação

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = f(t)$$

exprime o que acabamos de dizer.

Esta equação determina o movimento da partícula. Se recordarmos os exemplos que já vimos, de equações diferenciais, como a integração de $\dot{x} = \dfrac{dx}{dt} = f(t)$, com a sua solução, $x = \int f(t)\, dt + c$, ou a solução da equação diferencial particular $m\ddot{x} + kx = 0$ (pág. 296), veremos que tais problemas têm um número infinito de soluções diferentes. No caso presente, também, verificaremos que há um número infinito de soluções, expressas da seguinte maneira. É possível encontrar-se a *solução geral* ou a *integral completa* $x(t)$ da equação diferencial, dependendo não só da variável independente t, como também dos dois parâmetros c_1 e c_2, denominados *constantes de integração*. Se atribuirmos valores especiais a estas constantes, obteremos uma solução particular e *cada* solução é determinada, dando-se valores especiais a estas constantes. A integral completa representa, portanto, a totalidade das soluções particulares.

Êste fato é fàcilmente compreensível (veja, também, o cap. V, § 4, pág. 298). Não podemos esperar, aliás, que a equação diferencial, sòzinha, seja capaz de determinar completamente o movimento. Ao contrário, é plausível que num dado instante, digamos, no tempo $t = 0$, possamos estabelecer a posição $x(0) = x_0$ e a velocidade $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$ iniciais (abreviadamente, o *estado inicial*), arbitràriamente. Em outras palavras, podemos fazer a partícula partir de qualquer posição inicial, com a velocidade que quisermos, no tempo $t = 0$. Feito isto, podemos esperar que o resto do movimento fique definitivamente determinado. Na solução geral, as duas constantes arbitrárias c_1 e c_2 são suficientes para que possamos escolher a solução particular que preenche as condições iniciais. Na seção seguinte (pág. 508) veremos que só há um meio de fazê-lo.

Se não houver fôrça externa, isto é, se $f(t) = 0$, o movimento é denominado *movimento livre*. A equação diferencial é, então, chamada *homogênea*. Se $f(t)$ não fôr igual a zero para todos os valores de t, o movimento será *forçado* e a sua equação diferencial *não-homogênea*. O têrmo $f(t)$ é designado, ocasionalmente, por *fôrça perturbadora*.

2. Oscilações elétricas.

Um sistema mecânico com a simplicidade do tipo que foi descrito, só pode ser realizado aproximadamente. Uma tal aproximação é representada pelo pêndulo, desde que as suas oscilações sejam pequenas. As oscilações da agulha magnética, as do diafragma central dos telefones ou microfones e outras vibrações mecânicas podem ser representadas dentro de um certo grau de precisão, por sistemas como os que acabamos de descrever. Existe, porém, um outro tipo de fenômenos que corresponde muito mais exatamente à equação diferencial. Referimo-nos ao circuito elétrico oscilatório.

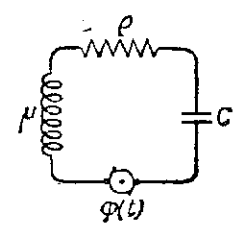


Fig. 1.— Circuito elétrico oscilatório

Consideremos o circuito desenhado na figura 1, com a indutância μ, resistência ρ e capacidade $C = 1/\kappa$. Imaginemos, também, que o circuito seja influenciado pela fôrça eletromotriz externa $\phi(t)$ dada em função do tempo t, como, por exemplo, a voltagem produzida por um dínamo ou devida a ondas elétricas. Para descrevermos o processo que se verifica no circuito, designaremos a voltagem através do condensador por E e a carga do condensador por Q. Estas quantidades estão ligadas pela relação $CE = E/\kappa = Q$. A corrente I que, como a voltagem E, é função do tempo, é definida com

a razão da mudança da carga por unidade de tempo, isto é, como a razão segundo a qual a carga do condensador diminui: $I = -\dot{Q} = -dQ/dt = -\dot{E}/\kappa$. A lei de Ohm estabelece que o produto da corrente pela resistência é igual à fôrça eletromotriz (voltagem), isto é, é igual à voltagem do condensador E, menos a fôrça eletomotriz contrária devida à self-indução, mais a fôrça eletromotriz externa $\phi(t)$. Obtemos, assim, a equação $I\rho = E - \mu\dot{I} = \phi(t)$ ou $-\frac{\rho}{\kappa}\dot{E} = E + \frac{\mu}{\kappa}\ddot{E} + \phi(t)$, isto é, $\mu\ddot{E} + \rho\dot{E} + \kappa E = -\kappa\phi(t)$, que é satisfeita pela voltagem do circuito. Vemos, pois, que foi estabelecida uma equação diferencial, exatamente do tipo já estudado no n.° 1 (pág. 502). Em vez da massa, temos aqui a indutância, em lugar da fôrça de atrito, a resistência, e em vez da constante elástica, o valor recíproco da capacidade, enquanto a fôrça eletromotriz externa (exceto um fator constante) corresponde à fôrça externa. Se a fôrça eletromotriz fôr nula, a equação diferencial será homogênea.

Multiplicando-se ambos os membros da equação diferencial por $-1/\kappa$ e derivando em relação ao tempo, teremos a equação correspondente para a corrente

$$\mu\ddot{I} + \rho\dot{I} + \kappa I = \dot{\phi}(t),$$

que difere da equação da voltagem sòmente no segundo membro e que, para as oscilações livres ($\phi = 0$) tem, idênticamente, a mesma forma.

2. Solução das equações homogêneas. Oscilações livres

1. Solução teórica.

Pode-se obter fàcilmente uma solução da equação homogênea $M\ddot{x} + r\dot{x} + kx = 0$ da página 502, sob a forma de uma expressão exponencial, procurando-se determinar uma constante λ de tal sorte que a relação $e^{\lambda t} = x$ seja uma solução. Se efetuarmos esta substituição, fazendo o mesmo para as suas derivadas $\dot{x} = \lambda e^{\lambda t}$, $\ddot{x} = \lambda^2 e^{\lambda t}$, na equa-

ção diferencial, eliminando o fator comum $e^{\lambda t}$, teremos a equação quadrática

$$m\lambda^2 + r\lambda + k = 0$$

para λ. As raízes de tal equação serão

$$\lambda_1 = -\frac{r}{2m} + \frac{1}{2m}\sqrt{r^2 - 4mk}, \quad \lambda_2 = -\frac{r}{2m} - \frac{1}{2m}\sqrt{r^2 - 4mk}.$$

Cada uma das duas expressões $x = e^{\lambda_1 t}$ e $x = e^{\lambda_2 t}$ é, ao menos teòricamente, uma solução particular da equação diferencial, como poderemos verificar efetuando os cálculos na direção inversa. Três casos diferentes podem ocorrer.

1. $r^2 - 4mk > 0$. As duas raízes λ_1 e λ_2 são, então, reais, desiguais e negativas, proporcionando duas soluções da equação diferencial, $x = u_1 = e^{\lambda_1 t}$ e $x = u_2 = e^{\lambda_2 t}$. Com o auxílio destas duas soluções é possível construir-se, imediatamente, uma solução incluindo duas constantes arbitrárias. Derivando, vemos que

$$x = c_1 u_1 + c_2 u_2$$

é, também, uma solução da equação diferencial. Mostraremos, na pág. 508, que esta expressão é, realmente, a solução mais geral da equação que nos preocupa, ou seja, poderemos obter *tôdas* as soluções da equação, atribuindo valores numéricos convenientes a c_1 e c_2.

2. $r^2 - 4mk = 0$. A equação quadrática tem, então, raiz dupla. Assim, inicialmente, pondo de lado o fator constante, teremos sòmente a solução $x = w_1 = e^{-rt/2m}$. Verificamos fàcilmente, porém, que, neste caso, a função

$$x = w_2 = te^{-rt/2m}$$

é também uma solução da equação diferencial [1]. Temos

$$\dot{x} = \left(1 - \frac{r}{2m}t\right)e^{-rt/2m}, \quad \ddot{x} = \left(\frac{r^2}{4m^2}t - \frac{r}{m}\right)e^{-rt/2m},$$

e, por substituição, vemos que a equação diferencial

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + \frac{r^2}{4m}x = m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = 0$$

[1] Somos conduzidos, naturalmente, a esta solução, pelo seguinte processo-limite: se $\lambda_1 \neq \lambda_2$, a expressão $(e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t})/(\lambda_1 - \lambda_2)$ também será uma solução. Façamos, agora, λ_1 tender para λ_2 e escrevamos λ em lugar de λ_1 e λ_2. A expressão acima transforma-se-á em $\frac{d}{d\lambda}e^{\lambda t} = te^{\lambda t}$.

é satisfeita. A expressão

$$x = c_1 e^{-rt/2m} + c_2 t e^{-rt/2m}$$

dá, portanto, de novo a solução da equação diferencial, com as duas constantes arbitrárias de integração, c_1 e c_2.

3. $r^2 - 4mk < 0$. Faremos $r^2 - 4mk = -4m^2\nu^2$, obtendo duas soluções de forma complexa, dadas pelas expressões $x = u_1 = e^{-rt/2m + i\nu t}$ e $x = u_2 = e^{-rt/2m - i\nu t}$. A fórmula de Euler

$$e^{\pm i\nu t} = \cos \nu t \pm i \operatorname{sen} \nu t$$

dá para as partes reais e imaginárias da solução complexa u_1, por um lado,

$$v_1 = e^{-rt/2m} \cos \nu t, \quad v_2 = e^{-rt/2m} \operatorname{sen} \nu t,$$

e por outro,

$$v_1 = \frac{u_1 + u_2}{2}, \quad v_2 = \frac{u_1 - u_2}{2i}.$$

Vemos, por esta segunda forma de representação, que v_1 e v_2 são soluções (reais) da equação diferencial. A verificação direta do que afirmamos, pela derivação e substituição, constitui um simples, porém útil, exercício.

Das duas soluções particulares encontradas podemos formar, novamente, a solução geral

$$x = c_1 v_1 + c_2 v_2 = (c_1 \cos \nu t + c_2 \operatorname{sen} \nu t)\, e^{-rt/2m}$$

com as duas constantes arbitrárias c_1 e c_2. Esta solução pode, igualmente, ser escrita do seguinte modo

$$x = a e^{-rt/2m} \cos \nu(t - \delta),$$

onde fizemos $c_1 = a \cos \nu\delta$, $c_2 = a \operatorname{sen} \nu\delta$, sendo a e δ duas novas constantes.

Lembramos que já obtivemos esta solução, no caso especial em que $r = 0$ (cap. V, § 4, pág. 296).

2. Interpretação física da solução.

Nos dois casos $r > 2\sqrt{mk}$ e $r = 2\sqrt{mk}$ a solução é dada pela curva exponencial, ou pelo gráfico da função $te^{-rt/2m}$ que, para grandes va-

lores de t se assemelha à curva exponencial, ou pela superposição destas curvas. Nestes casos, o processo é aperiódico, isto é, à medida que o tempo cresce, a "distância" x se aproxima de 0 assintòticamente, sem oscilar em tôrno de $x = 0$. O movimento não é, portanto, oscilatório. O efeito do atrito ou *amortecimento* é tão grande que êle impede a fôrça elástica de engendrar movimentos oscilatórios.

Nos casos em que $r < 2\sqrt{mk}$, o amortecimento é tão pequeno, que ocorrem as raízes complexas λ_1 e λ_2. A expressão $x = a \cos \nu(t - \delta)e^{-rt/2m}$ dá, então, as *oscilações harmônicas amortecidas*, que são oscilações que seguem a lei do seno, tendo freqüência circular $\nu = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{r^2}{4m^2}}$, mas cuja amplitude, em vez de ser constante, é dada por $ae^{-rt/2m}$. Isto é, a amplitude diminui exponencialmente; quanto maior fôr $r/2m$, tanto mais rápida será a razão do decréscimo. Na terminologia física o fator de amortecimento é chamado, freqüentemente, *decréscimo logarítmico* da oscilação amortecida, querendo isto significar que o logaritmo da amplitude decresce na razão $r/2m$. Uma oscilação amortecida desta espécie é a representada na figura 2. Como anteriormente, chamamos a quantidade $T = 2\pi/\nu$, o período da oscilação e $\nu\delta$, o deslocamento de fase. Para o caso especial em que $r = 0$, obteremos de novo oscilações harmônicas simples, com a freqüência $\nu_0 = \sqrt{k/m}$, a *freqüência natural* do sistema oscilatório não-amortecido.

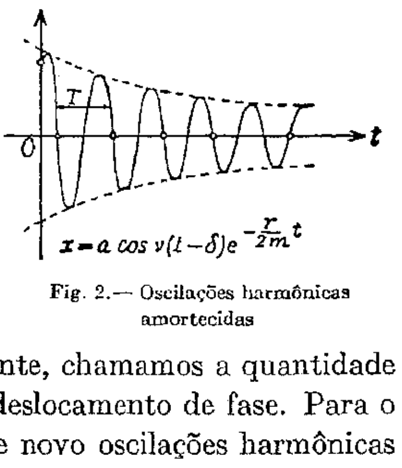


Fig. 2.— Oscilações harmônicas amortecidas

3. Preenchimento de condições iniciais preestabelecidas. Solução única.

Devemos ainda mostrar que a solução com as duas constantes c_1 e c_2 pode ser adaptada a qualquer estado inicial prefixado, e que, outrossim, representa tôdas as soluções possíveis da equação. Suponhamos que devemos achar a solução que no tempo $t = 0$ satisfaça as condições iniciais, $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$, podendo x_0 e $\dot{x}_0$ assumirem quaisquer valores. Para o caso 1 da pág. 505 devemos fazer

$$c_1 + c_2 = x_0$$
$$c_1 \lambda_1 + c_2\lambda_2 = \dot{x}_0$$

Teremos, para as constantes c_1 e c_2, duas equações lineares, as quais terão as soluções únicas

$$c_1 = \frac{\dot{x}_0 - \lambda_2 x_0}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad c_2 = \frac{\dot{x}_0 - \lambda_1 x_0}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

Para o caso 2 (pág. 505), o mesmo processo dá as duas equações lineares

$$c_1 = x_0,$$

$$\lambda c_1 + c_2 = \dot{x}_0 \qquad \left(\lambda = -\frac{r}{2m}\right),$$

para as quais se determinam c_1 e c_2 de maneira única. Finalmente, para o caso 3 (pág. 506), as equações determinantes das constantes adquirem a forma

$$a \cos \nu\delta = x_0,$$

$$a\left(\nu \operatorname{sen} \nu\delta - \frac{r}{2m} \cos \nu\delta\right) = \dot{x}_0,$$

com as soluções

$$\delta = \frac{1}{\nu} \operatorname{arc} \cos \frac{x_0}{a}, \quad a = \frac{1}{\nu}\sqrt{\nu^2 x_0^2 + \left(\dot{x}_0 + \frac{r}{2m} x_0\right)^2}.$$

Mostramos, assim, que a solução geral pode representar qualquer condição inicial arbitrária. Devemos, ainda, demonstrar que não há outra solução. Para tal bastará provarmos que qualquer estado inicial dado não admite, jamais, duas soluções diferentes.

Se existissem duas destas soluções, $u(t)$ e $v(t)$, para as quais $u(0) = x_0$, $\dot{u}(0) = \dot{x}_0$ e $v(0) = x_0$, $\dot{v}(0) = \dot{x}_0$, a sua diferença $w = u - v$ seria, também, uma solução da equação diferencial, e deveríamos ter $w(0) = 0$, $\dot{w}(0) = 0$. Esta solução deveria, por sua vez, corresponder a um estado inicial de repouso, isto é, a um estado em que, no tempo $t = 0$, a partícula estivesse na posição de repouso, animada da velocidade zero. Ora, podemos provar que, nestas condições, ela nunca se poria em movimento. Multipliquemos ambos os membros da equação diferencial $m\ddot{w} + r\dot{w} + kw = 0$ por $2\dot{w}$, lembrando-nos que $2\dot{w}\ddot{w} = \frac{d}{dt}\dot{w}^2$ e $2w\dot{w} = \frac{d}{dt} w^2$. Obteremos, então,

$$\frac{d}{dt}(m\dot{w}^2) + \frac{d}{dt}(kw^2) + 2r\dot{w}^2 = 0.$$

Integrando-se entre os instantes $t = 0$ e $t = \tau$ e usando as condições iniciais $w(0) = 0$, $\dot{w}(0) = 0$, teremos

$$m\dot{w}^2(\tau) + kw^2(\tau) + 2r\int_0^\tau \left(\frac{dt}{dw}\right)^2 dt = 0.$$

Esta equação, porém, acarretaria uma contradição se, em qualquer tempo $\tau > 0$ a função w fôsse diferente de 0. Neste caso, o primeiro membro da equação seria positivo, visto têrmos feito m, k e r positivos, enquanto o segundo membro seria zero. Logo, $w = u - v$ será sempre igual a 0, o que prova que a solução é a única possível.

Exemplos

Achar a solução geral dos exemplos de n.º 1 a 5, assim como a solução para a qual $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1$:

1. $\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = 0$.
2. $\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = 0$.
3. $2\ddot{x} + \dot{x} - x = 0$.
4. $\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 0$.
5. $4\ddot{x} + 4\dot{x} + x = 0$.

6. Determinar a solução geral e aquela para a qual $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1$ da equação

$$\ddot{x} + \dot{x} + x = 0.$$

Estabelecer a freqüência (ν), o período (T), a amplitude (a), e a fase (δ) da solução.

7. Calcular a solução de

$$2\ddot{x} + 2\dot{x} + x = 0$$

para a qual $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = -1$, determinando, também, a amplitude (a), a fase (δ) e a freqüência (ν).

3. Equações não-homogêneas. Oscilações forçadas

1. Observações gerais.

Antes de estabelecermos a solução do problema quando há uma fôrça externa $f(t)$, isto é, a resolução das equações não-homogêneas, faremos as seguintes observações de caráter geral.

Se w e v forem duas soluções da equação não-homogênea, a diferença $u = w - v$ satisfaz a equação homogênea. Isto se verifica imediatamente por substituição. Inversamente, se u fôr solução da equação homogênea, e v solução da equação não-homogênea, $w = u + v$ será, por sua vez, solução da equação não-homogênea. Portanto, de uma solução [1] da equação não-homogênea obtém-se *tôdas* as suas soluções, somando-se a integral da equação homogênea [2]. Necessitamos, assim, estabelecer ùnicamente a solução *única* da equação não-homogênea. Fìsicamente, isto quer dizer que, se tivermos uma oscilação forçada devida a uma fôrça externa, e que se superpusermos a ela uma oscilação livre, qualquer, representada pela solução da equação

[1] Também denominada *integral particular*.
[2] Também denominada *função complementar*.

homogênea, obteremos um fenômeno que satisfaz a mesma equação não-homogênea, como a oscilação forçada inicial. Se houver atrito, o movimento oscilatório cessará com o tempo, devido ao fator de amortecimento $e^{-rt/2m}$. Logo, para uma dada vibração forçada, com atrito, não importa a oscilação livre que fôr superposta. O movimento tenderá sempre para o mesmo estado final, à medida que o tempo passar.

Em segundo lugar, notemos que o efeito de uma fôrça $f(t)$ pode ser separado do mesmo modo que a própria fôrça. Obteremos, assim: se $f_1(t)$, $f_2(t)$ e $f(t)$ forem três funções tais que

$$f_1(t) + f_2(t) = f(t),$$

e se $x_1 = x_1(t)$ fôr uma solução da equação diferencial $m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = f_1(t)$, e $x_2 = x_2(t)$ da equação $m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = f_2(t)$, teremos que $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ será solução da equação diferencial $m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = f(t)$. Enunciado semelhante se verifica, naturalmente, se $f(t)$ tiver um número qualquer de têrmos. Êste fato simples, porém importante, é denominado "o princípio da superposição". A demonstração decorre de um simples olhar lançado à própria equação. Subdividindo a função $f(t)$ em dois ou mais têrmos, poderemos decompor a equação diferencial em diversas equações, o que, em determinadas circunstâncias, facilita consideràvelmente a manipulação.

O caso mais importante é o de uma fôrça periódica, externa, $f(t)$. Tal fôrça pode ser decomposta em componentes puramente periódicas pelo desenvolvimento segundo a série de Fourier, podendo, portanto, aproximar-se [1] tanto quanto quisermos da soma de um número finito de funções puramente periódicas. Para estabelecermos a solução da equação diferencial de que estamos tratando, bastará, pois, que o segundo membro tenha a forma

$$a \cos \omega t \quad \text{ou} \quad b \operatorname{sen} \omega t,$$

onde a, b e ω são constantes arbitrárias.

Empregando-se a notação complexa podemos obter a solução de maneira mais simples e rápida do que usando as fórmulas trigonométricas estabelecidas. Faremos $f(t) = ce^{i\omega t}$, mostrando o princípio da superposição que basta considerarmos a equação diferencial

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = ce^{i\omega t}.$$

[1] Desde que seja contínua e secionalmente regular (pág. 439), que é o único caso que tem importância na física

onde representamos por c uma constante arbitrária, real ou complexa. Esta equação representa, efetivamente, duas equações diferenciais reais. Se dividirmos o segundo membro em dois têrmos, por exemplo, se fizermos $c = 1$ e escrevermos $e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \operatorname{sen} \omega t$, x_1 e x_2, as soluções das duas equações diferenciais *reais*, $m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = \cos \omega t$ e $m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = \operatorname{sen} \omega t$, combinar-se-ão para formarem a solução $x = x_1 + ix_2$ da equação diferencial *complexa*. Inversamente, se resolvermos, em primeiro lugar, a equação diferencial sob a forma complexa, a parte real da solução dar-nos-á a função x_1 e a parte imaginária x_2.

2. Solução da equação não-homogênea.

Resolveremos a equação $m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = ce^{i\omega t}$ por um artifício sugerido, naturalmente, pela intuição. Admitiremos que c seja real e (no instante considerado), $r \neq 0$. Faremos a hipótese de que existe um movimento com o mesmo ritmo da fôrça externa periódica, de sorte que podemos esperar achar a solução da equação diferencial sob a forma

$$x = \sigma e^{i\omega t},$$

em que basta determinar o fator σ, independente do tempo. Substituindo-se esta expressão e suas derivadas $\dot{x} = i\omega\sigma e^{i\omega t}$ e $\ddot{x} = -\omega^2\sigma e^{i\omega t}$ na equação diferencial e reduzindo-se o fator comum $e^{i\omega t}$, obteremos

$$-m\omega^2\sigma + ir\omega\sigma + k\sigma = c$$

$$\sigma = \frac{c}{-m\omega^2 + ir\omega + k}.$$

Inversamente, vemos que para êste valor de σ a expressão $\sigma e^{i\omega t}$ é, efetivamente, uma solução da equação diferencial. Para que êste resultado possa refletir claramente o seu significado, são necessárias algumas transformações.

Escreveremos, de início, o fator complexo σ sob a forma

$$\sigma = c\,\frac{k - m\omega^2 - ir\omega}{(k - m\omega^2)^2 + r^2\omega^2} = c\alpha e^{i\omega\delta},$$

em que o "fator de distorção" α e o "deslocamento da fase" $\omega\delta$ são

dados, em função das quantidades conhecidas, m, r, k, pelas equações

$$\alpha^2 = \frac{1}{(k - m\omega^2)^2 + r^2\omega^2}, \ \operatorname{sen} \omega\delta = r\omega\alpha, \ \cos \omega\delta = (k - m\omega^2)\alpha.$$

Com esta notação, a solução assume a forma:

$$x = c\alpha e^{i\omega(t-\delta)},$$

traduzindo-se o resultado da seguinte maneira: à fôrça $c \cos \omega t$ corresponde o "efeito" $c\alpha \cos \omega(t - \delta)$, ao passo que à fôrça $c \operatorname{sen} \omega t$ corresponderá $c\alpha \operatorname{sen} \omega(t - \delta)$.

Por aí se vê que o efeito é uma função do mesmo tipo que a fôrça, ou seja, uma oscilação não amortecida. Esta oscilação difere da que representa a fôrça, pela amplitude que é acrescida na razão $\alpha : 1$, e pela fase que é alterada do ângulo $\omega\delta$. Naturalmente, o mesmo resultado pode ser obtido sem lançarmos mão da notação complexa, porém, seriam necessários cálculos mais alongados.

De acôrdo com a observação feita no início desta seção (pág. 509), o estabelecimento desta solução única resolve completamente o problema, visto que, superpondo oscilações livres quaisquer, obteremos a oscilação forçada do tipo mais geral.

Resumindo o que foi deduzido, temos:

A integral completa da equação diferencial

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = ce^{i\omega t}$$

(onde $x \neq 0$*) é* $x = c\alpha e^{i\omega(t-\delta)} + u$, *onde* u *é a integral completa da equação homogênea* $m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = 0$, *e as quantidades* α *e* δ *são definidas pelas equações*

$$\alpha^2 = \frac{1}{(k - m\omega^2)^2 + r^2\omega^2}, \ \operatorname{sen} \omega\delta = r\omega\alpha, \ \cos \omega\delta = (k - m\omega^2)\alpha.$$

As constantes, nesta solução geral, permitem fazer o resultado se adaptar a qualquer estado inicial arbitrário, isto é, elas podem ser determinadas, para quaisquer valores arbitrários atribuídos a x_0 e $\dot{x}_0$ de modo que $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$.

3. Curva de ressonância.

Para adquirirmos plena consciência da solução encontrada e da sua importância nas aplicações, consideraremos o fator de distorção α como função da "freqüência excitadora" ω, isto é, da função

$$\phi(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + r^2\omega^2}}.$$

O motivo determinante desta investigação detalhada reside em que, para dados valores das constantes k, m, r ou, como dizemos, para um certo "sistema oscilatório", podem-se supor diversas fôrças excitadoras periódicas de freqüências circulares diferentes agindo sôbre o sistema, e, neste caso, é importante conhecermos a solução da equação diferencial para os diferentes valores das fôrças excitadoras. Para descrevermos a função convenientemente, introduziremos a quantidade $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. Êste número representa a freqüência circular do sistema para o atrito r igual a zero, ou, mais resumidamente, *a freqüência natural do sistema não-amortecido* (pág. 507). A freqüência do sistema livre, graças ao atrito r, não é igual a ω_0, tendo para expressão

$$\nu = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{r^2}{4m^2}},$$

admitindo-se que $4km - r^2 > 0$. (Se tal não fôr o caso, o sistema não terá freqüência, sendo aperiódico.)

A função $\phi(\omega)$ tende assintòticamente para 0, à medida que a freqüência excitadora tende para o infinito, e, efetivamente, ela se anula na ordem $1/\omega^2$. Além disso, $\phi(0) = 1/k$, ou seja, uma fôrça excitadora de freqüência zero e de grandeza unitária, isto é, uma fôrça constante de grandeza unitária, origina o deslocamento $1/k$ do sistema oscilatório. Na região dos valores positivos de ω, a derivada $\phi'(\omega)$ não pode se anular, exceto onde a derivada da expressão $(k - m\omega^2)^2 + r^2\omega^2$ fôr nula, isto é, para o valor $\omega = \omega_1 > 0$, para o qual a equação

$$-4m\omega(k - m\omega^2) + 2r^2\omega = 0$$

se verifica. Para que tal valor exista, realmente, é preciso que tenhamos $2km - r^2 > 0$; neste caso,

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{r^2}{2m^2}} = \sqrt{\omega_0{}^2 - \frac{r^2}{2m^2}}.$$

Como a função $\phi(\omega)$ é positiva em tôda a parte, cresce monòtonamente para valores pequenos de ω e se anula no infinito, êste valor deve ser

um máximo. Denominaremos a freqüência circular ω_1, "freqüência de ressonância" do sistema.

Substituindo ω_1 por esta expressão, achamos que o valor do máximo deve ser

$$\phi(\omega_1) = \frac{1}{r\sqrt{\dfrac{k}{m} - \dfrac{r^2}{4m^2}}}.$$

À medida que $r \to 0$, tal valor excede qualquer limite. Para $r = 0$, isto é, para um sistema oscilatório não amortecido, a função $\phi(\omega)$ apresenta uma descontinuidade infinita para o valor $\omega = \omega_1$. Êste é um caso limite, ao qual dispensaremos maior atenção mais tarde.

O gráfico da função $\phi(\omega)$ é denominado *curva de ressonância* do sistema. A distorção da amplitude $\alpha = \phi(\omega)$ sendo particularmente grande para $\omega = \omega_1$ (e, por conseqüência, para valores pequenos de r na vizinhança da freqüência natural), representa a expressão matemática do "fenômeno de ressonância", o qual, para valores fixos de m e k, se torna cada vez mais evidente à medida que r vai decrescendo.

Na figura 3 desenhamos uma família de curvas de ressonância, tôdas correspondentes aos valores $m = 1$ e $k = 1$, e, conseqüentemente, para $\omega_0 = 1$, porém, com valores diferentes de $D = \frac{1}{2}r$. Vemos que para valores pequenos de D ocorre uma ressonância bem caracterizada, próximo de $\omega = 1$; no caso limite, em que $D = 0$, em vez do máximo, haverá uma descontinuidade infinita de $\phi(\omega)$ no ponto $\omega = 1$. Quando D cresce, os máximos se deslocam para a esquerda, vindo $\omega_1 = 0$, para o valor $D = 1/\sqrt{2}$. Neste caso, o ponto em que a tangente é horizontal desloca-se para a origem, desaparecendo o máximo. Se $D > 1/\sqrt{2}$, não há zero para $\varphi'(\omega)$; a curva de ressonância não apresenta mais máximo, não existindo ressonância.

Em geral, o fenômeno da ressonância cessa logo que a condição

$$2km - r^2 \leqq 0$$

se verificar. No caso do sinal de igualdade, a curva de ressonância atinge sua maior altura $\phi(0) = 1/k$ no ponto $\omega_1 = 0$; a tangente é horizontal neste ponto, e depois de um percurso inicial proximamente horizontal, diminui, aproximando-se de zero.

4. Discussão complementar da oscilação.

Não podemos, entretanto, contentar-nos com a discussão que acabamos de fazer. Para que possamos compreender realmente o fenômeno

do movimento forçado, é necessário fixarmos um ponto adicional. A integral particular $c\alpha e^{i\omega(t-\delta)}$ pode ser considerada como o *estado-limite* do qual a integral completa

$$x(t) = c\alpha e^{i\omega(t-\delta)} + c_1 u_1 + c_2 u_2$$

se aproxima, cada vez mais, *à medida que o tempo passa*, visto a oscilação livre, $c_1u_1 + c_2u_2$, superposta à integral particular, enfraquecer com a passagem do tempo. Êste enfraquecimento será lento quando r fôr pequeno, e rápido quando r fôr grande.

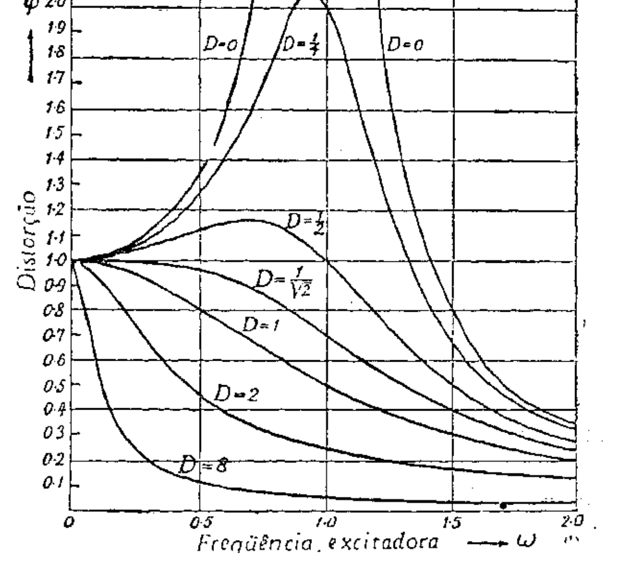


Fig. 3.— Curvas de ressonância

Suponhamos que, por exemplo, no início do movimento, isto é, no tempo $t = 0$, o sistema esteja em repouso, de sorte que $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = 0$. Partindo desta hipótese, é possível a determinação das constantes c_1 e c_2 e vemos, de imediato, que ambas *não* são nulas. Mesmo quando a freqüência excitadora fôr aproximada ou exatamente igual a ω_1, de forma que haja ressonância, a amplitude relativamente grande, $\alpha = \phi(\omega_1)$, não aparecerá à primeira vista. Ao contrário, ela é oculta pela função $c_1u_1 + c_2u_2$, aparecendo sòmente quando esta função fôr desaparecendo gràdualmente; isto é, ela surgirá tanto mais lentamente, quanto menor fôr r.

Para o sistema não amortecido, isto é, para $r = 0$, a solução que estabelecemos falha quando a freqüência excitadora fôr igual à freqüência circular natural, $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, porque, então, $\phi(\omega_0)$ será infinita. Não será possível, assim, obtermos uma solução da equação $m\ddot{x} + kx = e^{i\omega t}$, sob a forma $\sigma e^{i\omega t}$. Poderemos, não obstante, achar uma solução, revestida da forma $\sigma t e^{i\omega t}$. Substituindo-se esta expressão na equação diferencial, e lembrando-nos que

$$\dot{x} = \sigma e^{i\omega t}(1 + i\omega t), \quad \ddot{x} = \sigma e^{i\omega t}(2i\omega - t\omega^2),$$

teremos

$$\sigma(2im\omega - m\omega^2 t + kt) = 1,$$

e, uma vez que $m\omega^2 = k$,

$$\sigma = \frac{1}{2im\omega}.$$

Assim, *quando há ressonância num sistema não amortecido, teremos a solução*

$$x = \frac{t}{2im\omega} e^{i\omega t} = \frac{t}{2i\sqrt{km}} e^{i\omega t}.$$

Empregando a notação real, quando $f(t) = \cos \omega t$, teremos $x = \dfrac{1}{2} \dfrac{t}{\sqrt{km}}$ sen ωt, e quando $f(t) =$ sen ωt, virá

$$x = -\frac{1}{2} \frac{t}{\sqrt{km}} \cos \omega t.$$

Vemos, assim, que encontramos uma função que pode ser considerada como se fôsse uma oscilação, cuja amplitude cresce proporcionalmente ao tempo. A oscilação livre superposta não enfraquece, visto não ser amortecida; ela conserva a amplitude original, tornando-se sem importância, em face da amplitude crescente da oscilação forçada especial. A solução oscilante, para a frente e para trás, entre limites positivo e negativo, que crescem continuamente à medida que o tempo se escoa, representa o significado real da descontinuidade infinita da função ressonância, no caso do sistema não amortecido.

5. Observações sôbre a construção de aparelhos registradores

A discussão que acabamos de levar a efeito na subseção precedente é da mais alta importância em grande variedade de aplicações à física e à engenharia. Em muitos instrumentos, como galvanômetros, sismógrafos, circuitos elétricos oscilantes dos rádio-receptores, e nos diafragmas dos microfones, o problema consiste em registrar um deslocamento oscilante x, devido a uma fôrça periódica externa. Nestes casos, a quantidade x satisfaz a equação diferencial citada, ao menos, numa primeira aproximação.

Sendo T o período da oscilação da fôrça periódica externa, podemos desenvolver a fôrça segundo uma série de Fourier da forma

$$f(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \gamma_l e^{il(2\pi/T)t},$$

ou, melhor ainda, podemos imaginá-la como representada, com suficiente precisão, pela soma trigonométrica $\sum_{l=-N}^{N} \gamma_l e^{il(2\pi/T)t}$, consistindo sòmente de um número finito de têrmos. Pelo princípio da superposição (pág. 510), a solução $x(t)$ da equação diferencial, àparte a oscilação livre superposta, será representada por uma série infinita [1] da forma

$$x(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sigma_l e^{il(2\pi/T)t},$$

ou, aproximadamente, por uma expressão finita do tipo

$$x(t) = \sum_{l=-N}^{N} \sigma_l e^{il(2\pi/T)t}.$$

Em face dos resultados já obtidos,

$$\sigma_l = \gamma_l \alpha_l e^{-i\delta_l(2\pi l/T)}$$

e

$$\alpha_l^2 = \frac{1}{\left(k - ml^2 \frac{4\pi^2}{T^2}\right)^2 + r^2 l^2 \frac{4\pi^2}{T^2}}, \quad \operatorname{tg} \frac{2\pi l}{T}\,\delta_l = \frac{2\pi l r}{T\left(k - m\frac{4\pi^2 l^2}{T^2}\right)}.$$

Podemos, assim, descrever a ação de uma fôrça periódica externa, arbitrária, da seguinte maneira: decompondo-se a fôrça excitadora nas suas componentes puramente periódicas, ou seja, nos têrmos individuais da série de Fourier, cada componente é sujeita à sua própria distorção de amplitude e deslocamento de fase, superpondo-se, aditivamente, os efeitos separados. Se estivermos interessados sòmente na distorção da amplitude (o deslocamento da fase tem, apenas, importância secundária nas aplicações [2] e, além disso, pode ser discutido da mesma forma que a distorção de amplitude), a observação da curva de ressonância fornece informação completa sôbre a maneira pela qual os movimentos do aparelho regis-

(1) Não consideraremos, aqui, as questões de convergência.

(2) Por exemplo, nas vibrações imperceptíveis ao ouvido humano.

trador reproduzem a fôrça externa excitadora. Para valores muito grandes de l ou $\omega\left(=\frac{2\pi}{T}l\right)$, o efeito da freqüência excitadora sôbre o deslocamento x será difìcilmente perceptível. Por outro lado, tôdas as freqüências excitadoras, nas proximidades de ω_1, a freqüência de ressonância, afetarão marcadamente a quantidade x.

Na construção de aparelhos medidores e registradores, as constantes m, r e k estão à nossa disposição, pelo menos dentro de amplos limites. Elas são escolhidas de modo que a curva de ressonância se adapte da melhor forma possível às particularidades especiais da medida que se vai processar. Entretanto, estabeleceremos duas condições predominantes. Em primeiro lugar, é de desejar que o aparelho seja tão sensível quanto possível, isto é, o valor de α deve ser o maior possível, para tôdas as freqüências ω que forem consideradas. Para os valores fracos de ω, como já vimos, α é aproximadamente proporcional a $1/k$, de sorte que o número $1/k$ mede a sensibilidade do aparelho, para pequenas freqüências excitadoras. A sensibilidade pode, portanto, ser aumentada, aumentando-se $1/k$, ou seja, pela diminuição da fôrça restauradora.

Outro ponto importante é a necessidade da *relativa liberdade de distorção*. Suponhamos que $f(t) = \sum_{l=-N}^{N} \gamma_l e^{il(2\pi/T)t}$ seja uma aproximação adequada da fôrça excitadora. Dizemos, então, que o aparelho registra a fôrça excitadora $f(t)$ com relativa liberdade de distorção, se o fator de distorção tiver aproximadamente o mesmo valor para tôdas as freqüências circulares $\omega \leqq N\frac{2\pi}{T}$. Esta condição torna-se indispensável, se quisermos deduzir conclusões sôbre o processo excitador, baseados no comportamento do aparelho. Êste é o caso, por exemplo, de um gramofone ou de um aparelho de rádio, que devem reproduzir notas musicais, tanto altas como baixas, com uma relação de intensidade aproximadamente correta. A exigência de que a reprodução se faça relativamente "sem distorção", não pode ser satisfeita integralmente, visto que nenhum segmento da curva de ressonância é exatamente horizontal. Podemos, entretanto, escolher e fixar as constantes m, k e r do aparelho, de modo que não se produzam ressonâncias sensíveis, e que, também, a curva tenha uma tangente horizontal no seu início, fazendo com que $\varphi(\omega) = \alpha$ se mantenha aproximadamente constante para valores pequenos de ω. Como já vimos acima, podemos realizar êste objetivo, fazendo

$$2km - r^2 = 0.$$

Dadas as constantes m e k, podemos satisfazer a exigência, ajustando apropriadamente o atrito r, por exemplo, inserindo uma resistência convenientemente escolhida, no circuito elétrico. A curva de ressonância mostra, então, que da freqüência 0 às freqüências circulares próximas da freqüência circular natural ω_0 do sistema não amortecido, o instrumento, pràticamente, não apresenta distorção, e que acima desta freqüência o amortecimento é considerável. Obtemos, pois, relativa liberdade de distorção num dado intervalo de freqüências, escolhendo, em primeiro lugar, m tão pequeno e k tão grande, que a freqüência circular natural ω_0 do sistema não amortecido, seja maior do que as freqüências excitadoras consideradas,

e em seguida, estabelecendo um fator de amortecimento r de acôrdo com a equação $2km - r^2 = 0$.

EXEMPLOS

Determinar a solução que satisfaça as condições iniciais $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$, para as equações dos exemplos 1-5. Deduzir, também, a amplitude da fase, e o valor de ω para o qual a amplitude é máxima, para as equações 1-4:

1. $\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = \cos \omega t$.
2. $\ddot{x} + \dot{x} + x = \cos \omega t$.
3. $\ddot{x} + \dot{x} + x = \operatorname{sen} \omega t$.
4. $2\ddot{x} + 2\dot{x} + x = \cos \omega t$.
5. $\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = \cos \omega t$.

4. Observações adicionais sôbre as equações diferenciais

Apresentamos um estudo mais sistemático das equações diferenciais no capítulo VI do volume II. Aqui, daremos apenas alguns complementos à teoria especial anterior.

1. Equações diferenciais lineares homogêneas de ordem n, com coeficientes constantes.

Os problemas mais complicados sôbre as vibrações conduzem-nos a equações diferenciais lineares da função incógnita $x(t)$ da variável independente, que assumem a forma

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \ldots + a_n x = 0,$$

onde $a_1, \ldots, a_n$ são constantes, e n um inteiro positivo. Podemos resolvê-las por um método semelhante ao que empregamos no caso de $n=2$ (pág. 504).

Seja $x = e^{\lambda t}$. Substituindo-se esta função e as suas derivadas na equação diferencial e simplificando-se o fator comum $e^{\lambda t}$, virá uma equação de grau n, em relação a λ:

$$f(\lambda) \equiv \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n = 0.$$

Se λ fôr uma raiz desta equação, $e^{\lambda t}$ satisfará a equação diferencial.

Vejamos, agora, as diversas possibilidades. Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, as raízes da equação $f(\lambda) = 0$, de sorte que

$$f(\lambda) \equiv (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \ldots (\lambda - \lambda_n).$$

Admitiremos, de início, que tôdas as raízes são diferentes. Se todos os λ_n forem reais, teremos n relações $e^{\lambda_n t}$ linearmente independentes, da mesma forma que antes. A *solução geral* é qualquer combinação linear destas soluções

$$c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \ldots + c_n e^{\lambda_n t}.$$

As constantes c_n podem ser determinadas de tal modo que tanto x, como suas primeiras $n-1$ derivadas, assumam valores arbitrários predeterminados, no tempo $t = 0$. Para tal, devemos resolver o seguinte sistema de n equações lineares [1]:

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + \ldots + c_n &= x(0), \\ \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \ldots + \lambda_n c_n &= x'(0), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda_1^{n-1} c_1 + \lambda_2^{n-1} c_2 + + \ldots \lambda_n^{n-1} c_n &= x^{(n-1)}(0). \end{aligned}$$

Se duas destas raízes forem iguais, digamos, $\lambda_1 = \lambda_2$, não só $e^{\lambda_1 t}$, mas também $te^{\lambda_1 t}$ será uma solução. Isto pode ser verificado da maneira seguinte: como $f(\lambda) = 0$ possui a raiz dupla $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$, por um teorema conhecido da álgebra, tem-se que

$$f'(\lambda) \equiv n\lambda^{n-1} + (n-1)a_1\lambda^{n-2} + \ldots + a_{n-1} = 0.$$

A regra de Leibnitz, para a derivação dos produtos (pág. 202), dá

$$\frac{d^k}{dt^k}(te^{\lambda t}) = t\frac{d^k}{dt^k}e^{\lambda t} + k\frac{dt}{dt}\frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}e^{\lambda t} = t\lambda^k e^{\lambda t} + k\lambda^{k-1}e^{\lambda t}.$$

Efetuando a substituição na equação diferencial, teremos

$$\begin{aligned} te^{\lambda t}(\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n) + e^{\lambda t}(n\lambda^{n-1} + (n-1)a_1\lambda^{n-2} + \ldots + a_{n-1}) \\ = te^{\lambda t} f(\lambda) + e^{\lambda t} f'(\lambda) = 0, \end{aligned}$$

visto $f(\lambda) = 0$ e, pela observação que fizemos sôbre as raízes duplas, $f'(\lambda) = 0$.

Da mesma forma, se $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ forem iguais, obteremos as seguintes soluções linearmente independentes:

$$e^{\lambda_1 t},\ te^{\lambda_1 t},\ \ldots t^{\mu-1}e^{\lambda_1 t},$$

que podem ser combinadas para formarem a solução geral, dependente de $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Êstes parâmetros habilitam-nos, novamente, a adaptarmos a solução a n condições preestabelecidas, de sorte que, para $t = 0$, podemos fixar os valores de $x(0)$ e de suas $n-1$ primeiras derivadas.

[1] Êste sistema de equações sempre terá solução se as raízes forem desiguais porque, então, o determinante dos coeficientes é diferente de zero.

Se a equação tiver raízes complexas, por um teorema da álgebra, tais raízes ocorrerão aos pares, cada uma delas com a sua conjugada. Como no caso de $n = 2$, obteremos soluções da forma

$$\cos \beta t . e^{\alpha t} \text{ e } \operatorname{sen} \beta t . e^{\alpha t}, \text{ onde } \lambda_1 = \alpha + i\beta,\ \lambda_2 = \alpha - i\beta.$$

Alguns exemplos ilustrarão o que foi exposto.

Exemplo 1. $$\frac{d^3x}{dt^3} + 2\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} - 2x = 0,$$

$$f(\lambda) = \lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 2 = 0.$$

A solução geral é $x = c_1 e^{-t} + c_2 e^{t} + c_3 e^{-2t}$.

Uma solução particular, para a qual $x = 2$, $x' = 0$, em $t = 0$, é dada por $x = e^{t} + e^{-t}$.

Exemplo 2. $$\frac{d^3x}{dt^3} - \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} + x = 0.$$

A solução geral é $x = c_1 e^{t} + c_2 t e^{t} + c_3 e^{-t}$.

Exemplo 3. $$\frac{d^3x}{dt^3} - 2\frac{dx}{dt} + 4 = 0,$$

$$f(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda + 4 = (\lambda + 2)(\lambda - 1 + i)(\lambda - 1 - i).$$

A solução geral é $x = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{t} \cos t + c_3 e^{t} \operatorname{sen} t$.

2. Equação de Bernouilli.

Uma equação do tipo

$$\frac{dx}{dt} + A(t)x = B(t),$$

m que A e B são funções sòmente de t, é denominada uma *equação inear*. No caso em que $B = 0$, se $x = \alpha(t)$, $x = \beta(t)$ forem soluções, ualquer combinação linear de α e β será igualmente uma solução. onsideremos, agora, o tipo ligeiramente mais geral

$$\frac{dx}{dt} + A(t)x = B(t)x^n,$$

nde n é um inteiro positivo, e que é conhecida com o nome de equaão de Bernouilli.

Em primeiro lugar, vejamos o caso mais simples, em que $B = 0$, **isto**, onde

$$\frac{dx}{dt} + A(t)x = 0.$$

Escrevendo novamente a equação como $\frac{dx}{x} = -A(t)\,dt$, vemos que podemos integrá-la imediatamente, como segue

$$\log x = -\int A(t)\,dt + c,$$

$$x = e^c e^{-\int A\,dt} = ve^{-\int A\,dt}$$

se substituirmos $e^c = v$.

Experimentemos satisfazer a equação de Bernouilli por uma função da forma $x = -ve^{-\int A\,dt}$, admitindo-se que v seja a variável, de maneira que

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dt}e^{-\int A\,dt} - vAe^{-\int A\,dt}.$$

Substituindo-se, virá

$$\frac{dv}{dt}v^{-n} = Be^{-n\int A\,dt}e^{\int A\,dt},$$

que pode ser integrada imediatamente, dando

$$x^{1-n} = (1-n)e^{(n-1)\int A\,dt}\left[\int Be^{(1-n)\int A\,dt}\,dt\right].$$

O método acima é muito importante e pode ser aplicado em diversos casos. É chamado *método da variação dos parâmetros*. (Para maiores detalhes, consulte-se o volume II, pág. 445.) Deve ser observado que a solução é expressa por meio de integrais que, em geral, não podem ser representadas por funções elementares.

Exemplo.— Consideremos a equação

$$\frac{dx}{dt} - tx = t^3x^2.$$

Seja $$x = ve^{\int t\,dt} = ve^{\frac{1}{2}t^2};$$

logo, $$\frac{dx}{dt} - tx = \frac{dv}{dt}e^{\frac{1}{2}t^2} + vte^{\frac{1}{2}t^2} - tve^{\frac{1}{2}t^2} = \frac{dv}{dt}e^{\frac{1}{2}t^2},$$

transformando-se a equação em

$$\frac{dv}{dt}e^{\frac{1}{2}t^2} = t^3v^2e^{t^2}, \quad \text{ou} \quad \frac{dv}{v^2} = t^3e^{\frac{1}{2}t^2}\,dt.$$

Integrando, teremos,

$$-\frac{1}{v} = (t^2-2)e^{\frac{1}{2}t^2} + c, \quad \text{ou} \quad \frac{1}{x} = 2 - t^2 + ce^{-\frac{1}{2}t^2}.$$

Êste resultado poderia ter sido obtido por substituição direta na fórmula dada acima, porém, a aplicação efetiva do método, passo a passo, é muito mais instrutiva.

3. Outras equações diferenciais de primeira ordem, resolúveis simplesmente por integração.

Existem alguns outros tipos de equações diferenciais de primeira ordem que podem ser resolvidas pela integração (conquanto, na maioria dos casos, a integração não possa ser efetuada explìcitamente, em têrmos de funções elementares).

Consideraremos, em primeiro lugar, o *método da separação das variáveis*. Quando a equação diferencial puder ser escrita sob a forma [1]

$$A(x)\,dx + B(y)\,dy = 0,$$

diz-se que as variáveis são *separáveis*. A solução será, então,

$$\int A(x)\,dx + \int B(y)\,dy + c = 0.$$

Exemplo.— Seja a equação

$$yy' + xy^2 = x.$$

Podemos escrever

$$y\,dy + x(y^2 - 1)dx = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{y\,dy}{y^2 - 1} + x\,dx = 0;$$

logo,

$$\tfrac{1}{2}\log(y^2 - 1) + \tfrac{1}{2}x^2 = c, \quad \text{ou} \quad (y^2 - 1)e^{x^2} = k.$$

Outro tipo de equação que pode ser resolvido é o que se apresenta sob a forma

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0,$$

em que M e N são funções homogêneas, do mesmo grau, de x e y. Neste caso, a fração M/N é função sòmente de y/x, podendo-se escrever

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Se fizermos $y = xv$, virá

$$x\frac{dv}{dx} + v = f(v).$$

As variáveis x, v são agora separáveis, como segue:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dv}{f(v - v)}.$$

(1) Isto é, $y'B(y) + A(x) = 0$.

Integrando, teremos

$$\log x = \int \frac{dv}{f(v) - v} + c.$$

Exemplo.— Consideremos a equação

$$(2\sqrt{xy} - x)\, dy + y\, dx = 0.$$

Substituindo $y = vx$, virá

$$(2v^{1/2} - 1)x\left(v + x\frac{dv}{dx}\right) + vx = 0$$

$$v(2v^{1/2} - 1) + v + x(2v^{1/2} - 1)\frac{dv}{dx} = 0,$$

$$\frac{dx}{x} = -\frac{2v^{1/2} - 1}{2v^{3/2}}\, dv = -\frac{dv}{v} + \frac{dv}{2v^{3/2}}.$$

Integrando, obteremos

$$\log x = -\log v - v^{-1/2} + c$$

ou

$$\log y + \sqrt{x/y} = c.$$

4. Equações diferenciais de segunda ordem.

Há poucos tipos de equações diferenciais não lineares cujas soluções podem ser obtidas por simples integração. Já estudamos um dêstes tipos, implìcitamente, no capítulo V (pág. 297), quando consideramos o movimento de uma partícula sôbre uma curva dada. Êste tipo é:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(x).$$

Seja $v = \dfrac{dx}{dt}$, de sorte que

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx},$$

transformando-se a nossa equação em

$$v\frac{dv}{dx} = f(x).$$

Podemos considerar esta equação como sendo de primeira ordem, com a variável dependente v e a independente x. Separando as variáveis e integrando, virá

$$v\,dv = f(x)\,dx$$

$$v^2 = 2\int f(x)\,dx + c \quad \text{ou} \quad v = \sqrt{2\int f(x)\,dx + c}.$$

Então,

$$\frac{dx}{\sqrt{2\int f(x)\,dx + c}} = dt,$$

que pode ser resolvida por integração (embora, em geral, seja impossível executar a integração explìcitamente).

Êste artifício permite resolver as equações dos seguintes tipos:

$$\phi\left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{dx}{dt}\right) = 0,$$

$$\psi\left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{dx}{dt}, t\right) = 0,$$

$$\theta\left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{dx}{dt}, x\right) = 0,$$

que se reduzem, respectivamente, quando fazemos $v = \frac{dx}{dt}$, a

$$\phi\left(\frac{dv}{dt}, v\right) = 0,$$

$$\psi\left(\frac{dv}{dt}, v, t\right) = 0,$$

$$\theta\left(v\frac{dv}{dx}, v, x\right) = 0.$$

Estas são equações de primeira ordem, que podem ser resolvidas pelos métodos precedentes. A solução, depois de v ter sido substituído por $\frac{dx}{dt}$, será, ainda, uma equação diferencial de primeira ordem, a qual deve ser resolvida em relação a x. Alguns exemplos esclarecerão melhor a marcha do processo.

Exemplo 1.
$$2a\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2} = 1.$$

Façamos $\frac{dy}{dx} = p$. A equação transformar-se-á em
$$2ap\frac{dp}{dx} = 1.$$

Separando as variáveis e integrando, teremos
$$ap^2 = x + c_1,$$
ou
$$\sqrt{a}\frac{dy}{dx} = \sqrt{x + c_1}.$$

Integrando, virá
$$\sqrt{a}(y + c_2) = {}^2/_3(x + c_1)^{3/2}.$$

Elevando ao quadrado teremos, finalmente,
$$a(y + c_2)^2 = {}^4/_9(x + c_1)^3$$

Exemplo 2.
$$(1 + x^2)\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} = 0.$$

Fazendo-se, como no exemplo anterior, $\frac{dy}{dx} = p$, obteremos
$$(1 + x^2)\frac{dp}{dx} + xp = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{dp}{p} = -\frac{x\,dx}{1 + x^2}.$$

Integrando, virá
$$\log p = -\tfrac{1}{2}\log(1 + x^2) + c,$$
$$p = c_1(1 + x_2)^{-1/2},$$
ou
$$\frac{dy}{dx} = \frac{c_1}{\sqrt{1 + x^2}},$$
donde
$$y = c_2 + c_1 \operatorname{Arc\,Sh} x.$$

Exemplo 3.
$$y\frac{d^2y}{dx^2} = 1 - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2.$$

Façamos $\frac{dy}{dx} = p$, donde $\frac{d^2y}{dx^2} = p\frac{dp}{dy}$, vindo então,
$$py\frac{dp}{dy} = 1 - p^2, \quad \text{ou} \quad \frac{p\,dp}{1 - p^2} = \frac{dy}{y}.$$

Integrando, teremos

$$-\tfrac{1}{2}\log(1-p^2) = \log y + c,$$

isto é,

$$y = c_1(1-p^2)^{-1/2},$$

ou

$$y^2(1-p^2) = c_1^2,$$

e

$$\frac{dy}{dx} = p = \frac{\sqrt{y^2-c_1^2}}{y}, \quad \text{ou} \quad \frac{y\,dy}{\sqrt{y^2-c_1^2}} = dx.$$

Nova integração produzirá

$$\sqrt{y^2-c_1^2} = x + c_2,$$

isto é,

$$y^2 = x^2 + c_3x + c_4.$$

Exemplos

Resolver as equações diferenciais dos exemplos 1 a 22.

1. $(1+y^2)\,dx - (y - \sqrt{1+y})\,(1+x)^{3/2}\,dy = 0.$
2. $(x^3+y^3)\,dy = 3x^2y\,dx.$
3. $y(\log x - \log y)\,dy - x\,dx = 0.$
4. $xy' + y = y^2\log x.$
5. $(1+y^2)\,dx = (\text{arc tg}\,y - x)\,dy.$
6. $yy' + \tfrac{1}{2}y^2 = \text{sen}\,x.$
7. $(x^3y^3 + x^2y^2 + xy + 1)y + (x^3y^3 - x^2y^2 - xy + 1)xy' = 0.$
8. $3y^2y' + y^3 = x - 1.$
9. $\text{sen}\,x\cos y\,dx + \cos x\,\text{sen}\,y\,dy = 0.$
10. $(1 + e^{x/y})\,dx + e^{x/y}\left(1 - \dfrac{x}{y}\right)dy = 0.$
11. $\dfrac{d^3x}{dt^3} - 3\dfrac{d^2x}{dt^2} + 3\dfrac{dx}{dt} - x = 0.$
12. $\dfrac{d^3x}{dt^3} - 6\dfrac{d^2x}{dt^2} + 9\dfrac{dx}{dt} = 0.$
13. $\dfrac{d^4y}{dx^4} + 2\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = 0.$
14. $\dfrac{d^3y}{dx^3} - \dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} = 0.$
15. $\dfrac{d^8y}{dx^8} - 2\dfrac{d^4y}{dx^4} + y = 0.$
16. $a\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{dy}{dx}.$
17. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = 0.$
18. $\dfrac{d^4y}{dx^4} = \dfrac{d^2y}{dx^2}.$
19. $(1+x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2x\dfrac{dy}{dx} = 0.$
20. $(1-y)\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = 0.$
21. $x\dfrac{d^2x}{dt^2} = 2\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2.$
22. $(1-t^2)\dfrac{d^2s}{dt^2} - t\dfrac{ds}{dt} = 2.$

23. Determinar o movimento de uma partícula que se move sôbre uma linha reta, atraída por uma fôrça que varia na razão inversa do quadrado da distância à origem.

SUMÁRIO DE TEOREMAS E FÓRMULAS IMPORTANTES

1. Funções hiperbólicas.
2. Convergência de seqüências e séries.
3. Derivação.
4. Integração.
5. Convergência uniforme e permuta de operações infinitas.
6. Limites especiais.
7. Integrais definidas especiais.
8. Teoremas do valor médio.
9. Desenvolvimentos em série. Séries de Taylor e de Fourier.
10. Máximos e mínimos.
11. Curvas.
12. Comprimento do arco, área, volume.

1. Funções hiperbólicas
(págs. 183-189)

$\mathrm{Sh}\, x = \tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x})$. $\qquad \mathrm{Th}\, x = \dfrac{\mathrm{Sh}\, x}{\mathrm{Ch}\, x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

$\mathrm{Ch}\, x = \tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})$. $\qquad \mathrm{Coth}\, x = \dfrac{1}{\mathrm{Th}\, x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$.

$\mathrm{Ch}^2 x - \mathrm{Sh}^2 x = 1$. $\qquad \mathrm{Ch}^2 x = \dfrac{1}{1 - \mathrm{Th}^2 x}$.

$\mathrm{Ch}\,(x \pm y) = \mathrm{Ch}\, x\, \mathrm{Ch}\, y \pm \mathrm{Sh}\, x\, \mathrm{Sh}\, y$.

$\mathrm{Sh}\,(x \pm y) = \mathrm{Sh}\, x\, \mathrm{Ch}\, y \pm \mathrm{Ch}\, x\, \mathrm{Sh}\, y$.

$\mathrm{Ch}^2 x = \tfrac{1}{2}(\mathrm{Ch}\, 2x + 1)$. $\qquad \mathrm{Sh}^2 x = \tfrac{1}{2}(\mathrm{Ch}\, 2x - 1)$.

$\mathrm{Arc\,Sh}\, x = \log\,(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

$\mathrm{Arc\,Ch}\, x = \log\,(x \pm \sqrt{x^2 - 1})$; $(x \geqq 1)$.

$$\text{Arc Th}\, x = \tfrac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x} \quad (|x| < 1)$$

$$\text{Arc Coth}\, x = \tfrac{1}{2} \log \frac{x+1}{x-1} \quad (|x| > 1)$$

2. Convergência de seqüências e séries

1. Seqüências infinitas (pág. 38).

Critério de convergência de Cauchy (pág. 40). Uma seqüência de números a_n será convergente se, e sòmente se para qualquer quantidade positiva ϵ existir um número N tal que,

$$|a_n - a_m| < \epsilon$$

quando $n > N$, $m > N$.

Operações com limites (págs. 41-42). Se $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ e $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ existirem, teremos

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n;$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n . b_n = \lim_{n\to\infty} a_n . \lim_{n\to\infty} b_n;$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}, \quad \text{desde que } \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0.$$

2. Séries infinitas (págs. 365 e seg.).

Critério de convergência de Cauchy (pág. 367). A série $\Sigma\, a_n$ convergirá se, e sòmente se para qualquer quantidade positiva ϵ existir um número N tal que

$$|a_n + a_{n+1} + \ldots + a_m| < \epsilon$$

quando $m > n > N$.

Nota.—Os critérios que seguem, são *suficientes,* mas não *necessários.*

Princípio da comparação das séries (pág. 377). Σa_n será convergente se existirem números b_n tais que $b_n \geqq |a_n|$ para qualquer valor de n, e se Σb_n fôr convergente.

Critérios da razão e da raiz (pág. 378). Σa_n convergirá se existir um número N, assim como outro $q < 1$, tais que

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < q \quad \text{ou} \quad \sqrt[n]{|a_n|} < q$$

para qualquer valor de $n > N$. Em particular, se houver um número $k < 1$ tal que

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = k \quad \text{ou} \quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = k.$$

Σa_n será divergente se houver um número $k > 1$ tal que

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = k \quad \text{ou} \quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = k.$$

Critério de Leibnitz (pág. 370). Σa_n convergirá se os seus têrmos tiverem sinais alternados e se $|a_n|$ tender monòtonamente para zero.

3. Derivação

1. Regras gerais (Idéias fundamentais, págs. 88 e seg.).

$$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x).$$

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}, \quad g(x) \neq 0 \text{ (págs. 136-139).}$$

$$[f(x)g(x)]^{(n)} = f^{(n)}(x)g(x) + \binom{n}{1}f^{(n-1)}(x)g'(x) + \binom{n}{2}f^{(n-2)}(x)g''(x) + \ldots + f(x)g^{(n)}(x).$$

(Regra de Leibnitz, pág. 202).

Regra da cadeia. Se $f(x) = g[\phi(x)]$,

$$\frac{df}{dx} = \frac{dg}{d\phi}\frac{d\phi}{dx},$$

$$\frac{d^2f}{dx^2} = \frac{d^2g}{d\phi^2}\left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2 + \frac{dg}{d\phi}\frac{d^2\phi}{dx^2}, \text{ etc. (págs. 153 e seg., 202).}$$

Se $u = f(\xi, \eta, \zeta, \ldots)$, onde $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$, $\ldots$,

$$\begin{aligned} u_x &= f_\xi \xi_x + f_\eta \eta_x + f_\zeta \zeta_x + \ldots, \\ u_{xx} &= f_{\xi\xi}\xi_x^2 + f_{\eta\eta}\eta_x^2 + f_{\zeta\zeta}\zeta_x^2 + \ldots \\ &\quad + 2f_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + 2f_{\xi\zeta}\xi_x\zeta_x + \ldots \\ &\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\quad + f_\xi \xi_{xx} + f_\eta \eta_{xx} + f_\zeta \zeta_{xx} + \ldots, \end{aligned}$$

com fórmulas correspondentes para u_{xy} e u_{yy} (pág. 476).

Funções implícitas. Se $F(x, y) = 0$,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2}{F_y^3} \qquad \text{(pág. 483).}$$

Funções expressas em têrmos de um parâmetro. Se $x = x(t)$, $y = y(t)$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt} \qquad \text{(pág. 262).}$$

Funções inversas.

$$\frac{dy}{dx} = 1\Big/\frac{dx}{dy} \qquad \text{(pág. 145).}$$

Se $\xi = \phi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$,

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\psi_y}{D}, \quad \frac{\partial x}{\partial \eta} = -\frac{\phi_y}{D}, \quad \frac{\partial y}{\partial \xi} = -\frac{\psi_x}{D}, \quad \frac{\partial y}{\partial \eta} = \frac{\phi_x}{D},$$

onde

$$D = \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \phi_x & \phi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{vmatrix} = \phi_x\psi_y - \phi_y\psi_x$$

(determinante funcional ou jacobiniano) (pág. 479).

2. **Fórmulas especiais** (págs. 94-96, 139-141, 149-150, 167 e seg., 186-187).

$(x^n)' = nx^{n-1}$.

$(\text{sen}\, x)' = \cos x$. $\qquad (\text{arc sen}\, x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

$(\cos x)' = -\text{sen}\, x$. $\qquad (\text{arc cos}\, x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos x^2} = \sec x^2.$$

$$(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sen} x^2} = -\operatorname{cosec} x^2.$$

$$(\operatorname{Sh} x)' = \operatorname{Ch} x.$$

$$(\operatorname{Ch} x)' = \operatorname{Sh} x.$$

$$(\operatorname{Th} x)' = \frac{1}{\operatorname{Ch} x^2} = \operatorname{Sech}^2 x.$$

$$(\operatorname{Coth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{Sh}^2 x} = -\operatorname{Cosech}^2 x.$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e;$$

em particular,

$$(\log x)' = \frac{1}{x}.$$

$$(\operatorname{arc\,tg} x') = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$(\operatorname{arc\,cotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

$$(\operatorname{Arc\,Sh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$(\operatorname{Arc\,Ch} x)' = \pm\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, (x>1).$$

$$(\operatorname{Arc\,Th} x)' = \frac{1}{1-x^2}, (\,|x|<1).$$

$$(\operatorname{Arc\,Coth} x)' = \frac{1}{1-x^2}, (\,|x|>1)$$

$$(a^x)' = a^x \log_e a;$$

em particular

$$(e^x)' = e^x.$$

$$(u^v)' = u^v(vu'/u + v' \log u).$$

4. Integração

1. **Regras gerais** (**Idéias fundamentais**, págs. 79 e seg.).

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx.$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_b^a f(x)\,dx \text{ (págs. 81 e seg., 141).}$$

Cálculo de integrais. Se $f(x) \geqq g(x)$, $b \geqq a$,

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqq \int_a^b g(x)\,dx \qquad \text{(pág. 126).}$$

Integração por partes (págs. 218-219).

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx.$$

Método de substituição (págs. 207-212).

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\phi(u)]\phi'(u)\,du,$$

onde $a = \phi(\alpha)$, $b = \phi(\beta)$.

Relação entre a derivação e a integração (págs. 111 e seg.).

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(u)\,du = f(x).$$

Integrais impróprias (págs. 197-254).

Se $f(x)$ fôr contínua, exceto no ponto $x = b$, em que se torna infinita, $\int_a^b f(x)\,dx$ será (absolutamente) convergente, se na vizinhança de $x = b$,

$$|f(x)| \leqq \frac{M}{(b-x)^\nu},$$

em que $\nu < 1$ (pág. 248).

$\int_a^\infty f(x)\,dx$ convergirá (absolutamente) se

$$|f(x)| \leqq \frac{M}{x^\nu},$$

onde $\nu > 1$, para valores de $x \geqq A$ (pág. 250).

2. Fórmulas especiais (págs. 82-87, 128-130, 142 e seg., 151, 168 e seg., 206, 208-209, 210, 213-217, 220 e seg.).

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}. \qquad \int \log x\,dx = x\log x - x.$$

$$\int \frac{dx}{x} = \log|x|. \qquad \int \frac{1}{x}\log x\,dx = \tfrac{1}{2}(\log x)^2.$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\log a}. \qquad \int \frac{1}{x\log x}\,dx = \log|\log x|.$$

$$\int x^a \log x\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1}\left(\log x - \frac{1}{a+1}\right); \quad a \neq -1.$$

$$\int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x. \qquad \int \operatorname{Sh} x \, dx = \operatorname{Ch} x.$$

$$\int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x. \qquad \int \operatorname{Ch} x \, dx = \operatorname{Sh} x.$$

$$\int \operatorname{tg} x \, dx = -\log |\cos x|. \qquad \int \operatorname{Th} x \, dx = \log \operatorname{Ch} x.$$

$$\int \operatorname{cotg} x \, dx = \log |\operatorname{sen} x|. \qquad \int \operatorname{Coth} x \, dx = \log |\operatorname{Sh} x|.$$

$$\int \operatorname{arc\,sen} x \, dx = x \operatorname{arc\,sen} x + \sqrt{1 - x^2}.$$

$$\int \operatorname{arc\,cos} x \, dx = x \operatorname{arc\,cos} x - \sqrt{1 - x^2}.$$

$$\int \operatorname{arc\,tg} x \, dx = x \operatorname{arc\,tg} x - \tfrac{1}{2} \log (1 + x^2).$$

$$\int \operatorname{arc\,cotg} x \, dx = x \operatorname{arc\,cotg} x + \tfrac{1}{2} \log (1 + x^2).$$

$$\int \operatorname{Arc\,Sh} x \, dx = x \operatorname{Arc\,Sh} x - \sqrt{1 + x^2}.$$

$$\int \operatorname{Arc\,Ch} x \, dx = x \operatorname{Arc\,Ch} x - \sqrt{x^2 - 1}.$$

$$\int \operatorname{Arc\,Th} x \, dx = x \operatorname{Arc\,Th} x + \tfrac{1}{2} \log (1 - x^2).$$

$$\int \operatorname{Arc\,Coth} x \, dx = x \operatorname{Arc\,Coth} x + \tfrac{1}{2} \log (x^2 - 1).$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x} = \log \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|. \qquad \int \frac{dx}{\operatorname{Sh} x} = \log \left| \operatorname{Th} \frac{x}{2} \right|.$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \log \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| \qquad \int \frac{dx}{\operatorname{Ch} x} = 2 \operatorname{arc\,tg} \left(\operatorname{Th} \frac{x}{2} \right).$$

$$= 2 \operatorname{Arc\,Th} \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} \right).$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x \cos x} = \log |\operatorname{tg} x|. \qquad \int \frac{dx}{\operatorname{Sh} x \operatorname{Ch} x} = \log |\operatorname{Th} x|.$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x} = -\operatorname{cotg} x. \qquad \int \frac{dx}{\operatorname{Sh}^2 x} = -\operatorname{Coth} x.$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x. \qquad \int \frac{dx}{\operatorname{Ch}^2 x} = \operatorname{Th} x.$$

$$\int \operatorname{sen}^2 x \, dx = \tfrac{1}{2}(x - \operatorname{sen} x \cos x).$$

$$\int \cos^2 x \, dx = \tfrac{1}{2}(x + \operatorname{sen} x \cos x).$$

$$\left.\begin{aligned} \int \frac{dx}{a^2 \operatorname{sen}^2 x + b^2 \cos^2 x} &= \frac{1}{ab} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{a}{b} \operatorname{tg} x\right) \\ \int \frac{dx}{a^2 \operatorname{sen}^2 x - b^2 \cos^2 x} &= -\frac{1}{ab} \operatorname{Arc\,Th}\left(\frac{a}{b} \operatorname{tg} x\right) \end{aligned}\right\} a, b \neq 0.$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a}.$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \begin{cases} -\dfrac{1}{a} \operatorname{Arc\,Th} \dfrac{x}{a} = \dfrac{1}{2a} \log \dfrac{a - x}{a + x}, & \text{se } |x| < a. \\ -\dfrac{1}{a} \operatorname{Arc\,Coth} \dfrac{x}{a} = \dfrac{1}{2a} \log \dfrac{x - a}{x + a}, & \text{se } |x| > a, \ a > 0. \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \begin{cases} + \operatorname{arc\,sen} \dfrac{x}{a}. \\ - \operatorname{arc\,cos} \dfrac{x}{a}. \end{cases} \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \begin{cases} - \dfrac{1}{a} \operatorname{arc\,sen} \dfrac{a}{x}. \\ + \dfrac{1}{a} \operatorname{arc\,cos} \dfrac{a}{x}. \end{cases}$$

$$\int \frac{x \, dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \sqrt{a^2 + x^2}.$$

$$\int \frac{x \, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\sqrt{a^2 - x^2}.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \operatorname{Arc\,Sh} \frac{x}{a} = \log(\pm x + \sqrt{x^2 + a^2}).$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \operatorname{Arc\,Ch} \frac{x}{a} = \log(x \pm \sqrt{x^2 - a^2}).$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + a^2}} = -\frac{1}{a} \operatorname{Arc\,Sh} \frac{a}{x} = -\frac{1}{a} \log \frac{\pm a + \sqrt{a^2 + x^2}}{x}.$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{1}{a} \operatorname{Arc\,Ch} \frac{a}{x} = -\frac{1}{a} \log \frac{a \pm \sqrt{a^2 - x^2}}{x}.$$

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}a^2\operatorname{arc}\cos\frac{x}{a}+\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}.$$

$$\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx = -\frac{1}{2}a^2\operatorname{Arc}\operatorname{Ch}\frac{x}{a}+\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-a^2}.$$

$$\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{2}a^2\operatorname{Arc}\operatorname{Sh}\frac{x}{a}+\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a^2}.$$

$$\int\frac{dx}{x^2+2bx+c} = -\frac{1}{\sqrt{b^2-c}}\operatorname{Arc}\operatorname{Th}\frac{x+b}{\sqrt{b^2-c}} =$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{b^2-c}}\log\left|\frac{\sqrt{b^2-c}-x-b}{\sqrt{b^2-c}+x+b}\right|,$$

se $c < b^2$, isto é, se $x^2+2bx+c=0$ tiver raízes reais.

$$\int\frac{dx}{x^2+2bx+c} = \frac{1}{\sqrt{c-b^2}}\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{x+b}{\sqrt{c-b^2}},$$

se $c > b^2$, isto é, $x^2+2bx+c=0$ tiver raízes imaginárias.

$$\int e^{ax}\operatorname{sen} bx\,dx = \frac{1}{a^2+b^2}e^{ax}(a\operatorname{sen} bx - b\cos bx).$$

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{1}{a^2+b^2}e^{ax}(a\cos bx + b\operatorname{sen} bx).$$

$$\int\operatorname{sen}^n x\cos x\,dx = \frac{\operatorname{sen}^{n+1}x}{n+1}.$$

Fórmulas de recorrência (págs. 221 e seg.).

$$\int\cos^n x\,dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1}x\operatorname{sen} x+\frac{n-1}{n}\int\cos^{n-2}x\,dx.$$

$$\int\operatorname{sen}^n x\,dx = -\frac{1}{n}\operatorname{sen}^{n-1}x\cos x+\frac{n-1}{n}\int\operatorname{sen}^{n-2}x\,dx.$$

$$\int x^n\cos x\,dx = x^n\operatorname{sen} x - n\int x^{n-1}\operatorname{sen} x\,dx.$$

$$\int x^n\operatorname{sen} x\,dx = -x^n\cos x + n\int x^{n-1}\cos x\,dx.$$

$$\int\operatorname{sen}^m x\cos^n x\,dx = \frac{\operatorname{sen}^{m+1}x\cos^{n-1}x}{m+n}+\frac{n-1}{m+n}\int\operatorname{sen}^m x\cos^{n-2}x\,dx.$$

$$\int (\log x)^n \, dx = x(\log x)^n - \int (\log x)^{n-1} \, dx.$$

$$\int x^n e^n \, dx = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^n \, dx.$$

$$\int x^a (\log x)^n \, dx = \frac{x^{a+1} (\log x)^n}{a+1} - \frac{n}{a+1} \int x^a (\log x)^{n-1} \, dx \quad (a \neq -1).$$

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{x}{2(n-1)\,(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)} \int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}}.$$

3. Integração de tipos especiais de funções.

(a) *Funções racionais.* São reduzidas aos três tipos fundamentais seguintes, pela decomposição em frações parciais (págs. 226-234):

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^n} = -\frac{1}{n-1} \, \frac{1}{(x-\alpha)^{n-1}};$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+2bx+c)^n} = \frac{1}{(c-b^2)^{n-\frac{1}{2}}} \int \frac{du}{(1+u^2)^n},$$

onde $c - b^2 > 0$, $u = (x+b)/\sqrt{c-b^2}$, sendo a integral do segundo membro calculada pela última fórmula de recorrência dada acima;

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2+2bx+c)^n} = -\frac{1}{2(n-1)} \, \frac{1}{(x^2+2bx+c)^{n-1}} - b \int \frac{dx}{(x^2+2bx+c)^n},$$

sendo a integral do segundo membro do tipo imediatamente anterior.

No que vai seguir, R indica uma função racional.

(b) $\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)\, dx$ (pág. 237).

Substituição: $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, de sorte que $\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2}$.

Se, entretanto, R fôr uma função par, ou contiver sòmente $\operatorname{tg} x$, a substituição seguinte é mais conveniente:

$$u = \operatorname{tg} x, \ \operatorname{sen}^2 x = \frac{u^2}{1+u^2}, \ \cos^2 x = \frac{1}{1+u^2}, \ \frac{dx}{du} = \frac{1}{1+u^2}.$$

(c) $\int R(\operatorname{Ch} x, \operatorname{Sh} x)\, dx$ (pág. 237).

Substituição: $t = \operatorname{Th} \frac{x}{2}$, de modo que $\operatorname{Sh} x = \frac{2t}{1-t^2}$, $\operatorname{Ch} x = \frac{1+t^2}{1-t^2}$, $\frac{dx}{dt} = \frac{2}{1-t^2}$.

(d) $\int R(e^{mx})\, dx$.

Substituição: $t = e^{mx}$, $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{mt}$.

(e) $\int R(x, \sqrt{1-x^2})\, dx$ (págs. 237-238).

Substituição:

$$t = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}, \ x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \ \sqrt{1-x^2} = \frac{2t}{1+t^2}, \ \frac{dx}{dt} = -\frac{4t}{(1+t^2)^2}.$$

(f) $\int R(x, \sqrt{x^2-1})\, dx$ (pág. 238).

Substituição:

$$t = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}, \ x = \frac{1+t^2}{1-t^2}, \ \sqrt{x^2-1} = \frac{2t}{1-t^2}, \ \frac{dx}{dt} = \frac{4t}{(1-t^2)^2}.$$

(g) $\int R(x, \sqrt{1+x^2})\, dx$ (pág. 238).

Substituição:

$$t = x + \sqrt{x^2+1}, \ x = \frac{t^2-1}{2t}, \ \sqrt{x^2+1} = \frac{1+t^2}{2t}, \ \frac{dx}{dt} = \frac{t^2+1}{2t^2}.$$

(h) $\int R(x, \sqrt{ax^2+2bx+c})\, dx$ (pág. 239).

A substituição $\xi = \frac{ax+b}{\sqrt{|ac-b^2|}}$ reduz esta integral a uma dos três tipos precedentes.

(i) $\int R(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{cx+d})\, dx$ (pág. 239).

Substituição: $\xi = \sqrt{cx+d}$ ou $x = \frac{1}{c}(\xi^2 - d)$, $\frac{dx}{d\xi} = \frac{2\xi}{c}$.

(k) $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$ (pág. 240).

Substituição:

$$\xi = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}},\ x = -\frac{d\xi^n - b}{c\xi^n - a},\ \frac{dx}{d\xi} = \frac{ad-bc}{(c\xi^n - a)^2}\, n\xi^{n-1}.$$

5. Convergência uniforme e permuta de operações infinitas

Definições relativas à convergência uniforme, na página 391.

Uma série uniformemente convergente num intervalo fechado, cujos têrmos sejam funções contínuas, representa uma função contínua no intervalo referido (pág. 393).

Se $|f_n(x)| \leqq a_n$ e Σa_n convergir, $\Sigma f_n(x)$ convergirá uniformemente (e absolutamente) (pág. 392).

Permuta da somação e da derivação (págs. 396-397). Qualquer série convergente de funções contínuas pode ser derivada têrmo a têrmo, desde que a série resultante seja *uniformemente convergente*.

Permuta da somação e da integração (pág. 394). Qualquer série de funções contínuas, uniformemente convergente, pode ser integrada têrmo a têrmo. A série resultante também convergirá uniformemente.

6. Limites especiais

Fórmula de Stirling (pág. 361).

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}} = 1.$$

Produto de Wallis (págs. 223-225, 363, 445).

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{1=n}^{\infty} \left(\frac{2n}{2n-1}\, \frac{2n}{2n+1}\right).$$

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!\sqrt{n}}.$$

(Produtos infinitos, págs. 419-422).

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \qquad \text{(pág. 175).}$$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} = \prod_{p}^{\infty}\frac{1}{1-p^{-s}}, \quad s>1 \qquad \text{(pág. 420).}$$

$$\operatorname{sen}\pi x = \pi x \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right) \qquad \text{(pág. 445).}$$

Definição da função gama (págs. 250-251).

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t}t^{x-1}\,dx \qquad (x \geqq 1):$$

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x);$$

se x fôr um inteiro positivo n,

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

Ordem de grandeza das funções (págs. 190-195).

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{cx}}{x^{\alpha}} = \infty, \ \text{se } c>0 \qquad \text{(pág. 192).}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x^{\alpha}} = 0, \ \text{se } \alpha>0 \qquad \text{(pág. 192).}$$

$$\lim_{x\to 0} x^{\alpha}\log x = 0, \ \text{se } \alpha>0 \qquad \text{(pág. 195).}$$

7. Integrais definidas especiais

Relações ortogonais das funções trigonométricas (pág. 217).

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\,dx = \begin{cases}0, & \text{se } m \neq n.\\ \pi, & \text{se } m = n,\ n \neq 0.\end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\operatorname{sen} mx \cos nx\,dx = 0.$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\cos mx \cos nx\,dx = \begin{cases}0, & \text{se } m \neq n.\\ \pi, & \text{se } m = n,\ n \neq 0.\end{cases}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \qquad \text{(pág. 496).}$$

$$\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\pi \qquad \text{(págs. 251-253, 418, 450).}$$

8. Teoremas do valor médio

Teorema do valor médio do cálculo diferencial (pág. 103).

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x+\theta h), \quad 0 < \theta < 1.$$

Se $f(x) = f(x+h) = 0$, teremos o *teorema de Rolle* (pág. 105): há sempre um valor zero para a derivada, entre dois valores zero da função.

Teorema geral do valor médio (págs. 135, 203).

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

onde ξ é um valor compreendido entre a e b.

Teorema de Taylor (págs. 320-323).

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1!}f'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \dots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x) + R_n,$$

com o resto (págs. 323-324):

$$\begin{aligned} R_n &= \frac{1}{n!}\int_0^h (h-\tau)^n f^{(n+1)}(x+\tau)\,d\tau \\ &= \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{n+1}(x+\theta h) \\ &= \frac{h^{n+1}}{n!}(1-\theta)^n f^{n+1}(x+\theta h) \qquad (0<\theta<1). \end{aligned}$$

Teorema do valor médio do cálculo integral (pág. 127).

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f(\xi), \text{ onde } a \leqq \xi \leqq b.$$

$$\int_a^b f(x)\,p(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b p(x)\,dx, \text{ se } p(x) \geqq 0.$$

9. Desenvolvimentos em séries: séries de Taylor e de Fourier

1. Séries de potências (definição, pág. 398).

(*a*) *Séries de potências em geral.*

Qualquer série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

de uma variável possui um *raio de convergência* ρ (que pode ser zero ou infinito); a série convergirá quando $|x| < \rho$, e efetivamente, convergirá *uniforme* e absolutamente em qualquer intervalo $|x| \leqq \eta$, em que $\eta < \rho$. Quando $|x| > \rho$, a série será divergente (pág. 400).

Se o resto do teorema de Taylor tender para zero à medida que n cresce, teremos a série infinita de potências (pág. 325)

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1!}f'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \dots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x) + \dots.$$

(*b*) *Série de Taylor, especial* (páginas 316-319, 326-330, 405-409, 422-423).

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + - \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \dots$$

para $-1 < x \leqq 1$.

$$\left.\begin{aligned} e^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \\ \operatorname{sen} x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \\ \operatorname{Sh} x &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \\ \operatorname{Ch} x &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \end{aligned}\right\} \text{para todos os valores de } x$$

$$\operatorname{tg} x = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu-1} \frac{2^{2\nu}(2^{2\nu}-1)B_{2\nu}}{(2\nu)!} x^{2\nu-1} \quad \text{para} -\frac{2}{\pi} < x < \frac{\pi}{2},$$

$$x \operatorname{cotg} x = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{2^{2\nu}B_{2\nu}}{(2\nu)!} x^{2\nu} \quad \text{para} -\pi < x < \pi,$$

onde as quantidades $B_{2\nu}$ são *números de Bernouilli* (pág. 423).

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{arc\,sen} x &= x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^7}{7} + \dots \\ \operatorname{Arc\,Sh} x &= x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} - \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^7}{7} + - \dots \\ \operatorname{arc\,tg} x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - + \dots\end{aligned}\right\} \begin{array}{c}\text{para}\\ -1 \leqq x \leqq 1.\end{array}$$

$$\operatorname{Arc\,Th} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \qquad \text{para } |x| < 1.$$

Série binômia.

$$(1+x)^\alpha$$
$$= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \dots$$

para $-1 < x < 1$,
se $\alpha > -1$ para $x = 1$ também,
se $\alpha \geqq 0$ para $x = -1$ também;

em particular,

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + - \dots,$$

$$\frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + - \dots,$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2.4}x^2 + \frac{1.3}{2.4.6}x^3 - \frac{1.3.5}{2.4.6.8}x^4 + - \dots,$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1.3}{2.4}x^2 - \frac{1.3.5}{2.4.6}x^2 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}x^4 - + \dots.$$

Integral elíptica:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2\phi}}$$
$$= \frac{\pi}{2}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 k^6 + \dots\right].$$

2. Série de Fourier.

Se a função $f(x)$ fôr secionalmente regular no intervalo $-\pi \leqq x \leqq \pi$, isto é, se a sua primeira derivada fôr secionalmente contínua, a série de Fourier

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty}(a_\nu \cos \nu x + b_\nu \operatorname{sen} \nu x),$$

onde $$a_\nu = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\cos \nu t\, dt, \quad b_\nu = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \operatorname{sen} \nu t\, dt$$

será absolutamente convergente através de todo o intervalo. Se $f(x)$ tiver um número finito de saltos de descontinuidade, ao passo que $f'(x)$ fôr secionalmente contínua, a série convergirá uniformemente em qualquer subintervalo fechado no qual não haja descontinuidades de $f(x)$. Em qualquer ponto em que $f(x)$ fôr contínua, a série representará o valor da função, enquanto que nos pontos de descontinuidade, ela será a média aritmética dos limites da direita e da esquerda de $f(x)$ (páginas 447-450).

10. Máximos e mínimos

As regras que seguem valem, apenas, para os máximos e mínimos no *interior* da região considerada.

Para que ξ possa ser um valor extremo da função $y = f(x)$, $f'(\xi)$ deve se anular. Quando tal condição se verificar, haverá um máximo ou um mínimo, se a primeira derivada que não se anula fôr de ordem par; se ela fôr ímpar, não haverá máximo nem mínimo. No primeiro caso ocorrerá máximo ou mínimo, conforme o sinal da primeira derivada que não se anula fôr negativo ou positivo, respectivamente (páginas 158 e seg.).

11. Curvas

ξ e η indicam, no que segue, as coordenadas comuns.

Equação da curva:

(*a*) $y = f(x)$, (*b*) $F(x, y) = 0$, (*c*) $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$.

Equação da tangente no ponto (x, y) (pág. 263):

$$(a)\ \eta - y = (\xi - x) f'(x), \quad (b)\ (\xi - x) F_x + (\eta - y) F_y = 0,$$
$$(c)\ [\xi - \phi(t)]\psi'(t) - [\eta - \psi(t)]\phi'(t) = 0.$$

Equação da normal no ponto (x, y) (pág. 263):

$$(a)\ \xi - x + (\eta - y) f'(x) = 0, \quad (b)\ (\xi - x) F_y - (\eta - y) F_x = 0,$$
$$(c)\ [\xi - \phi(t)]\phi'(t) + [\eta - \psi(t)]\psi'(t) = 0.$$

Curvatura (pág. 281):

$$(a)\ k = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}, \quad (b)\ k = -\frac{F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2}{(F_x^2 + F_y^2)^{3/2}},$$
$$(c)\ k = \frac{\dot\phi\ddot\psi - \ddot\phi\dot\psi}{(\dot\phi^2 + \dot\psi^2)^{3/2}}.$$

Raio de curvatura (pág. 282):

$$\rho = \frac{1}{|k|}.$$

Evoluta (lugar do centro de curvatura) (págs. 283, 307-311):

$$(a)\ \xi = x - y'\,\frac{1 + y'^2}{y''}, \quad \eta = y + \frac{1 + y'^2}{y''};$$
$$(b)\ \xi = x + F_x\,\frac{F_x^2 + F_y^2}{F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2},$$
$$\eta = y + F_y\,\frac{F_x^2 + F_y^2}{F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2};$$
$$(c)\ \xi = \phi - \dot\psi\,\frac{\dot\phi^2 + \dot\psi^2}{\dot\phi\ddot\psi - \dot\psi\ddot\phi}, \quad \eta = \psi + \dot\phi\,\frac{\dot\phi^2 + \dot\psi^2}{\dot\phi\ddot\psi - \ddot\phi\dot\psi}.$$

Involuta (pág. 309):

$$\xi = x + (a - s)\dot x, \quad \eta = y + (a - s)\dot y,$$

onde a é uma constante arbitrária e s o comprimento do arco, medido a partir de um ponto dado.

Ponto de inflexão (págs. 159, 266). A condição necessária para a existência de um ponto de inflexão, é:

$$(a)\ y'' = 0, \quad (b)\ F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2 = 0,$$
$$(c)\ \dot x\ddot y - \ddot x\dot y = 0.$$

Ângulo entre duas curvas (pág. 264):

$$(b)\quad \cos\omega = \frac{F_x G_x + F_y G_y}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2}\sqrt{G_x^2 + G_y^2}},$$

$$(c)\quad \cos\omega = \frac{\dot{x}\dot{x}_1 + \dot{y}\dot{y}_1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2}}.$$

Em particular, as curvas serão ortogonais se

$$(b)\quad F_x G_x + F_y G_y = 0, \quad (c)\quad \dot{x}\dot{x}_1 + \dot{y}\dot{y}_1 = 0;$$

tocar-se-ão, se

$$(b)\quad F_x G_y - F_y G_x = 0, \quad (c)\quad \dot{x}\dot{y}_1 - \dot{x}_1\dot{y} = 0.$$

Duas curvas $y = f(x)$, $y = g(x)$ apresentarão contato de ordem n no ponto x, se

$$f(x) = g(x), \quad f'(x) = g'(x), \ \ldots, \quad f^{(n)}(x) = g^{(n)}(x),$$
$$f^{n+1}(x) \neq g^{n+1}(x)$$

(págs. 331-333).

12. Comprimento de arco, área, volume

Comprimento de arco (págs. 276-280). Seja uma curva plana dada pelas equações

$$(a)\ y = f(x), \quad (b)\ F(x, y) = 0, \quad (c)\ x = \phi(t),\ y = \psi(t),$$
$$(d)\ \text{(coordenadas polares)}\ r = r(\theta).$$

O comprimento de arco será

$$(a)\quad s = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}\, dx, \qquad (c)\quad s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt,$$

$$(b)\quad s = \int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{F_y}\sqrt{F_x^2 + F_y^2}\, dx, \qquad (d)\quad s = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\theta.$$

Área de uma superfície plana. A área limitada pela curva

$$r = r(\theta)$$

e por dois raios vectores θ_0, θ_1, sendo r, θ as coordenadas polares, é dada por

$$\frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta_1} r^2\, d\theta \qquad \text{(pág. 275).}$$

A área compreendida entre a curva

$$y = f(x),$$

as duas coordenadas $x = x_0$, $x = x_1$, e o eixo dos x, é

$$\int_{x_0}^{x_1} y\,dx \qquad \text{(pág. 80)}.$$

Volume. O volume tendo por base a região R e limitado na parte superior pela superfície

$$z = f(x, y)$$

é dado por

$$V = \iint_R f(x, y)\,dx\,dy \qquad \text{(pág. 487)}.$$

EXEMPLOS DIVERSOS

CAPÍTULO I

1. Demonstrar que, se p e q forem inteiros, o desenvolvimento de p/q como fração decimal termina, ou é periódico a partir de certo ponto. Demonstrar, também, que cada fração decimal, finita ou periódica, representa um número racional.

2. Exprimir 39 no sistema ternário (base 3).

3. Como será escrito o número 156 (a) na escala binária (base 2), (b) na escala quaternária (base 4)?

4. Escrever os seguintes números no sistema de base 12: (a) 1076; (b) 10 000; (c) 20 736; (d) 1/6; (e) 1/64; (f) 1/5.

5. Pode-se determinar $\sqrt{2}$ com uma casa decimal exata, fazendo $1^2 = 1 < 2$, $2^2 = 4 > 2$, portanto, $1 < \sqrt{2} < 2$, em seguida $1{,}3^2 = 1{,}69 < 2$, $1{,}4^2 = 1{,}96 < 2$, $1{,}5^2 = 2{,}25 > 2$, logo $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$.

(a) Continuar o processo até mais uma decimal.

(b) Calcular $\sqrt{7}$ com duas casas decimais exatas, pelo mesmo método.

6. Para quais valores de x se verificam as seguintes desigualdades?

(a) $x^2 + 3x + 1 \geqq 0$. (c) $\left|x + \frac{1}{x}\right| \geqq 6$.

(b) $x^2 - x + 1 \geqq 0$. (d) $3x - 2 \leqq x^3$.

7. Demonstrar que a média aritmética $\frac{a+b}{2}$, das duas quantidades positivas a e b, não é menor do que a média geométrica, $\sqrt{ab}$, isto é, que

$$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}.$$

Quando se verifica o sinal de igualdade?

8. A quantidade ξ, definida por $\frac{1}{\xi} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$ é denominada a média harmônica das duas quantidades positivas a, b. Mostrar que a média geométrica não é menor do que a harmônica, isto é, que $\sqrt{ab} \geqq \xi$.

Quando se verifica a igualdade?

9.* Mostrar que as seguintes desigualdades se verificam se a, b, c forem positivos:

(a) $a^2 + b^2 + c^2 \geqq ab + bc + ca$.
(b) $(a + b)(b + c)(c + a) \geqq 8abc$.
(c) $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geqq abc(a + b + c)$.

10. Os números x_1, x_2, x_3 e a_{ik} (i, k = 1, 2, 3) são todos positivos. Além disso, $a_{ik} \leqq M$ e $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leqq 1$. Provar que

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \ldots + a_{33}x_3^2 \leqq 3M.$$

11.* Provar que se os números $a_1, a_2, \ldots, a_n$ e $b_1, b_2, \ldots, b_n$ satisfizerem as desigualdades $a_1 \geqq a_2 \geqq \ldots \geqq a_n$, $b_1 \geqq b_2 \geqq \ldots \geqq b_n$, verificar-se-á:

$$n \sum_1^n a_i b_i \geqq \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i \right).$$

12. Demonstrar as seguintes propriedades dos coeficientes binômios:

(a) $1 - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \ldots \pm \binom{n}{n} = 0.$

(b) $\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \ldots + n\binom{n}{n} = n\, 2^{n-1}.$

(c) $1.2\binom{n}{2} + 2.3\binom{n}{3} + \ldots + (n-1)n\binom{n}{n} = n(n-1)2^{n-2}.$

(d) $1 + \frac{1}{2}\binom{n}{1} + \frac{1}{3}\binom{n}{2} + \ldots + \frac{1}{n+1}\binom{n}{n} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$

(e) $\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \ldots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}.$

13. Demonstrar que, somando-se

$$\nu(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+k+1) - (\nu-1)\nu(\nu+1)\ldots(\nu+k)$$

de $\nu = 1$ a $\nu = n$, virá:

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+k) = \frac{n(n+1)\ldots(n+k+1)}{k+2}.$$

14. Calcular $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$, empregando a relação

$$\nu^3 = \nu(\nu+1)(\nu+2) - 3\nu(\nu+1) + \nu.$$

15. Calcular

(a) $\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$

(b) $\frac{1}{1.3} + \frac{1}{2.4} + \frac{1}{3.5} + \ldots + \frac{1}{n(n+2)}.$

(c) $\frac{1}{1.2.4} + \frac{1}{2.3.5} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)(n+3)}.$

16. Estabelecer uma fórmula para o têrmo de ordem n das seguintes progressões aritméticas:

(a) 1, 2, 4, 7, 11, 16, ...

(b) −7, −10, −9, 1, 25, 68, ...

17.* Mostrar que a soma dos n primeiros têrmos de uma progressão aritmética de ordem k é

$$aS_k + bS_{k-1} + \ldots + pS_1 + qn,$$

onde S_ν representa a soma das n primeiras potências de ordem ν, e $a, b, \ldots, p, q$ são independentes de n. Calcular as somas das progressões aritméticas do ex. **16.**

18.* Demonstrar o teorema do binômio

$$(a + b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \ldots + b^n$$

por indução matemática. (Ver, também, o Cap. III, pág. 201.)

19. Calcular

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}\right)$.

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}\right)$.

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[4]{n}} + \frac{1}{\sqrt[4]{n+1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[4]{2n}}\right)$.

20. Se $\sum\limits_{i=0}^{k} a_i = 0$, demonstrar que $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=0}^{k} a_i \sqrt{n+i} = 0$.

21. Demonstrar que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^5}{2^n} = 0$.

22. Provar que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^5}{2^n} = 0$.

23. Demonstrar que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2} = 0$.

24. Provar que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[(2n+1)]{n^2 + n} = 0$.

25. Empregando o critério de convergência de Cauchy, mostrar que as seqüências abaixo convergem:

(a) $a_n = \frac{1}{n}$.

(b) $a_n = \frac{n+1}{n}$.

(c)* $a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$.

(d)* $a_n = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots \pm \frac{1}{n!}$.

26.* Mostrar que os limites das seqüências (c), (d) do exemplo anterior são recíprocos (assim como o limite da seqüência (d) é $1/e$!).

27.* Demonstrar que o limite da seqüência

$$\sqrt{2}, \quad \sqrt{2+\sqrt{2}}, \quad \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \ldots$$

(*a*) existe; (*b*) é igual a 2.

28*. Provar que o limite da seqüência

$$a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}$$

existe. Mostrar que tal limite é menor do que 1, mas não do que ½.

29. Provar que o limite da seqüência

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}$$

existe, é igual ao do exemplo anterior, maior do que ½, mas não excede 1.

30. Estabelecer os seguintes valores extremos do limite L dos dois exemplos anteriores: $\frac{37}{60} < L < \frac{57}{60}$.

31.* Sejam a_1, b_1, dois números positivos quaisquer, sendo $a_1 < b_1$. Seja, ainda,

$$a_2 = \frac{2a_1b_1}{a_1+b_1}, \quad b_2 = \sqrt{a_1b_1},$$

e em geral

$$a_n = \frac{2a_{n-1}\,b_{n-1}}{a_{n-1}+b_{n-1}}, \quad b_n = \sqrt{a_{n-1}\,b_{n-1}}.$$

Provar que as seqüências $a_1, a_2, \ldots$ e $b_1, b_2, \ldots$ convergem e têm o mesmo limite.

32.* Se $a_n > 0$ e $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$, teremos $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$.

33. Empregar a fórmula do exemplo anterior (n.º 32) para calcular os limites das seguintes seqüências:

$$(a)\ \sqrt[n]{n}; \quad (b)\ \sqrt[n]{n^5+n^4}; \quad (c)\ \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}.$$

34. Considerando o exemplo 33(*c*), mostrar que

$$n! = n^n e^{-n} a_n,$$

onde a_n é um número cuja raiz n tende para 1. (Ver cap. VII, apêndice, pág. 363.)

35. Provar que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x+2}{x+1} = 2$. Determinar um δ tal, que para $|x| < \delta$ a diferença entre 2 e $\frac{x+2}{x+1}$ seja, em valor absoluto, (*a*) menor do que $\frac{1}{10}$; (*b*) menor do que $\frac{1}{1\,000}$; (*c*) menor do que ϵ, $\epsilon > 0$.

36. (*a*) Provar que $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x+2}{x+1} = \dfrac{3}{2}$. Determinar um δ tal, que para $|1-x| < \delta$, a diferença entre $\dfrac{3}{2}$ e $\dfrac{x+2}{x+1}$ seja menor do que ϵ ($\epsilon > 0$), em valor absoluto.

Fazer o mesmo (*b*) para $\lim\limits_{x \to 2} \sqrt{1 + x^3}$; (*c*) para $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$.

37. Demonstrar que (*a*) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \dfrac{1}{2}$.

$$(b) \lim_{x \to \infty} \sqrt{x + \tfrac{1}{2}}\,(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = \tfrac{1}{2}.$$

38. Provar que $\lim\limits_{m \to \infty} (\cos \pi x)^{2m}$ existe para cada valor de x, sendo igual a 1 ou a 0, conforme x seja inteiro ou não.

39.* Demonstrar que $\lim\limits_{n \to \infty} [\lim\limits_{m \to \infty} (\cos \pi n! x)^{2m}]$ existe para todos os valores de x, sendo igual a 1 ou a 0, conforme x fôr racional ou irracional.

40. Determinar quais das funções seguintes são contínuas. Estabelecer os pontos de descontinuidade para as descontínuas.

$$(a)\ f(x) = \frac{x^5 + 5x^3 + 3x^2}{\operatorname{sen} x}, \quad f(0) = 0.$$

$$(b)\ f(x) = \frac{x^5 + 5x^3 + 3x}{\operatorname{sen} x}, \quad f(0) = 0.$$

$$(c)\ f(x) = \lim_{m \to \infty} (\cos \pi x)^{2m}.$$

$$(d)\ f(x) = \lim_{n \to \infty} [\lim_{m \to \infty} (\cos \pi n! x)^{2m}].$$

41. Seja $f(x)$ uma função contínua para $0 \leqq x \leqq 1$. Suponhamos, além disso, que $f(x)$ admita sòmente valores racionais, e que $f(x) = \tfrac{1}{2}$ quando $x = \tfrac{1}{2}$. Provar, então, que $f(x) = \tfrac{1}{2}$ em todo o intervalo.

42. A função

$$f(x) = 2 \operatorname{sen} 3x + 10 \cos 5x$$

possui algum zero real?

43*. Se $f(x)$ satisfizer a equação funcional

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

para todos os valores de x e de y, determinar os valores de $f(x)$ nos pontos racionais, e provar que se $f(x)$ fôr contínua, $f(x) = cx$, onde c é uma constante.

44.* Demonstrar a recíproca do teorema da continuidade uniforme, a saber: se $f(x)$ fôr uniformemente contínua no intervalo semi-aberto $a < x \leqq b$, tenderá para um limite único, à medida que $x \to a$ (que pode ser adotado como o valor de $f(a)$).

45. Desenhar os gráficos seguintes, escrevendo, também, as equações em coordenadas cartesianas:

$$(a)\ r = a + b\cos\theta \quad \text{(Caracol de Pascal).}$$

$$(b)\ r = \frac{2}{2-\cos\theta} \quad \text{(Elipse).}$$

$$(c)\ r = \frac{2a\,\mathrm{sen}^2\,\theta}{\cos\theta} \quad \text{(Cissóide).}$$

$$(d)\ r = \frac{3a\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta}{\mathrm{sen}^3\,\theta + \cos^3\theta} \quad \text{(Fólio de Descartes).}$$

46.* Mostrar que a equação da elipse com um dos focos na origem é

$$r = \frac{k}{1 - e\cos(\theta - \theta_0)}.$$

47. Seja c o número complexo $x + iy$, representado por um ponto no sistema de coordenadas cartesianas. Desenhar as curvas

$$(a)\quad \left|\frac{c-i}{c+i}\right| = 2.$$

$$(b)^*\quad \left|\frac{c-\alpha}{c-\beta}\right| = k, \quad \alpha,\ \beta \text{ constantes complexas.}$$

$$(c)\quad |c^2 - 1| = k.$$

48. Sejam c_1, c_2 dois números complexos. Provar que

$$(a)\quad |c_1 \pm c_2| \leqq |c_1| + |c_2|.$$

$$(b)\quad |c_1 \pm c_2| \geqq |c_1| - |c_2|.$$

49. Demonstrar a igualdade

$$|c_1 + c_2|^2 + |c_1 - c_2|^2 = 2|c_1|^2 + 2|c_2|^2$$

dando a sua interpretação geométrica.

50. Provar que $(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)^n = \cos n\theta + i\,\mathrm{sen}\,n\theta$, por indução matemática.

CAPÍTULO II

51.* Provar, diretamente, que a derivada da função

$$f(x) = x^2\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{x},\ x \neq 0;\ f(0) = 0$$

existe em todos os pontos, sendo igual a

$$-\cos\frac{1}{x} + 2x\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{x},\ x \neq 0;\ 0 \text{ em } x = 0.$$

Mostrar que, embora $f'(x)$ não seja contínua em $x = 0$, o teorema do valor médio ainda é aplicável, e a propriedade exposta no exemplo n.º 57, que segue, é verdadeira (ver as págs. 199, 200 do texto).

52. Desenhar o gráfico da função

$$f(x) = x \operatorname{sen} \frac{1}{x}, \; x \neq 0; \; f(0) = 0$$

determinando sua derivada para $x \neq 0$. Mostrar que tal derivada não existe em $x = 0$, mas que o quociente das diferenças $\frac{f(x) - f(0)}{x}$ assume os valores extremos superior e inferior, 1 e -1, respectivamente, quando $x \to 0$ (pág. 199).

53. Estudar o comportamento da função

$$f(x) = x \operatorname{sen} \frac{1}{x} + x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}, \; x \neq 0; \; f(0) = 0$$

relativamente à sua derivabilidade.

54. Provar que a derivada da função

$$f(x) = \frac{1}{x} \operatorname{sen} x, \; x \neq 0; \; f(0) = 1$$

existe em qualquer ponto, sendo igual a

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \operatorname{sen} x + \frac{1}{x} \cos x, \; x \neq 0; \; f'(0) = 0.$$

Mostrar que $f'(x)$ é contínua, e deduzir $f''(x)$.

55. Se $f(x)$ fôr contínua e derivável para $a \leqq x \leqq b$, mostrar que, se $f'(x) \leqq 0$ para $a \leqq x < \xi$ e $f'(x) \geqq 0$ para $\xi < x \leqq b$, a função nunca será menor do que $f(\xi)$.

56.* Se a função contínua $f(x)$ tiver a derivada $f'(x)$ em cada ponto x na vizinhança de $x = \xi$, e se $f'(x)$ se aproximar do limite L à medida que $x \to \xi$, $f'(\xi)$ existirá, sendo igual a L.

57.* Se $f(x)$ tiver a derivada $f'(x)$ (não necessàriamente contínua) em cada ponto x de $a \leqq x \leqq b$, e se $f'(x)$ admitir os valores m e M, admitirá, igualmente, qualquer valor μ, situado entre m e M.

58. Se $f''(x) \geqq 0$ para todos os valores de x em $a \leqq x \leqq b$, o gráfico de $y = f(x)$ ficará situado acima da tangente em qualquer ponto $x = \xi$, $y = f(\xi)$ da curva. (A curva, neste caso, tem a convexidade voltada para cima.)

59. Se $f''(x) \geqq 0$ para todos os valores de x em $a \leqq x \leqq b$, o gráfico de $y = f(x)$, no intervalo $x_1 \leqq x \leqq x_2$, está localizado abaixo do segmento linear que une os pontos da curva para os quais $x = x_1$, $x = x_2$.

60. Se $f''(x) \geqq 0$, virá $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leqq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$.

61. Se $f(x) = {}^1/_3 x^3 - x^2 + 1$, determinar uma quantidade δ tal que, para qualquer valor de h menor do que δ, em valor absoluto, e para qualquer x do intervalo $-\frac{1}{2} \leqq x \leqq \frac{1}{2}$, se verifique a desigualdade:

$$f'(x) - \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \leqq \frac{1}{100}.$$

62. Derivar diretamente, escrevendo as fórmulas de integração correspondentes: (*a*) $x^{1/2}$; (*b*) $\operatorname{tg} x$.

63. Calcular:

$$(a)\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

$$(b)\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(1+\sec^2\frac{\pi}{4n}+\sec^2\frac{2\pi}{4n}+\ldots+\sec^2\frac{n\pi}{4n}\right).$$

64. Demonstrar que

$$(a)\ \int_{-1}^{1}(x^2-1)^2\,dx=\frac{16}{15};\quad (b)\ (-1)^n\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n\,dx=\frac{2^{n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

65. Mostrar que

$$\frac{1}{\nu+1}<\int_{\nu}^{\nu+1}\frac{dx}{x}<\frac{\nu}{1}$$

e

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}<\int_{1}^{n}\frac{dx}{x}<1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n-1}.$$

Provar que a seqüência $1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{\nu}-\int_1^{\nu}\frac{dx}{x}$, $\nu=1, 2, \ldots$, é decrescente, possuindo valor extremo inferior.

66.* Seja $f(x)$ uma função tal que $f''(x)\geqq 0$ para todos os valores de x, e seja, ainda, $u=u(t)$ uma função contínua, arbitrária. Teremos:

$$\frac{1}{a}\int_0^a f[u(t)]\,dt \geqq f\left(\frac{1}{a}\int_0^a u(t)\,dt\right).$$

67.* Se uma partícula percorre a distância 1 no tempo 1, partindo e finalizando em repouso, em alguma parte do intervalo ela esteve sujeita a uma aceleração $\geqq 4$.

CAPÍTULO III

68. Derivar as funções seguintes:

$$(a)\ e^{\operatorname{tg}^2 x+\log \operatorname{sen} x}.$$

$$(b)\ (x+2)^4(1-x^2)^{1/3}(x^2+1)^{5/7}.$$

$$(c)\ \frac{x^3\operatorname{sen} x - x^5\cos x}{x^2\operatorname{tg} x}.$$

69. Quais as condições que os coeficientes α, β, a, b, c devem satisfazer para que

$$\frac{\alpha x+\beta}{\sqrt{ax^2+2bx+c}}$$

admita derivada finita em tôda a parte, sempre diferente de zero?

70. Desenhar o gráfico da função

$$y = (x^2)^x, \; y(0) = 1.$$

Mostrar que esta função é contínua em $x = 0$. A função tem máximo, mínimo ou pontos de inflexão?

71. Em todos os triângulos de mesma base e perímetro, o isósceles é o que possui a maior área.

72. Entre todos os triângulos de mesma base e ângulo vertical, o isósceles é o que possui a maior área.

73. Entre todos os triângulos de mesma base e de área igual, o isósceles é o que possui o ângulo vertical máximo.

74.* Entre todos os triângulos de mesma área, o eqüilátero é o que possui o menor perímetro.

75.* Entre todos os triângulos de igual perímetro, o eqüilátero é o que possui a maior área.

76.* Entre todos os triângulos inscritos num círculo, o eqüilátero é o que tem a maior área.

77. Demonstrar as desigualdades seguintes:

(a) $e^x > \dfrac{1}{1+x}, \quad x > 0.$

(b) $e^x > 1 + \log(1 + x), \quad x > 0.$

(c) $e^x > 1 + (1 + x)\log(1 + x), \quad x > 0.$

78.* Sejam a, b dois números positivos, p e q dois números diferentes de zero, $p < q$. Provar que

$$\frac{[\theta a^p + (1 - \theta)b^p]^{1/p}}{[\theta a^q + (1 - b^q]^{1/q}} \leqq 1$$

para qualquer valor de θ no intervalo $0 < \theta < 1$.

(Esta é a desigualdade de Jensen, que estabelece que a potência média p, $[\theta a^p + (1 - \theta)b^p]^{1/p}$ de duas quantidades positivas a, b, é uma função crescente de p.)

79. Mostrar que o sinal igual tem lugar na desigualdade acima se, e sòmente se $a = b$.

80. Provar que $\lim\limits_{p \to 0} [\theta a^p + (1 - \theta)b^p]^{1/p} = a^\theta b^{1-\theta}$.

81. Definindo a potência média de ordem zero de a, b, como $a^\theta b^{1-\theta}$, mostrar que a desigualdade de Jensen se aplica a êste caso, vindo $(a \neq b)$

$$a^\theta b^{1-\theta} \gtrless [\theta a^q + (1 - \theta)b^q]^{1/q}, \text{ conforme seja } q \lessgtr 0.$$

Para $q = 1$, $$a^\theta b^{1-\theta} \leqq \theta a + (1 - \theta)b.$$

82. Provar a desigualdade

$$a^\theta b^{1-\theta} \leqq \theta a + (1 - \theta)b,$$

a, $b > 0$, $0 < \theta < 1$, sem referência à desigualdade de Jensen, mostrando que a

igualdade existirá sòmente se $a = b$. (Esta desigualdade estabelece que a média geométrica θ, $1 - \theta$ é menor do que a média aritmética correspondente.)

83. Se $\phi(x) \to \infty$ quando $x \to \infty$, mostrar que $\log \varphi(x)$ é de ordem de grandeza inferior a $\varphi(x)$, ao passo que $e^{\varphi(x)}$ é de ordem superior.

84. Se a ordem de grandeza da função positiva $f(x)$ fôr superior, igual ou inferior à de x^m quando $x \to \infty$, provar que $\int_a^x f(\xi)\, d\xi$ tem ordem de grandeza correspondente a ordem de grandeza de x^{m+1}.

85. Comparar a ordem de grandeza de $\int_a^x f(\xi)\, d\xi$ em relação a $f(x)$ quando $x \to \infty$, para as seguintes funções $f(x)$:

(a) $\dfrac{\sqrt{x}}{e^{\sqrt{x}}}$. (c) xe^{x^3}.

(b) e^x. (d) $\log x$.

86. Provar que se $f(x)$ fôr contínua, e se

$$f(x) = \int_0^x f(t)\, dt,$$

$f(x)$ será idênticamente nula.

87. Provar que $\sum_{i=1}^{n-1} ix^{i-1} = \dfrac{(n-1)x^n - nx^{n-1} + 1}{(x-1)^2}$.

88. Mostrar que $\dfrac{d^n(e^{x^2/2})}{dx^n} = u_n(x)e^{x^2/2}$,

onde $u_n(x)$ representa um polinômio de grau n. Estabelecer a relação de recorrência.

$$u_{n+1} = xu_n + u_n'.$$

89.* Aplicando a regra de Leibnitz a

$$\frac{d}{dx}(e^{x^2/2}) = xe^{x^2/2},$$

deduzir a relação de recorrência

$$u_{n+1} = xu_n + nu_{n-1}.$$

90.* Combinando as relações de recorrência dos exemplos ns. 88 e 89, estabelecer a equação diferencial

$$u_n'' + xu_n' - nu_n = 0$$

satisfeita por $u_n(x)$.

91. Achar o polinômio

$$u_n(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$$

solução da equação diferencial $u_n'' + xu_n' - nu_n = 0$.

92.* Se $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$, provar as relações

(a) $P_{n+1}' = \frac{x^2-1}{2(n+1)} P_n'' + \frac{(n+2)x}{x+1} P_n' + \frac{n+2}{2} P_n$.

(b) $P_{n+1}' = xP_n' + (n+1)P_n$.

(c) $\frac{d}{dx}[(x^2-1)P_n'] - n(n+1)P_n = 0$.

93. Achar o polinômio

$$P_n = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2} x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$$

solução da equação diferencial

$$\frac{d}{dx}[(x^2-1)P_n'] - n(n+1)P_n = 0.$$

94. Determinar o polinômio $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$, empregando o teorema do binômio.

95.* Seja $\lambda_{n,p}(x) = \binom{p}{n} x^n (1-x)^{p-n}$, $n = 0, 1, 2, \ldots, p$. Mostrar que

$$1 = \sum_{n=0}^{p} \lambda_{n,p}(x).$$

$$x = \sum_{n=1}^{p} \frac{n}{p} \lambda_{n,p}(x).$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$x^k = \sum_{n=k}^{p} \frac{\binom{n}{k}}{\binom{p}{k}} \lambda_{n,p}(x).$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x^p = \lambda_{p,p}(x).$$

CAPÍTULO IV

Efetuar a integração dos exemplos ns. 96-101.

96. $\int \frac{1+\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[4]{x}} dx$.

97. $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt[4]{e^x+1}} dx$.

98. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt{1+x}}$.

99. $\int \frac{x^2-1}{x^4+x^2+1} dx$.

100. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^{4n}-1}}$.

101. $\int \frac{dx}{x(x+1)\ldots(x+n)}$.

Calcular as integrais dos exemplos ns. 102-107.

102. $\int_0^{\pi/2} \cos^n x\, dx$.

103. $\int_0^{\pi/6} \cos^7 3\theta \operatorname{sen}^4 6\theta\, d\theta$.

104. $\int_0^1 \frac{x^{2n}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

105. $\int_0^1 \frac{x^{2n+1}\,dx}{\sqrt{1-x)}}$.

106. $\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$.

107. $\int_0^1 x^2(1-x^2)^{3/2}\,dx$.

Estabelecer as fórmulas de recorrência para as integrais dos exemplos ns. 108-112.

108. $\int x^n(\log x)^m\,dx$.

109. $\int x^n e^{ax} \operatorname{sen} bx\,dx$.

110. $\int x^n e^{ax} \cos bx\,dx$.

111. $\int e^{ax} \operatorname{Sh} bx\,dx$.

112. $\int e^{ax} \operatorname{Ch} bx\,dx$.

113. Integrar $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ de três maneiras diferentes, comparando os resultados.

114.* Seja $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$. Mostrar que

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\,dx = 0, \text{ se } m \neq n.$$

115. Provar que $\int_{-1}^{1} P_n^2(x)\,dx = \frac{2}{n+1}$.

116. Provar que $\int_{1}^{-1} x^m P_n(x)\,dx = 0$, se $m < n$.

117. Calcular $\int_{-1}^{1} x^n P_n(x)\,dx$.

Verificar se as integrais impróprias dos exemplos ns. 118-131 são convergentes ou divergentes.

118. $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{ax-x^2}}$.

119. $\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

120. $\int_0^1 \left(\log\frac{1}{x}\right)^n dx$.

121. $\int_0^1 x^m\left(\log\frac{1}{x}\right)^n dx$.

122. $\int_0^\infty e^{-x}x^m(\log x)^n\,dx$.

123. $\int_0^\pi \log \operatorname{sen} x\,dx$.

124. $\int_0^\pi \frac{1}{x}\log \operatorname{sen} x\,dx$.

125. $\int_0^\pi x \log \operatorname{sen} x\,dx$.

126. $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$.

127. $\int_0^\infty x^{2n-1}e^{-x^2}\,dx$.

128. $\int_0^{\pi/2} \frac{x^m\,dx}{\operatorname{sen}^n x}$.

129. $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4\operatorname{sen}^2 x}$.

130. $\int_0^\infty \frac{x\,dx}{1+x^2\operatorname{sen}^2 x}$.

131.* $\int_0^\infty \frac{x^\alpha\,dx}{1+x^\beta\operatorname{sen}^2 x}$.

132.* Se $\int_a^\infty \frac{f(x)}{x}\,dx$ convergir para qualquer valor positivo de a, e se $f(x)$ tender para um limite L quando $x\to 0$, mostrar que $\int_0^\infty \frac{f(\alpha x)-f(\beta x)}{x}\,dx$ é convergente, tendo o valor $L\log\frac{\beta}{\alpha}$.

133. Com referência ao exemplo anterior, mostrar que

(a) $\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\,dx = \log\frac{\beta}{\alpha}$.

(b) $\int_0^\infty \frac{\cos\alpha x - \cos\beta x}{x}\,dx = \log\frac{\beta}{\alpha}$.

134.* Se $\int_a^b \frac{f(x)}{x}\,dx$ convergir para quaisquer valores positivos de a e de b, e se $f(x)$ tender para os limites M, quando $x\to\infty$, e L quando $x\to 0$, mostrar que

$$\int_0^\infty \frac{f(\alpha x)-f(\beta x)}{x}\,dx = (L-M)\log\frac{\beta}{\alpha}.$$

135. Deduzir as seguintes expressões para a função gama:

$$\Gamma(n) = 2\int_0^\infty x^{2n-1}e^{-x^2}\,dx,$$

$$\Gamma(n) = \int_0^1 \left(\log\frac{1}{x}\right)^{n-1} dx.$$

CAPÍTULO V

136. Desenhar as seguintes curvas, estabelecendo as suas equações não paramétricas:

(a) $x = \frac{5at^2}{1+t^5}$, $y = \frac{5at^3}{1+t^5}$.

(b) $x = at + b\,\mathrm{sen}\,t$, $y = a - b\cos t$.

137.* Mostrar que as duas famílias de elipses e de hipérboles

$$\frac{x^2}{a^2-\lambda}+\frac{y^2}{b^2-\lambda} = 1, \quad \text{para } \lambda < b,$$

$$\frac{x^2}{a^2-\tau}+\frac{y^2}{b^2-\tau} = 1, \quad \text{para } a < \tau < b,$$

têm focos comuns e se interceptam segundo ângulos retos.

138. Achar as curvas pedais (pág. 267, ex. 11):

(a) da elipse $x = a\cos\theta$, $y = b\,\mathrm{sen}\,\theta$, em relação à origem;
(b) da hipérbole $x = \mathrm{Ch}\,\theta$, $y = b\,\mathrm{Sh}\,\theta$, em relação à origem;
(c) da parábola $y^2 = 4px$, em relação à origem;
(d) da parábola $y^2 = 4px$, em relação ao foco.

139. Mostrar que a tangente à elipse tem a mesma inclinação sôbre os raios focais tirados pelo ponto de contacto.

140. Mostrar que a tangente à hipérbole tem a mesma inclinação sôbre os raios focais tirados pelo ponto de contacto.

141. Determinar a curva descrita pela extremidade de um segmento de comprimento constante l, medido ao logo da normal à parábola.

142. Achar a área limitada pelo laço da curva

$$x^5 + y^5 - 5ax^2y^2 = 0.$$

143. Calcular a área limitada pela curva

$$a^2(x^2 + y^2)^2(b^2x^2 + a^2y^2) = (a^2 - b^2)^2b^2x^4.$$

144. Calcular o comprimento do arco da epiciclóide

$$x = (a + b)\cos t - b\cos\frac{a+b}{b}t$$

$$y = (a + b)\operatorname{sen} t - b\operatorname{sen}\frac{a+b}{b}t$$

a partir do ponto inicial $t = 0$.

145. Provar que o raio de curvatura em um ponto da curva polar $r = f(\theta)$ é:

$$\frac{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right]^{3/2}}{r^2 - r\frac{d^2r}{d\theta^2} + 2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}$$

146.* Demonstrar que, se a curvatura de uma curva no plano xy fôr uma função monótona do comprimento do arco, a curva não será fechada, nem terá pontos duplos.

147. Calcular o momento de inércia de uma barra de comprimento L,

(*a*) em relação ao seu centro;

(*b*) em relação a um dos extremos;

(*c*) em relação a um ponto sôbre a linha da barra, a uma distância d do centro;

(*d*) em relação a qualquer ponto situado a uma distância d do centro.

148. Estabelecer a equação das curvas que interceptam as retas tiradas pela origem sob o mesmo ângulo α, em qualquer posição.

149. Determinar a equação das curvas cujas normais têm um comprimento constante k. (O "comprimento" da normal é a extensão do segmento compreendido entre a curva e o eixo dos x.)

150. Mostrar que as únicas curvas cuja curvatura é uma constante fixa k são os círculos de raio $1/k$.

151. Determinar as equações das curvas cujos centros de curvatura se acham no eixo dos x, e cujos raios de curvatura têm o comprimento igual à normal.

152. Estabelecer a equação das curvas cujo raio de curvatura é igual ao comprimento da normal, porém cujo centro de curvatura não se acha sôbre o eixo dos x.

153.* Deduzir a fórmula do comprimento de uma curva, em coordenadas polares.

CAPÍTULO VI

154. Deduzir a fórmula da integral para o resto R_n, aplicando a integração por partes a

$$f(x+h)-f(x)=\int_0^h f'(x+\tau)\,d\tau.$$

155. Integrar a fórmula

$$R_n=\frac{1}{n!}\int_0^h (h-\tau)^n f^{(n+1)}(x+\tau)\,d\tau,$$

para obter

$$R_n=f(x+h)-f(x)-hf'(x)-\ldots-\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x).$$

156.* Suponhamos que se obteve o seguinte desenvolvimento em série da função $f(x)$

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+R_n(x),$$

onde a_0, a_1, $\ldots$, a_n são constantes, $R_n(x)$ é derivável continuamente n vêzes, e $\dfrac{R_n(x)}{x^n}\to 0$ quando $x\to 0$. Mostrar que $a_k=\dfrac{f^k(0)}{k!}$, $(k=0,\ \ldots,\ n)$, isto é, que o desenvolvimento obtido é uma série de Taylor.

157.* Achar os três primeiros termos que não se anulam da série de Taylor para $\operatorname{sen}^2 x$, na vizinhança de $x=0$, multiplicando o desenvolvimento em série de Taylor de $\operatorname{sen} x$ por si mesmo. Justificar o procedimento.

158. Determinar os três primeiros têrmos que não se anulam da série de Taylor de $\operatorname{tg} x$ na vizinhança de $x=0$, empregando a relação $\operatorname{tg} x=\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, e justificar o procedimento.

159.* Estabelecer os três primeiros têrmos que não se anulam da série de Taylor de $\sqrt{\cos x}$ na vizinhança de $x=0$, aplicando o teorema do binômio à série de Taylor de $\cos x$, e justificar o procedimento.

160. Determinar os quatro primeiros têrmos que não se anulam das séries de Taylor das seguintes funções, na vizinhança de $x=0$:

(a) $x\operatorname{cotg} x$. (c) $\sec x$. (e) e^{e^x}.

(b) $\dfrac{\sqrt{\operatorname{sen} x}}{\sqrt{x}}$. (d) $e^{\operatorname{sen} x}$. (f) $\log\operatorname{sen} x-\log x$.

161. Achar a série de Taylor de arc sen x na vizinhança de $x = 0$, aplicando

$$\operatorname{arc\,sen} x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

(Pág. 203, ex. 5.)

162.* Estabelecer a série de Taylor de $(\operatorname{arc\,sen} x)^2$. (Pág. 203, ex. 5.)

163. Deduzir as séries de Taylor das seguintes funções, na vizinhança de $x = 0$:

$$(a)\ \operatorname{Sh}^{-1} x. \qquad (b)\ \int_0^x e^{-t^2}\,dt. \qquad (c)\ \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt.$$

164.* Avaliar o êrro cometido empregando-se os n primeiros têrmos das séries do exemplo 163.

165.* Duas partículas com cargas opostas, $+e$, $-e$, separadas por pequena distância d, formam um dipolo com o momento $M = ed$. Mostrar que a energia potencial é igual a $\frac{M}{r^2}(1 + \epsilon)$, onde ϵ é aproximadamente igual a $\frac{d^2}{4r^2}$, num ponto situado no eixo do dipolo à distância r do seu centro;

(b) é igual a 0 num ponto situado sôbre o bissetor perpendicular ao dipolo;

(c) é igual a $\frac{M\cos\theta}{r^2}(1+\epsilon)$, em que ϵ é aproximadamente igual a $\frac{d^2}{8r^2}(5\cos^2\theta - 3)$, num ponto de coordenadas r, θ, relativas ao centro e ao eixo do dipolo.

(A energia potencial da carga única q num ponto situado à distância r da carga é q/r; a energia potencial de diversas cargas é igual à soma da energia potencial das cargas isoladas.)

166.* Determinar os três primeiros têrmos da série de Taylor de $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ em potências de $\frac{1}{x}$.

167. Calcular os seguintes limites:

$$(a)\ \lim_{x\to\infty} x\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - e\right].$$

$$(b)^*\ \lim_{x\to\infty} \frac{e}{2}x + x^2\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - e\right].$$

$$(c)^*\ \lim_{x\to\infty} x\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - e\log\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right].$$

$$(d)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^{1/x^2}. \qquad (e)\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^{1/x^2}.$$

168.* Demonstrar que o círculo osculador não corta a curva nos pontos em que o raio de curvatura é máximo ou mínimo.

169. Determinar o máximo e o mínimo das seguintes funções: (a) $|x|$, (b) $x \operatorname{sen}(1/x)$.

CAPÍTULO VII

170. Mostrar que o comprimento da elipse $x = a \cos t$, $y = b \operatorname{sen} t$, é:

$$s = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 t}\, dt, \text{ onde } e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}.$$

Calcular o comprimento da elipse para a qual $e = \frac{1}{2}$, com quatro decimais exatas, empregando a regra de Simpson com seis divisões.

171. Desenvolver em série a integral do exemplo anterior (n.º 170), determinando o número de têrmos necessários para que o resultado seja exato até à quarta casa decimal.

172. Calcular $\int_0^1 \frac{\log(1 + x)}{x}\, dx$ empregando a regra de Simpson com $h = 0{,}1$.

173. Mediu-se a hipotenusa de um triângulo retângulo, com precisão, achando-se 40, ao passo que o ângulo lido de 30° tem um êrro possível de $\frac{1}{2}$°. Pede-se o êrro provável cometido no cálculo dos outros lados e na área do triângulo.

174.* Partindo de $\int_{1/2}^{n+1/2} \log(\alpha + x)\, dx$ $(\alpha > 0)$, mostrar que

$$\alpha(\alpha + 1) \ldots (\alpha + n) = a_n n!\, n^{\alpha},$$

em que a_n tem para limite inferior um número positivo. Mostrar que a_n é monotonamente decrescente para valores suficientemente grandes de n. (O limite de a_n, à medida que $n \to \infty$, é $1/\Gamma(\alpha)$.)

175. Determinar uma expressão aproximada para $\log \frac{n_1!\, n_2! \ldots n_l!}{n!}$, onde $n_1 + n_2 + \ldots + n_l = n$.

176. Mostrar que o coeficiente de x^n no desenvolvimento binomial de $\frac{1}{\sqrt{1 - x}}$ é dado assintòticamente por $\frac{1}{\sqrt{\pi n}}$.

CAPÍTULO VIII

177. Provar que se $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^2$ convergir, o mesmo acontecerá para $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu}$.

178. Se a_n fôr uma seqüência monótona crescente, com têrmos positivos, a série $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_1 a_2 a_3} + \ldots$ será convergente?

179.* Se a série $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ com têrmos positivos decrescentes convergir, teremos $\lim_{n \to \infty} n a_n = 0$.

180. Mostrar que a série $\sum_{\nu=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{\pi}{\nu}$ é divergente.

181.* Demonstrar que, se Σa_ν convergir, e se $b_1, b_2, b_3, \ldots$ fôr uma seqüência limitada e monótona de números, $\Sigma a_\nu b_\nu$ convergirá.

182.* Provar que, se Σa_ν oscilar entre limites finitos, e se b_ν fôr uma seqüência monótona que tende para zero, $\Sigma a_\nu b_\nu$ será convergente.

183. Discutir a convergência ou divergência das seguintes séries:

(a) $\Sigma \dfrac{(-1)^\nu}{\nu}$. (b) $\Sigma \dfrac{(-1)^\nu \cos(\theta/\nu)}{\nu}$. (c) $\Sigma \dfrac{\cos \nu\theta}{\nu}$.

(d) $\Sigma \dfrac{\operatorname{sen} \nu\theta}{\nu}$. (e) $\Sigma \dfrac{(-1)^\nu \cos \nu\theta}{\nu}$. (f) $\Sigma \dfrac{(-1)^\nu \operatorname{sen} \nu\theta}{\nu}$.

184. Determinar a soma das seguintes disposições da série

$$1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + 1/5 - 1/6 + \ldots \text{ do } \log 2:$$

(a) $1 - 1/2 - 1/4 + 1/3 - 1/6 - 1/8 + 1/5 - 1/10 - 1/12 + - - \ldots$.

(b) $1 + 1/3 + 1/5 - 1/2 - 1/4 - 1/6 + + + \ldots$.

185. Para quais valores de α as séries abaixo convergem?

(a) $1 - \dfrac{1}{2^\alpha} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4^\alpha} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{6^\alpha} + - \ldots$.

(b) $1 + \dfrac{1}{3^\alpha} - \dfrac{1}{2^\alpha} + \dfrac{1}{5^\alpha} + \dfrac{1}{7^\alpha} - \dfrac{1}{4^\alpha} + + - \ldots$.

186. Determinar se as séries seguintes são convergentes ou divergentes:

(a) $1 + 1/2 - 1/3 + 1/4 + 1/5 - 1/6 + 1/7 + 1/8 - 1/9 + + - \ldots$.

(b) $1 + 1/2 - 2/3 + 1/4 + 1/5 - 2/6 + 1/7 + 1/8 - 2/9 + + - \ldots$.

187. Mostrar que

(a) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \dfrac{\nu!}{(2\nu)!}$ converge.

(b) $\sum\limits_{\nu=2}^{\infty} \dfrac{\log(\nu+1) - \log \nu}{(\log \nu)^2}$ converge.

(c) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \dfrac{1.2.3 \ldots \nu}{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+\nu)}$ converge se $\alpha > 1$ e diverge se $\alpha \leqq 1$.

188.* Por comparação com a série $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \dfrac{1}{\nu^\alpha}$, demonstrar o seguinte critério:

Se $\dfrac{\log(1/|a_n|)}{\log n} > 1 + \epsilon$ para qualquer valor suficientemente grande de n, a série Σa_ν possuirá convergência absoluta; se $\dfrac{\log(1/|a_n|)}{\log n} < 1 - \epsilon$ para qualquer valor suficientemente grande de n, a série Σa_ν não terá convergência absoluta.

189. Demonstrar a convergência da série $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{\nu}}\right)^\nu$.

190. Demonstrar o seguinte critério, por comparação com a série $\Sigma \dfrac{1}{\nu (\log \nu)^{\alpha}}$:

A série $\Sigma \mid a_\nu \mid$ convergirá ou divergirá, conforme

$$\frac{\log(1/n \mid a_n \mid)}{\log \log n}$$

fôr maior do que $1 + \epsilon$ ou menor do que $1 - \epsilon$ para qualquer valor suficientemente grande de n.

191. Deduzir o critério da raiz de ordem n, do critério do exemplo 188.

192.* Demonstrar o seguinte critério de comparação: se a série Σb_ν de têrmos positivos fôr convergente, e se

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

a partir de certo têrmo em diante, a série Σa_ν será absolutamente convergente; se Σb_ν divergir, e se

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

de certo têrmo em diante, a série Σa_ν não será absolutamente convergente.

193. Deduzir o critério da razão, pela comparação com a série geométrica.

194.* Demonstrar o critério de Raabe pela comparação com $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \dfrac{1}{\nu^{\alpha}}$:

A série $\Sigma \mid a_\nu \mid$ será convergente ou divergente, conforme

$$n \left(\frac{\mid a_n \mid}{\mid a_{n+1} \mid} - 1 \right)$$

fôr maior do que $1 + \epsilon$ ou menor do que $1 - \epsilon$ para qualquer valor suficientemente grande de n.

195. Demonstrar, por comparação com $\Sigma \dfrac{1}{\nu(\log \nu)^{\alpha}}$, o seguinte critério:

A série $\Sigma \mid a_\nu \mid$ convergirá ou divergirá, conforme

$$n \log n \left(\frac{\mid a_n \mid}{\mid a_{n+1} \mid} - 1 - \frac{1}{n} \right)$$

fôr maior do que $1 + \epsilon$ ou menor do que $1 - \epsilon$ para qualquer valor suficientemente grande de n.

196. Demonstrar o critério de Gauss:

$$\frac{\mid a_n \mid}{\mid a_{n+1} \mid} = 1 + \frac{\mu}{n} + \frac{R_n}{n^{1+\epsilon}},$$

em que $\mid R_n \mid$ é limitado, $\Sigma \mid a_\nu \mid$ convergirá, se $\mu > 1$, e divergirá se $\mu \leqq 1$.

197. Verificar as séries seguintes, com relação à sua convergência ou divergência:

$$(a)\quad \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta(\beta+1)} + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{\beta(\beta+1)(\beta+2)} + \dots .$$

$$(b)\quad 1 + \frac{\alpha . \beta}{1 . \gamma} + \frac{\alpha(\alpha+1) . \beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)} + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2) . \beta(\beta+1)(\beta+2)}{1.2.3.\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} + \dots$$

198. (*a*) Mostrar que a série $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^x}$ é uniformemente convergente para $x \geqq 1+\epsilon$.

(*b*) Demonstrar que a série derivada $-\sum \frac{\log \nu}{\nu^x}$ converge uniformemente para $x \geqq 1+\epsilon$.

199.* Mostrar que a série $\sum \frac{\cos \nu x}{\nu^{\alpha}}$, $\alpha > 0$, converge uniformemente para $\epsilon \leqq x \leqq 2\pi - \epsilon$.

200. A série

$$\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5 + \dots$$

é uniformemente convergente para $\epsilon \leqq x \leqq N$.

201. Determinar as regiões nas quais as séries abaixo são convergentes:

(*a*) $\sum x^{\nu!}$. (*e*) $\sum \frac{a^{\nu}}{\nu^x}$, $a < 1$.

(*b*) $\sum \frac{(\nu!)^2 x^{\nu}}{(2\nu)!}$. (*f*) $\sum \frac{a^{\nu}}{\nu^x}$, $a > 1$.

(*c*) $\sum \frac{1}{\nu^x}$. (*g*) $\sum \frac{\log \nu}{\nu^x}$.

(*d*) $\sum \frac{(-1)^{\nu}}{\nu^x}$. (*h*) $\sum \frac{x^{\nu}}{1-x^{\nu}}$.

202.* Provar que se a série $\sum \frac{a^{\nu}}{\nu^x}$ convergir para $x = x_0$, convergirá, igualmente para qualquer $x > x_0$. Se divergir para $x = x_0$, divergirá para qualquer $x < x_0$. Assim, haverá uma "abscissa de convergência" tal, que para qualquer valor maior do que x a série convergirá, divergindo para todos os valores inferiores a x.

203. Se $\sum \frac{a^{\nu}}{\nu^x}$ convergir para $x = x_0$, a série derivada $-\sum \frac{a_{\nu} \log \nu}{\nu^x}$ será convergente para qualquer $x > x_0$.

204. Se $a_{\nu} > 0$ e $\sum a_{\nu}$ convergir, teremos

$$\lim_{x \to 1-0} \sum a_{\nu} x^{\nu} = \sum a_{\nu}.$$

205. Se $a_{\nu} > 0$ e $\sum a_{\nu}$ divergir,

$$\lim_{x \to 1-0} \sum a_{\nu} x^{\nu} = \infty.$$

206.* Demonstrar o teorema de Abel:

Se $\sum a_{\nu} X^{\nu}$ convergir, $\sum a_{\nu} x^{\nu}$ convergirá uniformemente para $0 \leqq x \leqq X$.

207.* Se $\sum a_{\nu} X^{\nu}$ fôr convergente, $\lim \sum a_{\nu} x^{\nu} = \sum a_{\nu} X^{\nu}$.

208. Determinar as funções racionais representadas pelas seguintes séries de Taylor:

(*a*) $x + x^2 - x^3 - x^4 + x^5 + x^6 - - + + \dots$.

(*b*) $1 + 2x - 4x^3 - 5x^4 + 7x^6 + 8x^7 - - + + \dots$.

209. Mostrar que

$$(a)\ \frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\ldots=1.$$

$$(b)\ \frac{1}{2}+\frac{1.3}{2.4.6}+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10}+\ldots=\frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

210. Seja $z = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$. Do desenvolvimento $\frac{1}{1-z} = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^\nu$ deduzir

$$\frac{1-r\cos\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}=\sum_{\nu=0}^{\infty} r^\nu \cos\nu\theta$$

$$\frac{r\operatorname{sen}\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}=\sum_{\nu=0}^{\infty} r^\nu \operatorname{sen}\nu\theta.$$

CAPÍTULO IX

211.* Empregando a expressão da cotangente em frações parciais, desenvolver $\pi z \operatorname{cotg} \pi z$ numa série de potências de z. Comparando-a com a série da página 423, mostrar que

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^{2m}}=(-1)^{m-1}\frac{(2\pi)^{2m}}{2.(2m)!}B_{2m}.$$

212. Provar que

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{(2\nu-1)^{2m}}=\frac{(-1)^{m-1}(2^{2m}-1)\pi^{2m}}{2(2m)!}B_{2m}.$$

213. Mostrar que

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^\nu}{\nu^{2m}}=\frac{(-1)^m(2^{2m}-2)\pi^{2m}}{2.(2m)!}B_{2m}.$$

214. Demonstrar

$$(a)\ \int_0^1\frac{\log x}{1-x}\,dx=-\frac{\pi^2}{6};$$

$$(b)\ \int_0^1\frac{\log x}{1+x}\,dx=-\frac{\pi^2}{12}.$$

215. Usando o produto infinito do seno pelo co-seno, mostrar que

$$(a)\ \log\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)=-\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu-1}2^{2\nu-1}B_{2\nu}}{(2\nu)!\,\nu}x^{2\nu};$$

$$(b)\ \log\cos x=-\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu-1}2^{2\nu-1}(2^{2\nu}-1)B_{2\nu}}{(2\nu)!\,\nu}x^{2\nu}.$$

216. Usando o produto infinito do seno pelo co-seno, calcular

$$(a)\ {}^{2}/_{1}\cdot{}^{2}/_{3}\cdot{}^{6}/_{5}\cdot{}^{6}/_{7}\cdot{}^{10}/_{9}\cdot{}^{10}/_{11}\cdot{}^{14}/_{13}\cdots;$$
$$(b)\ 2\cdot{}^{2}/_{3}\cdot{}^{4}/_{3}\cdot{}^{8}/_{9}\cdot{}^{10}/_{9}\cdot{}^{14}/_{15}\cdot{}^{16}/_{15}.$$

217. Representar a cotangente hiperbólica em função de frações parciais.

CAPÍTULO XI

218. Quais as curvas cuja tangente tem o comprimento constante a? (O "comprimento" da tangente é o segmento compreendido entre a curva e o eixo dos x.)

219. Determinar a curva ortogonal à família $y = ce^{kx}$.

220. Designando-se por s o comprimento do arco de uma catenária, medido a contar do ponto em que a tangente é horizontal, ter-se-á a forma da catenária dada pela equação diferencial

$$\frac{d}{dx}(\log s) = \frac{d}{dx}\left(\log \frac{dy}{dx}\right).$$

Mostrar que a equação da curva é $y = c \operatorname{Ch} \frac{x}{c} + a$.

221. Integrar a equação do circuito elétrico

$$\mu \dot{I} + \rho I = E,$$

em que $E = E_0 \operatorname{sen} \omega t$, e μ, ρ, E_0 e ω são constantes.

222. Uma partícula se dirige para um ponto que a atrai na razão direta da massa e inversa do cubo da distância. Determinar o movimento e o tempo de queda, se $v = 0$, $x = a$, no instante $t = 0$.

223.* Integrar $y = -xp + x^4p^2$, onde $p = \dfrac{dy}{dx}$.

224. Integrar $y = p + \log p$.

225.* Resolver a equação de diferenças

$$u_{n+2} + 2au_{n+1} + bu_n = 0,$$

em que a, b são constantes, fazendo $u_n = \lambda^n$. Mostrar que a solução pode ser expressa sob a forma $u_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$, onde r_1, r_2 são as raízes (supostas distintas) da equação $\lambda^2 + 2a\lambda + b = 0$. Mostrar, ainda, que a solução assume a forma $u_n = \alpha(-a)^n + \beta n(-a)^n$, quando $b = a^2$.

RESPOSTAS E SUGESTÕES

CAPÍTULO I

§ 1, pág. 13.

1. (*d*). (*e*). Mostrar que x satisfaz uma equação do tipo

$$x^6 + a_1x^4 + \dots + a_6 = 0,$$

em que $a_1, \dots, a_6$ são inteiros. Demonstrar que, neste caso, x é irracional ou inteiro.

2. Utilizar a irracionalidade de sen $60^\circ = \sqrt{3}/2$.

4. Escrever $ax^2 + 2bx + c$ como $a\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 + \frac{ac - b^2}{a}$.

7. Se $a > 0$ e $b^2 - ac \leqq 0$, é possível fazer-se $ax^2 + 2bx + c = 0$ para alguns valores de x se, e sòmente se, $b^2 - ac = 0$; use, então, o exemplo 6.

8. O co-seno do ângulo compreendido entre duas linhas retas é $\leqq 1$ em valor absoluto.

9. Empregue a desigualdade de Schwarz.

10. Eleve ao quadrado ambos os membros e empregue a desigualdade de Schwarz. A soma do comprimento de dois lados de um triângulo não pode ser menor do que o terceiro lado.

§ § 2, 3, pág. 26.

2. (*a*), (*d*), (*e*), (*g*), ímpar; (*b*) par

3. (*b*), (*c*), (*h*), monótonas; (*a*), (*d*), (*e*), (*f*), (*m*), pares; (*d*) e (*e*) idênticas.

§ 4, pág 28

2. $(n + 1)(2n + 1)(2n + 3)/3$.

3. (*c*) Desenvolver $(1 + 1)^n$ pelo teorema do binômio.

4. (*a*) $n(n + 1)(n + 2)/3$.

(*b*) Somar $\frac{1}{\nu + 1} - \frac{1}{\nu}$ desde $\nu = 1$ até $\nu = n$. $n/(n + 1)$.

(*c*) Somar $\frac{1}{(\nu + 1)^2} - \frac{1}{\nu^2}$ desde $\nu = 1$ até $\nu = n$. $n(n + 2)(n + 1)^2$.

5. 3; 193

7. $\frac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 - 11n + 30)$.

§ 5, pág. 36.

1. (*a*) 1; (*b*) 333; (*c*) 333 333.

2. (*a*) 0; (*b*) ∞; (*c*) 6; (*d*) a_0/b_0; (*e*) 1/3.

4. 19.

5. (*a*) 6; (*b*) 10; (*c*) 14.

6. (*a*) 25; (*b*) 2 500; (*c*) 250 000.

9. (*a*) 0; (*b*) não; (*c*) sim; (*e*) 30.

15. O maior dos números $a_1, \ldots, a_k$.

16. 2.

17. Deve-se empregar $n/2^n \to 0$.

§ 6, pág. 45.

1. (*a*) Para qualquer número M, por maior que seja, há um n tal que $|a_n| > M$.

(*b*) Existe um número positivo ϵ tal, que para qualquer M, haverá números n, m, maiores do que M, para os quais $|a_n - a_m| \geqq \epsilon$.

5. O êrro é menor do que $\dfrac{1}{n(n!)}$; $e = 2{,}718\,28\ldots.$

§ 7, pág. 49.

1. (*a*) 6; (*b*) 15; (*c*) $\frac{1}{2}$; (*d*) 3.

3. Os limites (*a*) e (*b*) não existem; o limite (*c*) existe e é igual a **1**.

§ 8, pág. 55.

3. (*a*) 1/60; 1/600; 1/6 000.
(*b*) $1/10\,(1 + 2\,|\,\xi - 1\,|)$, etc.
(*c*) $1/120\,(1 + |\,\xi\,|)^3$, etc.
(*d*) 1/100; 1/10 000; 1/1 000 000; (*e*) 1/10; 1/100; 1/1 000;

4. (*a*) 1/600; $\epsilon/6$. (*b*) 1/400; $\epsilon/4$. (*c*) 1/77 600; $\epsilon/776$. (*d*) 1/10 000; ϵ^2. (*e*) 1/100; ϵ.

5. (*a*), (*b*), (*c*), (*d*), (*g*) contínuas;
(*e*) descontínuas em $x = 2, 4$;
(*f*) " " $x = 3$;
(*h*), (*k*), (*m*) " " $x = (n + \frac{1}{2})\pi$;
(*i*), (*j*) " " $x = n\pi$;
(*l*) " " $x = n\pi$, $n \neq 0$.

Apêndice I, pág. 70.

1. (*a*)	Extremo super. $= {}^{324}/_5$*,	infer. $= 0$,	limite super. $= 0$,	infer. $= 0$.
(*b*)	" $= {}^1/_2$,*	" $= -1$,*	" $= 0$,*	" $= 0$*.
(*c*)	" $= {}^9/_{10}$,*	" $= -{}^2/_3$,*	" $= {}^1/_2$,	" $= {}^1/_2$.
(*d*)	" $= {}^{19}/_{10}$,*	" $= -{}^1/_3$,*	" $= {}^3/_2$,	" $= {}^1/_2$.
(*e*)	" $= 2$,*	" $= 0$,	" $= 1$,	" $= 0$.

* As quantidades assinaladas com êste sinal pertencem à sequência.

2. Divida-se um intervalo num número infinito de subintervalos, pelos pontos $a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = b$, tão próximos que $|f(x) - f(\bar{x})| < \epsilon$ se x e $\bar{x}$ estiverem contidos no mesmo subintervalo. Liguem-se os pontos adjacentes $x = x_i$, $y = f(x_i)$ por linhas retas.

3. A expressão $-\frac{k}{2}|x - x_i| + \frac{k}{2}|x - x_{i-1}|$ tem a inclinação zero do lado de fora do intervalo (x_{i-1}, x_i). Acrescentar outros têrmos adequados desta espécie.

$$3/2 + x - 3/2\,|x - 2| + |x - 3| - 1/2\,|x - 5|.$$

4. (*a*) $\epsilon/6$; (*b*) ϵ/na^{n-1}, $n > 0$; (*c*) $\epsilon^3/2$.

Apêndice II, pág. 75.

2. (*a*) $r = a$; (*b*) $r = 2a\cos(\varphi - \varphi_0)$; (*c*) $r = a/\cos(\varphi - \varphi_0)$.

3. $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta$, $\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta$;
$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$, $\operatorname{sen} 3\theta = 3\operatorname{sen}\theta - 4\operatorname{sen}^3\theta$;
$\cos 5\theta = 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta$, $\operatorname{sen} 5\theta = 16\operatorname{sen}^5\theta - 20\operatorname{sen}^3\theta + 5\operatorname{sen}\theta$.

4. (*a*) $-6i$; $\theta = \pi$, $r = 3$; $\theta = \pi/2$, $r = 2$; $\theta = 3\pi/2$, $r = 6$.
(*b*) $1 + \sqrt{3} + i(1 - \sqrt{3})$; $\theta = \pi/4$, $r = 4\sqrt{2}$; $\theta = \pi/3$, $r = 1/2$; $\theta = 7\pi/12$, $r = 2\sqrt{2}$.
(*c*) 2; $\theta = \pi/4$, $r = \sqrt{2}$; $\theta = 7\pi/4$, $r = \sqrt{2}$; $\theta = 2\pi$, $r = 2$.
(*d*) $2 - 2i\sqrt{3}$; $\theta = 5\pi/6$, $r = 2$; $\theta = 5\pi/3$, $r = 4$.
(*e*) ± 1; $\theta = 0$, $r = 1$; $\theta = 0$, $r = \pm 1$.
(*f*) $\pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)$; $\theta = \pi/2$, $r = 1$; $\theta = \pi/4$, $r = \pm 1$.
(*g*) $(\sqrt{\sqrt{2} + 1} + i\sqrt{\sqrt{2} - 1})/\sqrt{2}$; $\theta = \pi/4$, $r = \sqrt{2}$; $\theta = \pi/8$, $r = \sqrt[4]{2}$.
(*h*) $-\sqrt[3]{18}(\sqrt{3} + i)/2$; $\theta = 7\pi/4$, $r = 3\sqrt{2}$.
$\theta = 7\pi/6$, $r = (3\sqrt{2})^{2/3} = \sqrt[3]{18}$.
(*k*) 1, $(-1 \pm i\sqrt{3})/2$; $\theta = 0$, $r = 1$; $\theta = 0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$, $r = 1$.
(*l*) $\sqrt[4]{2}(\sqrt{\sqrt{2} + 1} + i\sqrt{\sqrt{2} - 1})$; $\theta = \pi/2$, $r = 16$;
$\theta = \pi/8$, $r = \pm 2$.

5. Observe-se que ϵ^ν satisfaz à equação $x^n - 1 = 0$; fatorar, então, $x^n - 1$.

CAPÍTULO II

§ 2, pág. 87.

1. Empreguem-se as fórmulas do § 2 e as regras fundamentais: 70/3.

2. A área pedida pode ser considerada como a diferença entre as áreas sob a linha e sob a parábola, compreendidas entre os pontos de interseção da curva com a linha: $10\sqrt{5}/3$.

3. $\sqrt{5/6}$.

4. ${}^1/_6(a^2 + 4b)^{3/2}$.

5. (*a*) $[(1 + b)^{1+\alpha} - (1 + a)^{1+\alpha}]/(1 + \alpha)$; (*b*) $-(\cos \alpha b - \cos \alpha a)/\alpha$; (*c*) $(\operatorname{sen} \alpha b - \operatorname{sen} \alpha a)/\alpha$.

7. $(b^4 - a^4)/4$.

8. $1/(n + 1)$.

§ 3, pág. 109.

1. Para qualquer número a existe um ϵ tal, que para qualquer número δ haverá um x para o qual

$$|x - \xi| \leqq \delta \quad \text{e} \quad \left| a - \frac{f(x) - (f\xi)}{x - \xi} \right| \geqq \epsilon.$$

2. (*a*) $-1/(x + 1)^2$; (*b*) $-2x/(x^2 + 2)^2$; (*c*) $-4x/(2x^2 + 1)^2$;
(*d*) $-\cos x/\operatorname{sen}^2 x$; (*e*) $3 \cos 3x$; (*f*) $-a \operatorname{sen} ax$; (*g*) $2 \operatorname{sen} x \cos x$;
(*h*) $-2 \cos x \operatorname{sen} x$.

3. (*a*) ξ tem qualquer valor; (*b*) $\xi = (x_1 + x_2)/2$; (*c*) $\xi = \sqrt{\dfrac{x_2^2 + x_2 x_1 + x_1^2}{3}}$.

$$(e)\ \xi = \left(\frac{x_2^{2/3} + x_2^{1/3} x_1^{1/3} + x_1^{2/3}}{3}\right)^{3/2}.$$

§ 4, pág. 119.

2. (*a*) ½; (*b*) ½.

§ 5, pág. 121.

1. $\dfrac{\pi}{4} = 0{,}785$.

§ § 6, 7, pág. 130.

1. (*b*) $\xi = \dfrac{a + b}{2}$; (*c*) $\xi = \sqrt[n]{\dfrac{a^n + a^{n-1}b + \ldots + b^n}{n + 1}}$; (*d*) $\xi = \sqrt{ab}$.

3. (*a*) $I_n = a^{1+1/n}/(1 + 1/n)$, $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = a$;

(*b*) $I_n = a^{n+1}/(n + 1)$, $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$ para $-1 \leqq a \leqq 1$, ∞ para $a > 1$.

4. $|F(x) - f(x)| \leqq \dfrac{1}{2\delta} \displaystyle\int_{-\delta}^{\delta} |f(x + t) - f(x)|\, dt$. Empregar a continuidade uniforme de $f(x)$ em $a \leqq x \leqq b$. Podemos também escrever

$$F(x) = \frac{1}{2\delta}\left[\int_{x-\delta}^{c} f(t)\, dt + \int_{c}^{x+\delta} f(t)\, dt\right],$$

onde c é um número fixo.

5. Exprimir as integrais como limites de somas, empregando subdivisões iguais de $a \leqq x \leqq b$, e explicar a desigualdade de Schwarz (pág. 12) a estas somas. Outro método, consiste em integrar $[f(x) + \operatorname{tg}(x)]^2 \geqq 0$ e usar o exemplo 6, pág. 13.

Apêndice, pág. 135.

1. Seja $\varphi(x) = f'(x)$, onde $f'(x) \geqq 0$, $\varphi(x) = 0$ em tôda o intervalo. Seja ainda, $\psi(x) = f'(x) - \varphi(x)$; teremos, então, $\psi(x) \leqq 0$. Consideremos $\displaystyle\int_a^x \varphi(x)\, dx$ e $\displaystyle\int_a^x \psi(x)\, dx$.

CAPÍTULO III

§ § 1, 2, pág. 143.

1. $f'(1) = 1$, $f''(1) = 8$, $f'''(1) = 36$, $f^{\text{IV}}(1) = 96$, $f^{\text{V}}(1) = 120$, $f^{\text{VI}}(1) = 0$, $f^{\text{VII}}(1) = 0, \ldots.$

2. 0.

3. (*a*) a; (*b*) $175\, cx^6$; (*c*) $2(b + cx)$; (*d*) $\dfrac{ad - bc}{(cx + d)^2}$;

(*e*) $\dfrac{2x^2(a\beta - \alpha b) + 2x(a\gamma - \alpha c) + 2(b\gamma - \beta c)}{(\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma)^2}$;

(*f*) $\dfrac{4x(1 + x^4)}{(1 - x^2)^2(1 + x^2)^2}$; (*g*) 0.

4. (*a*) $F(x) = a_n x^n + (a_{n-1} + na_n)x^{n-1} + [a_{n-2} + (n - 1)(a_{n-1} + na_n)]x^{n-2} + \ldots$

(*b*) $F(x) = \dfrac{a_n}{c_0} x^n + \left(a_{n-1} - na_n \dfrac{c_1}{c_0}\right) x^{n-1} +$

$$+ \left[\frac{a_{n-2}}{c_0} - (n - 1)a_{n-1} \frac{c_1}{c_0^2} - n(n - 1)a_n \frac{(c_0 c_2 - c_1^2)}{c_0^3}\right] x^{n-2} + \ldots.$$

5. (*a*) $2 \cos 2x$; (*b*) $-1/(1 + \operatorname{sen} 2x)$; (*c*) $\operatorname{tg} x + x/\cos^2 x$;

(*d*) $-2/(1 - \operatorname{sen} 2x)$; (*e*) $-\dfrac{\operatorname{sen} x}{x^2} + \dfrac{\cos x}{x}$.

6. $\sec^3 x + \sec x \operatorname{tg}^2 x$.

7. $24 \sec^5 x - 20 \sec^3 x + \sec x$.

8. $\cos x(\operatorname{cosec}^2 x - 6 \operatorname{cosec}^4 x)$.

9. $24 \sec^5 x - 20 \sec^3 x + \sec x - \cos x$.

10. ∞.

11. $ax^2/2 + bx$.

12. $ax^3/3 + bx^2 + cx$.

13. $x^9 + x^7 + x^5 + x^3 + x$.

14. $-(1/x + 1/2x^2 + 1/3x^3)$.

15. $x^3/3 - 1/x$.

16. $a \operatorname{sen} x - b \operatorname{cotg} x$.

17. $3x^2/2 - 7 \cos x - 5/2x^2 - 9 \operatorname{tg} x$.

18. $\sec x$.

§ 3, pág. 152.

1. 4.

3. $\sqrt[n]{x}[1 - (n - 1)x]/nx(1 + x^2)$.

4. $\cos^2 x/2\sqrt{x} - 2\sqrt{x} \operatorname{sen} x \cos x$.

5. $1/\sqrt{x}(1 - \sqrt{x})^2$.

6. $\dfrac{(1 - \operatorname{tg} x) + 3x(1 + \operatorname{tg}^2 x)}{3x^{2/3}(1 - \operatorname{tg} x)^2}$.

7. $(\operatorname{arc} \cos x - \operatorname{arc} \operatorname{sen} x)/\sqrt{1 - x^2}$.

8. $2/(1 + x^2)(1 - \operatorname{arc} \operatorname{tg} x)^2$.

9. $\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x} - \dfrac{\operatorname{arc} \operatorname{sen} x}{(1 + x^2)(\operatorname{arc} \operatorname{tg} x)^2}$.

10. $-\dfrac{5}{1 + x^2} + \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}(\operatorname{arc} \cos x)^2}$.

11. 0.785.

§ 4, pág. 157.

1. $3(x+1)^2$. **2.** $6(3x+5)$. **3.** $15x^{14}(3x^6-6x^3-1)(x^6-3x^3-1)^4$.

4. $-1/(1+x)^2$. **5.** $2x/(1-x^2)^2$. **6.** $an(ax+b)^{n-1}$.

7. $-\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}(x+\sqrt{x^2-1})}$.

8. $\dfrac{x^2(am-bl)+2x(an-cl)+(bn-cm)}{2\sqrt{(ax^2+bx+c)(lx^2+mx+n)^3}}$.

9. $-{}^5/_3(1-x)^{2/3}$. **10.** $\operatorname{sen} 2x$. **11.** $2x\cos(x^2)$.

12. $\operatorname{sen} x \cos x/\sqrt{1+\operatorname{sen}^2 x}$. **13.** $2\left(x \operatorname{sen}\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x^2}\right)$.

14. $\dfrac{2}{(1-x)^2\cos^2\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)}$. **15.** $(2x+3)\cos(x^2+3x+2)$.

16. $3x^2/\sqrt{1-(3+x^3)^2}$. **17.** -1. **18.** 1.

19. $\dfrac{\sqrt{2}}{x}(x^{\sqrt{2}}+x^{-\sqrt{2}})$. **20.** $\sqrt[3]{5}\cos(x+7)[\operatorname{sen}(x+7)]^{\sqrt[3]{5}-1}$

21. $-\dfrac{a\alpha \operatorname{sen} x}{\sqrt{1-(a\cos x+b)^2}}\cdot[\operatorname{arc\,sen}(a\cos x+b)]^{\alpha-1}$.

§ 5, pág. 166.

1. (*a*) Máx. para $x=-\sqrt{2}$, mín. para $x=\sqrt{2}$, inflexão para $x=0$.

(*b*) Máx. para $x={}^2/_5$, mín. para $x=0$, infl. para $x=-{}^1/_{10}$.

(*c*) Máx. para $x=1$, mín. para $x=-1$, infl. para $x=0, \pm\sqrt{3}$.

(*d*) Máx. para $x=\sqrt[4]{3}$, mín. para $x=-\sqrt[4]{3}$, infl. para $x=0, \pm\sqrt[4]{6\pm\sqrt{33}}$

(*e*) Máx. para $x=(n+{}^1/_2)\pi$, mín. para $x=n\pi$, infl. para $x=\dfrac{2n+1}{4}\pi$.

2. Máx. para $x=-\sqrt{-p}$; mín. para $x=\sqrt{-p}$; infl. para $x=0$. Quando $p \geqq 0$, não há máximo nem mínimo. As raízes são tôdas reais, ou duas complexas e uma real, conforme seja $q^2+4p^3 \leqq 0$ ou >0.

3. O ponto (0, 1).

4. A equação da linha é $(y-y_0)/(x-x_0)=-\sqrt[3]{y_0/x_0}$.

5. $\sqrt{57{,}60}$ m.

6. O ponto que divide a linha *ab* na razão $\sqrt[3]{a}:\sqrt[3]{b}$.

7. O quadrado.

8. O retângulo com os vértices $x=\pm a/\sqrt{2}$, $y=\pm b/\sqrt{2}$.

9. O triângulo retângulo, isto é, $c^2=a^2+b^2$.

10. O lado do retângulo oposto a g deve se achar à distância ${}^1/_4(\sqrt{8r^2+h^2}+h)$ do centro.

11. O cilindro cuja altura fôr igual ao diâmetro da base.

13. Sendo φ o ângulo de um prisma e n o seu índice de refração, o ângulo de incidência deverá ser arc sen $\left(n \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2}\right)$.

14. $x = (\sum_i a_i)/n$.

15. Achar o mínimo de $x^p - px$.

16. Achar os mínimos de $x - \operatorname{sen} x$ e $\operatorname{sen} x - \frac{2}{\pi} x$ no intervalo $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$. Ou mostrar que $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ é monótona neste intervalo.

18. $\left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}}{n-1}\right)^{\frac{n-1}{n}} \frac{1}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_{n-1}}}$.

§ 6, pág. 177.

1. 0,693. 2. $\log x$. 3. $1/x \log x$. 4. $1/\sqrt{1+x^2}$

5. $\dfrac{1 - 2x\sqrt{1+\log x}\cos x}{2x\sqrt{1+\log x}(\sqrt{1+\log x} - \operatorname{sen} x)}$.

6. $x/(x^2+1) - 1/3(2+x)$.

7. $\dfrac{\sqrt[3]{7x^2+1}}{\sqrt{x-2}\sqrt{x^4+1}}\left[\dfrac{14x}{3(7x^2+1)} - \dfrac{1}{4(x-2)} - \dfrac{2x^3}{(x^4+1)}\right]$.

11. $x = 1/\lambda$, desde que $\lambda \neq 0$; se $\lambda = 0$, não há máximo.

12. $(\log a)^2 . a^{(a^x)} . a^x$.

13. $a^{\operatorname{sen} x (\log x)^2} . \log a \left[\cos x (\log x)^2 + \dfrac{2 \operatorname{sen} x \log x}{x}\right]$.

§ 7, pág. 183.

1. (*a*) Faça-se x fixo e derive-se em relação a y; iguale-se, então, y a zero.
(*b*) Calcular $f(x)$, primeiro para x racional, e depois, pela continuidade para x irracional.

2. Derivar em relação a y, fazendo, então, $y = 1$.

3. 2 315 anos.

4. (*a*) $y = \beta + ce^{\alpha x}$; (*b*) $y = -\frac{\beta}{\alpha} + ce^{\alpha x}$, $\alpha \neq 0$; $y = \beta x + c$, $\alpha = 0$.
(*c*) $y = \beta x e^{\alpha x} + ce^{\alpha x}$; (*d*) $y = \frac{\beta}{\gamma - \alpha} e^{\gamma x} + ce^{\alpha x}$, $\gamma \neq \alpha$.

§ 8, pág. 189.

1. $\operatorname{Sh} a - \operatorname{Sh} b = 2 \operatorname{Ch}\left(\frac{a+b}{2}\right) \operatorname{Sh}\left(\frac{a-b}{2}\right)$.

$\operatorname{Ch} a + \operatorname{Ch} b = 2 \operatorname{Ch}\left(\frac{a+b}{2}\right) \operatorname{Ch}\left(\frac{a-b}{2}\right)$.

$\operatorname{Ch} a - \operatorname{Ch} b = 2 \operatorname{Sh}\left(\frac{a+b}{2}\right) \operatorname{Sh}\left(\frac{a-b}{2}\right)$.

2. $\operatorname{Th}(a \pm b) = \dfrac{\operatorname{Th} a \pm \operatorname{Th} b}{1 \pm \operatorname{Th} a \operatorname{Th} b}$.

$\operatorname{Coth}(a \pm b) = \dfrac{1 \pm \operatorname{Coth} a \operatorname{Coth} b}{\operatorname{Coth} a \pm \operatorname{Coth} b}$.

$\operatorname{Sh} \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\dfrac{\operatorname{Ch} a - 1}{2}}$; $\operatorname{Ch} \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\dfrac{\operatorname{Ch} a + 1}{2}}$.

3. (*a*) $\operatorname{Sh} x + \operatorname{Ch} x$; (*b*) $-4 \dfrac{e^{\operatorname{Th} x + \operatorname{Coth} x}}{\operatorname{Ch} 4x - 1}$;

(*c*) $(1 + \operatorname{Sh} 2x) \operatorname{Coth}(x + \operatorname{Ch}^2 x)$; (*d*) $1/\sqrt{x^2 - 1} + 1/\sqrt{x^2 + 1}$;
(*e*) $\alpha \operatorname{Sh} x/\sqrt{\alpha^2 \operatorname{Ch}^2 x + 1}$; (*f*) $2/(1 - x^2)$.

4. $\operatorname{Sh} b - \operatorname{Sh} a$.

§ 9, pág. 195.

1. (*a*) Mais alta do que x^N; (*b*) mais baixa do que x^ϵ; (*c*) igual a **1**; (*d*) mais alta do que x^N; (*f*) mais alta do que $x^{1/2-\epsilon}$, e mais baixa do que $x^{1/2+\epsilon}$; (*g*) da mesma ordem que x; (*h*) mais alta do que x^N; (j) mais baixa do que x^ϵ.

2. Superior a $e^{\alpha x}$, $(\log x)^\alpha$ e igual a e^{x^β}; (*b*) inferior a $e^{\alpha x}$, e^{x^α}; (*c*) limitada; (*d*) igual à de e^x, menor do que e^{x^α}, e superior a $(\log x)^\alpha$; (*e*), (*f*), (*g*) inferior a $e^{\alpha x}$, e^{x^α}, superior a $(\log x)^\alpha$; (*h*) maior do que $e^{x^{1-\epsilon}}$, inferior a $e^{x^{1+\epsilon}}$, superior a $e^{\alpha x}$, $(\log x)^\alpha$; (*j*) igual a $\log x$, inferior a $e^{\alpha x}$, e^{x^α},

3. (*a*) igual a x^β; (*b*) inferior a $\left(\dfrac{1}{x}\right)^\epsilon$; (*c*) igual a x; (*d*) igual a x; (*e*) igual a $x^{5/2}$; (*f*) igual a $x^{3/2}$; (*g*) superior a x^N; (*h*) superior a $x^{1-\epsilon}$, inferior a x; (*j*) inferior a $\left(\dfrac{1}{x}\right)^\epsilon$.

4. Sim; 0. **5.** 0, 1.

6. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = f'(0) = 0$. **8, 9.** Use o resultado do exemplo 7.

Apêndice, pág. 203.

1. $f''(g[h(x)])g'^2[h(x)]h'^2(x) + f'(g[h(x)])g''[h(x)]h'^2(x) + f'(g[h(x)])g'[h(x)]h''(x)$.

2. (*a*) $x^{\operatorname{sen} x}\left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{x} + \log x . \cos x\right)$.

(*b*) $(\cos x)^{\operatorname{tg} x}\left(-\operatorname{tg}^2 x + \dfrac{\log \cos x}{\cos^2 x}\right)$.

(*c*) $\dfrac{u'(x)}{u(x) \log v(x)} - \dfrac{v'(x) \log u(x)}{v(x)[\log v(x)]^2}$.

4. (*a*) $e^{\alpha x}[\alpha^n x^3 + 3n\alpha^{n-1}x^2 + 3n(n-1)\alpha^{n-2}x + n(n-1)(n-2)\alpha^{n-3}]$;

(*b*) $\dfrac{2(-1)^n(n-1)!}{x^n}\left(\sum\limits_{\nu=1}^{n-1}\dfrac{1}{\nu} - \log x\right)$;

(*c*) $\dfrac{(-1)^m}{2}(\cos x - 3^{2m}\cos 3x)$, para $n = 2m$;

$\dfrac{(-1)^m}{2}(3^{2m+1}\operatorname{sen} 3x - \operatorname{sen} x)$, para $n = 2m + 1$.

(*d*) $\dfrac{(-1)^l}{2}[(m+k)^{2l}\operatorname{sen}(m+k)x - (m-k)^{2l}\operatorname{sen}(m-k)x]$, para $n = 2l$;

$\dfrac{(-1)^l}{2}[(m+k)^{2l+1}\cos(m+k)x - (m-k)^{2l+1}\cos(m-k)x]$, para $n =$
$= 2l + 1$.

(*e*) $$e^x\left\{\left[\sum_{l=0}^{2l\leqq n}(-1)^l\binom{n}{2l}2^{2l}\right]\cos 2x + \right.$$
$$\left. + \left[\sum_{l=0}^{2l+1\leqq n}(-1)^{l+1}\binom{n}{2l+1}2^{2l+1}\right]\operatorname{sen} 2x\right\} = 5^{n/2}e^x\cos(2x + n\alpha),$$

onde $\operatorname{tg}\alpha = 2$ (desenvolvendo-se $1 + 2i)^n$ pelo teorema do binômio, e agrupando-se os têrmos reais e os imaginários).

(*f*) $e^x . \sum\limits_{\nu=0}^{6}\binom{6}{\nu}\binom{n}{\nu}(1+x)^{6-\nu}$.

5. Seja $y = \operatorname{arc\,sen} x$. Teremos:
$$\frac{d^ny}{dx^n} = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}\left[\frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}\right].$$

Aplicando-se a regra de Leibnitz a esta última expressão:
$$\left.\frac{d^ny}{dx^n}\right|_{x=0} = (n-2)\frac{d^{n-3}}{dx^{n-3}}\left[\frac{1}{(1-x^2)^{3/2}}\right]_{x=0}$$
$$= 3.(n-2)\frac{d^{n-4}}{dx^{n-4}}\left[\frac{x}{(1-x^2)^{5/2}}\right],$$

e continuando o processo:
$$\left.\frac{d^ny}{dx^n}\right|_{x=0} = 1.3.5\ldots(2\nu-1).(n-2)(n-4)\ldots(n-2\nu+2)\frac{d^{n-2\nu}}{dx^{n-2\nu}}\left[\frac{x}{(1-x^2)^{(2\nu+1)/2}}\right].$$

Se $n = 2l$, $\left.\dfrac{d^ny}{dx^n}\right|_{x=0} = 0$; se $n = 2l+1$, $\left.\dfrac{d^ny}{dx^n}\right|_{x=0} = 1^2.3^2.5^2.\ \ldots\ .(2l-1)^2$.

$$\left.\frac{d^{2l}}{dx^{2l}}(\operatorname{arc\,sen} x)^2\right|_{x=0} = \sum_{k=0}^{l-1}\binom{2l}{2k+1}1^2.3^2.\ \ldots\ .(2k-1)^2.1^2.3^2.\ \ldots\ .(2l-2k-3)^2.$$
$$\left.\frac{d^{2l+1}}{dx^{2l+1}}(\operatorname{arc\,sen} x)^2\right|_{x=0} = 0.$$

6. Derivar $(1 + x)^n$ duas vêzes e fazer $x = 1$.

CAPÍTULO IV

§ § 2, 3 (1), pág. 217.

1. $^1/_2 e^{x^2}$. **2.** $-^1/_4 e^{-x^4}$. **3.** $^2/_9(1+x^3)^{3/2}$. **4.** $^1/_2(\log x)^2$.

5. $-\dfrac{1}{n-1}\left(\dfrac{1}{\log x}\right)^{n-1}$.

6. Sugestão: escrevamos o denominador sob a forma $(3x-1)^2+1$: $\operatorname{arc\,tg}(3x-1)$.

7. $\log\left[\dfrac{x-1}{2}+\sqrt{1+\left(\dfrac{x-1}{2}\right)^2}\right]$.

8. Sugestão: $6x/(2+3x) = 2 - 4/(2+3x)$: $2x - {}^4/_3 \log|2+3x|$.

9. $\operatorname{arc\,sen} x - \sqrt{1-x^2}$ **10.** $\log\left[\dfrac{x+1}{2}+\sqrt{1+\left(\dfrac{x+1}{2}\right)^2}\right]$.

11. $\operatorname{arc\,sen}\dfrac{x+1}{2}$. **12.** $^1/_2 \log(x^2-x+1)+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}$.

13. $2\operatorname{Arc\,Ch}\left(\dfrac{x-2}{\sqrt{3}}\right)+\sqrt{x^2-4x+1}$.

14. $-^1/_3\sqrt{2+2x-3x^2}+\dfrac{4}{3\sqrt{3}}\operatorname{arc\,sen}\dfrac{3x-1}{\sqrt{7}}$.

15. $\dfrac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}$. **16.** $\dfrac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}$.

17. $\dfrac{1}{\sqrt{b-a^2}}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x+a}{\sqrt{b-a^2}}$, se $b-a^2>0$; $-\dfrac{1}{x+a}$, se $b-a^2=0$;

$-\dfrac{1}{\sqrt{a^2-b}}\operatorname{arc\,Th}\dfrac{x+a}{\sqrt{a^2-b}}$, se $b-a^2<0$.

18. $-x^4/4 - x^3/3 - x^2/2 - x - \log|x-1|$.

19. Sugestão: $\operatorname{sen}^3 x\cos^4 x = \operatorname{sen} x\cos^4 x(1-\cos^2 x) = \operatorname{sen} x\cos^4 x - \operatorname{sen} x\cos^6 x$:

$-\dfrac{\cos^5 x}{5}+\dfrac{\cos^7 x}{7}$.

20. $\dfrac{\operatorname{sen}^3 x}{3}-2\dfrac{\operatorname{sen}^5 x}{5}+\dfrac{\operatorname{sen}^7 x}{7}$. **21.** $^1/_9(1-x^2)^{9/2} - {}^1/_7(1-x^2)^{7/2}$.

22. $^1/_2\operatorname{arc\,sen} x - {}^1/_2 x\sqrt{1-x^2}$. **23.** $\pi^2/32$.

24. $\dfrac{1+(-1)^n}{n+1}$. **25.** 2. **26.** $\dfrac{1}{2(1+a^2)}-\dfrac{1}{2(1+b^2)}$.

27. $^1/_3(a^3-b^3)+{}^1/_2(a^2-b^2)+(a-b+\log\dfrac{a-1}{b-1}$.

28. $^1/_4\left(1-\cos\dfrac{\pi^2}{2}\right)$. **29.** Veja o exemplo 8, pág. 88: $1/(n+1)$.

(1) Tanto aqui como a seguir, omitimos as constantes de integração.

§ 4, pág. 225.

1. Façamos $f = x$, $g' = \cos x/\operatorname{sen}^2 x$: $-x/\operatorname{sen} x + \log \operatorname{tg} x/2$.

2. Façamos $f = x^4/4$, $g' = 4x^3/(1-x^4)^2$: $x^4/4(1-x^4) + {}^1/_4 \log|1-x^4|$.

3. $(x^2-2)\operatorname{sen} x + 2x \cos x$.

4. $-{}^1/_2(x^2+1)e^{-x^2}$. **5.** $4\pi(-1)^n/n^2$. **6.** 0.

7. ${}^1/_2(x^2 \operatorname{sen} x^2 + \cos x^2)$. **8.** ${}^1/_{32} \operatorname{sen} 4x - {}^1/_4 \operatorname{sen} 2x + {}^3/_8 x$.

9. ${}^1/_{192} \operatorname{sen} 6x + {}^3/_{64} \operatorname{sen} 4x + {}^{15}/_{64} \operatorname{sen} 2x + {}^5/_{16} x$.

10. Façamos $x = \cos\theta$; $x\sqrt{1-x^2}(-{}^1/_{16} - {}^1/_{24}x^2 + {}^1/_6 x^4) + {}^1/_{16} \operatorname{arc\,sen} x$.

11. $e^x(x^2-2x+2)$. **12.** $-\dfrac{1}{(n-1x)^{n-1}}\log x - \dfrac{1}{(n-1)^2x^{n-1}}$.

13. $\dfrac{x^{m+1}}{m+1}\log x - \dfrac{x^{m+1}}{(m+1)^2}$. **14.** $\dfrac{1}{3}x^3\left[(\log x)^2 - \dfrac{2}{3}\log x + \dfrac{2}{9}\right]$.

16. Façamos $x^2 = t$, empregando, então, o exemplo 15.

17. Integra-se, por partes, repetidamente.

19. Empregue-se a indução matemática: admite-se que a integral repetida de ordem n de $f_n(x)$ é dada por $\dfrac{1}{(n-1)!}\displaystyle\int_0^x f(u)\,(x-u)^{n-1}\,du$ e desenvolve-se o integrando pelo teorema do binômio. Então, $f_{n+1}(x) = \displaystyle\int_0^x f_n(t)\,dt$; integrem-se os dois têrmos por partes.

§ 5, pág. 231.

1. $\log\sqrt{\left|\dfrac{x}{2-3x}\right|}$. **2.** $\log\left|1-\dfrac{1}{x}\right|$.

3. $\log\left|\dfrac{x}{x+1}\right|^3 + \dfrac{3}{x+1} + \dfrac{3}{2(x+1)^2}$.

4. $\dfrac{x}{3} - \dfrac{1}{8}\log|x+1| + \dfrac{49}{72}\log|3x-5|$.

5. $-\dfrac{1}{2(x-1)} + \log\sqrt[4]{\dfrac{1+x^2}{(1-x)^2}}$. **6.** $\dfrac{-1}{2(x-1)} - \log\sqrt[4]{\dfrac{1+x^2}{(1-x)^3}}$.

7. $\log\dfrac{1}{\sqrt[3]{|x-1|}} + \dfrac{1}{6}\log(x^2+x+1) + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}$.

8. $\log\sqrt[3]{|x+1|} - \dfrac{1}{6}\log|x^2-x+1| + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}$.

9. $\log\dfrac{1}{\sqrt[5]{(x-2)^2}} + \log\sqrt[5]{1+x^2} + \dfrac{9}{5}\operatorname{arc\,tg} x$.

10. $\dfrac{2}{3}\log|x+2| + \dfrac{5}{6}\log|x-1| - \dfrac{3}{2}\log|x+1|$.

11. $-\dfrac{x^3}{3} + \log\sqrt[4]{\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|} - \dfrac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x$.

12. $\frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg} x + \frac{\sqrt{3}}{12}\log\frac{x^2+\sqrt{3}x+1}{x^2-\sqrt{3}x+1} + \frac{1}{6}\operatorname{arc\,tg}(2x+\sqrt{3}) +$
$+\frac{1}{6}\operatorname{arc\,tg}(2x-\sqrt{3}).$

13. $\frac{1}{6}\log\frac{x-1}{x+1} + \frac{\sqrt{2}}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{2}}.$

14. $-\frac{3x^2+2}{2x(x^2+1)} - \frac{3}{2}\operatorname{arc\,tg} x.$

§ 6, pág. 241.

1. $-\dfrac{2}{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}.$

2. $\operatorname{tg}\frac{x}{2}.$

3. $\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}}\right).$

4. $\frac{1}{8}\left(\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} - \operatorname{cotg}^2\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}\log\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|.$

5. $\log\left|\dfrac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}\right|.$

6. $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}\sqrt{2}.$

7. $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}.$

8. $\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2\operatorname{tg} x}{\sqrt{3}}.$

9. $\frac{1}{2\cos^2 x} + \log\cos x.$

10. $\frac{1}{\sqrt{2}}\log\left|\dfrac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1+\sqrt{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1-\sqrt{2}}\right|.$

11. $\frac{1}{4}\log\frac{\cos^2 x-\cos x+1}{(\cos^2 x+\cos x+1)^3} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2\cos x-1}{\sqrt{3}}$
$-\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2\cos x+1}{\sqrt{3}}.$

12. $\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-4} - 2\operatorname{Arc\,Ch}\frac{x}{2}.$

13. $\frac{1}{2}x\sqrt{4+9x^2} + \frac{2}{3}\operatorname{Arc\,Sh}\frac{3}{2}x.$

14. $2\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{x-3}{x-1}}.$

15. $\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+4x)^3} - (x+2)\sqrt{x^2+4x} + 4\operatorname{Arc\,Ch}\frac{x+2}{2}.$

16. $\sqrt{x} - \sqrt{1-x} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\log\left|\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{1/2})(\sqrt{1-x}+\sqrt{1/2})}{(\sqrt{x}+\sqrt{1/2})(\sqrt{1-x}-\sqrt{1/2})}\right|.$

17. $\log\left|x\cdot\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right| + \sqrt{1-x^2}.$

18. $\frac{1}{2}$ Arc Ch $(2x - 2a + 1) + \sqrt{(x-a)^2 + (x-a)} - 2\sqrt{x-a}$.

19. $\dfrac{2}{3(b-a)}\{\sqrt{(x-a)^3} - \sqrt{(x-b)^3}\}$.

§ 8, pág. 254.

1. Div.	**2.** Conv.	**3.** Conv.	**4.** Conv.	**5.** Div.
6. Conv.	**7.** Conv.	**8.** Div.	**9.** Conv.	**10.** Conv.

11. Conv. **14.** (*a*) Para $0 < s < 1$. (*b*) Para $0 < s < 2$.

15. Sim.

Diversos exemplos. IV, pág. 255.

1. Faça-se $\operatorname{arc\,sen} x = t$: $\frac{1}{2}e^{\operatorname{arcsen} x}(x + \sqrt{1-x^2})$.

2. $\frac{1}{9}\cos^9 x - \frac{1}{7}\cos^7 x$.

3. $x[(\log x)^2 - 2\log x + 2]$. **4.** $\dfrac{1}{4}\log\dfrac{2-\cos x}{2+\cos x}$.

5. Façamos $\sqrt{1-e^{-2x}} = t$: $x - \sqrt{1-e^{-2x}} + \log(1 + \sqrt{1-e^{-2x}})$.

6. 0. **7.** 0. **10.** 0.

12. Consideremos a função $1/x$ no intervalo $1 \leqq x \leqq 2$. Subdividamos êste intervalo em n partes iguais e formemos a soma inferior como no capítulo II, § 1 (págs. 76 e seg.). Isto nos proporciona α_n. Façamos, agora, $n \to \infty$. O resultado será $\log 2$.

13. Comparar com $1/\sqrt{1-x^2}$ em $x = 0, 1/n, 2/n, \ldots, (n-1)/n$: $\pi/2$.

14. Calcular

$$\lim_{n\to\infty} \log \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\log 1 + \log\left(1 - \frac{1}{n}\right) \ldots + \ldots + \log\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)\right],$$

empregando a definição da integral definida.

15. $1/(1+\alpha)$.

CAPÍTULO V

§ 1, pág. 267.

1. $(x^2 + y^2)^3 = a^2(x^2 - y^2)^2$.

2. Admitamos que c gire com velocidade constante e meçamos o tempo de sorte que em $t = 0$ o ponto P esteja em contacto com o círculo C:
$x = (R + r)\cos\theta - r\cos[(R+r)\theta/r]$, $y = (R+r)\,\mathrm{sen}\,\theta - r\,\mathrm{sen}[(R+r)\theta/r]$.

3. $x = 2R\cos\theta(1 - \cos\theta) + R$, $y = 2R\,\mathrm{sen}\,\theta(1-\cos\theta)$.

4. $x = (R-r)\cos\theta + r\cos[(R-r)\theta/r]$, $y = (R-r)\,\mathrm{sen}\,\theta - r\,\mathrm{sen}[(R-r)\theta/r]$.

6. Tomemos coordenadas retangulares, fazendo com que a origem fique no centro de C e o ponto P no eixo dos x, no tempo $t = 0$. $x^{2/3} + y^{2/3} = R^{2/3}$.

7. $x = 3at/(1+t^2)$, $y = 3at^2/(1+t^3)$.

10. $\alpha = \text{arc tg}\left[\dfrac{r(f'-g')}{r^2+f'g'}\right]$.

11. $x = \dfrac{f'(y_0g' + x_0f') - g'(gf' - fg')}{f'^2 + g'^2}$, $y = \dfrac{g'(y_0g' + x_0f') + f'(gf' - fg')}{f'^2 + g'^2}$.

12. (*a*) O próprio C; (*b*) a cardióide do círculo de diâmetro PM, com vértice em P.

§ § 2, 3, pág. 290.

1. $^2/_5(b^{5/2} - a^{5/2})$. **2.** $3a^2/4$. **3.** $^1/_6a^2(\theta_2^3 - \theta_1^3)$. **4.** $6\pi R^2$.

5. $6\pi r^2$. **6.** $\pi(1 + {^1/_2}x_0^2)$. **7.** $^1/_2\pi(a^2 + b^2 + x_0^2)$.

8. $x = R + s(1 - s/2R + s^2/32R^2)(1 - s/16R)$.
$y = R(s/R - s^2/16R^2)^{3/2}(1 - s/8R)$, para $0 \leqq s \leqq 16R$.

9. $x = 2a \text{ arc cos}(1 - s/4a) - 1 - s/4a)\sqrt{s(1 - s/8a)/2a}$,
$y = s - s^2/8a$, para $0 \leqq s \leqq 8a$.

10. $s = \sqrt{(4/9 + x)^3} - 8/27$. **11.** $6R$.

12. (*a*) $^1/_2a(\text{Arc Sh }\theta + \theta\sqrt{1+\theta^2})$.

(*b*) $\dfrac{\sqrt{1+m^2}}{m}(e^{m\theta} - e^{m\theta_0})$.

(*c*) $8R(1 - \cos {^1/_2}\theta)$. (*d*) $a[{^1/_3}(\theta^3 - \theta_0^3) + \theta - \theta_0]$.

13. (*a*) $^1/_2(1 + 4x^2)^{3/2}$; mín. $^1/_2$ em $x = 0$.
(*b*) $(a^2 \text{ sen}^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)/ab$: se $a > b$, mín. b/a em $\varphi = 0$, máx. a/b em $\varphi = \pi/2$, $3\pi/2$.

14. $\rho = 1/\sqrt{t}$.

17. Vol. $\pi r^2(h_2 - h_1) - {^1/_3}\pi(h_2^3 - h_1^3)$. Superfície $2\pi(h_2 - h_1)r$.

18. Denominando-se ρ o raio do círculo e r a distância do seu centro à linha, o volume será $2\pi^2r\rho^2$, e a área da superfície, $4\pi^2r\rho$.

19. $\pi(x_1 - x_0) + \dfrac{\pi}{2}(\text{Sh } 2x_1 - \text{Sh } 2x_0)$.

20. $k = \pi s$.

21. $y = -\text{Arc Ch}\dfrac{1}{x} + \sqrt{1-x^2} + \text{const.}$; $s = \log\left(\dfrac{x}{x_0}\right)$;
$x = e^s$, $y = -\text{Arc Ch } e^{-s} + \sqrt{1 - e^{2s}} + \text{const.}$

22. Sejam ds, ds' os comprimentos do arco; l, l' os comprimentos totais; A, A' as áreas, e k, k' a curvatura e a curva paralela, respectivamente. Teremos,

$$ds' = (1 + pk)\,ds; \qquad k' = k/(1 + pk);$$
$$A' = A + lp + \pi p^2; \quad l' = l + 2\pi p.$$

23. (*a*) $\xi = r(\text{sen } \varphi_2 - \text{sen } \varphi_1)/(\varphi_2 - \varphi_1)$,
$\eta = -r(\cos \varphi_2 - \cos \varphi_1)/(\varphi_2 - \varphi_1)$,

onde φ_1, φ_2 são as coordenadas θ das extremidades do arco.

(*b*) $\xi = (x_2 \operatorname{Sh} x_2 - x_2 \operatorname{Sh} x_1 - \operatorname{Ch} x_2 + \operatorname{Ch} x_1)/(\operatorname{Sh} x_2 - \operatorname{Sh} x_1)$,

$\eta = [2(x_2 - x_1) + \operatorname{Sh} 2x_2 - \operatorname{Sh} 2x_1]/4(\operatorname{Sh} x_2 - \operatorname{Sh} x_1)$,

onde (x_1, y_1), (x_2, y_2) são as extremidades do arco.

24. $(\alpha^2 + \beta^2)(b - a) + {}^2/_3(\beta^3 - \alpha^3)$.

25. (*a*) $\operatorname{Sh} x_2 - \operatorname{Sh} x_1 + {}^1/_3(\operatorname{Sh}^3 x_2 - \operatorname{Sh}^3 x_1)$,

(*b*) $(x_2^2 + 2) \operatorname{Sh} x_2 - (x_1^2 + 2) \operatorname{Sh} x_1 - 2x_2 \operatorname{Ch} x_2 + 2x_1 \operatorname{Ch} x_1$, se $0 \leqq x_1 \leqq x_2$.

§ 4, pág. 298.

1. $$\frac{dx}{dt} = -\frac{r \operatorname{sen}(2t/r)}{2\sqrt{t^2 - r^2 \operatorname{sen}^2(t/r)}} - \operatorname{sen}\frac{t}{r};$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{t^2 \cos(2t/r) + r^2 \operatorname{sen}^4(t/r)}{\sqrt{[t^2 - r^2 \operatorname{sen}^2(t/r)]^3}} - \frac{1}{r}\cos\frac{t}{r}.$$

2. Horizontal.

3. $u = v_0/(1 + ksv_0)$, $t = s/v_0 + {}^1/_2 ks^2$.

4. (*a*) $x = 4 \operatorname{arc\,tg} e^t - \pi$; $x = \pi$.

5. (*a*) $$t = \frac{1}{\sqrt{2\mu M}}\left(y_0\sqrt{y_0 - y} - y_0^{3/2} \operatorname{arc\,tg}\sqrt{y/(y_0 - y)} + \frac{1}{2}\pi y_0\right).$$

(*b*) $\sqrt{2\mu M(1/R - 1/y_0)}$; (*c*) $\sqrt{\dfrac{2\mu M}{R}}$.

6. $\theta = at$, $r = \dfrac{k}{1 - e\cos at}$, onde $a = \dfrac{(1 - e)^2}{k^2}\sqrt{ck}$;

$$\text{período} = \frac{2\pi}{a} = \frac{2\pi}{(1 - e)^2 c^{1/2}} \cdot k^{3/2}$$

CAPÍTULO VI

§ 1, pág. 319

1. 0,28. **2.** 0,182 3. Impossível; a série não é válida.

§ 2, pág. 325.

2. $\dfrac{1}{1 - x}$; $\theta = \dfrac{1 - (1 - x)^{1/(n+2)}}{x}$.

$\dfrac{1}{1 + x}$; $\theta = \dfrac{(1 + x)^{1/(n+2)} - 1}{x}$.

§ 3, pág. 330.

1. $1 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4(1 + \theta x)^{3/2}}$; $-\dfrac{1}{4} < R < -\dfrac{\sqrt{2}}{16}$.

2. 1,5; êrro de 6%, aproximadamente; 3. $1 + {}^1/_3 x$; $|x| < 0{,}3$.

4. $1 + {}^1\!/_3\,x - {}^1\!/_9\,x^2$; ${}^5\!/_{81} \times 10^{-4}$.

5. (a) $1 + \dfrac{x}{n}$; $\dfrac{1}{2n}\left(\dfrac{1}{n} - 1\right) \times 10^{-2}$.

(b) $1 + \dfrac{x}{n} + \dfrac{1}{2n}\left(\dfrac{1}{n} - 1\right)x^2$; $\dfrac{1}{6n}\left(\dfrac{1}{n} - 1\right)\left(\dfrac{1}{n} - 2\right) \times 10^{-4}$.

6. 0,010 0. 7. (a) 0,999 9; (b) 5,013 3; (c) 9,848 9. 8. 0,515.

9. $x^2 - \dfrac{x^4}{3} + \dfrac{2x^6}{45} + \dfrac{x^8}{8!}[-128\cos(2\theta x)]$.

10. $1 - \dfrac{3x^2}{2} + \dfrac{7x^4}{8} + \dfrac{3}{4}\dfrac{x^6}{6!}[243\cos(3\theta x) + \cos(\theta x)]$.

11. $-{}^1\!/_2\,x^2 - {}^1\!/_{12}\,x^4 - {}^1\!/_{45}\,x^6$

$$-16\frac{x^8}{8!}[17 + 248\,\mathrm{tg}^2(\theta x) + 756\,\mathrm{tg}^4(\theta x) + 840\,\mathrm{tg}^6(\theta x) + 315\,\mathrm{tg}^8(\theta x)].$$

12. $x + {}^1\!/_3\,x^3 + {}^2\!/_{15}\,x^5$.

$$+16\frac{x^7}{7!}[17 + 248\,\mathrm{tg}^2(\theta x) + 756\,\mathrm{tg}^4(\theta x) + 840\,\mathrm{tg}^6(\theta x) + 315\,\mathrm{tg}^8(\theta x)].$$

13. ${}^1\!/_2\,x^2 + {}^1\!/_{12}\,x^4 + {}^1\!/_{45}\,x^6$

$$+16\frac{x^8}{8!}[17 + 248\,\mathrm{tg}^2(\theta x) + 756\,\mathrm{tg}^4(\theta x) + 840\,\mathrm{tg}^6(\theta x) + 315\,\mathrm{tg}^8(\theta x)].$$

14. $1 - x^2 + \dfrac{1}{2}x^4 - \dfrac{x^6}{3!}e^{-\theta^2 x^2}$.

15. $1 + {}^1\!/_2\,x^2 + {}^5\!/_{24}\,x^4$

$$+\frac{x^6}{6!}[720\sec^7(\theta x) - 840\sec^5(\theta x) + 182\sec^3(\theta x) - \sec(\theta x)].$$

16. $-\frac{1}{3}x - \frac{1}{45}x^3 - \frac{2}{945}x^5 - \ldots$.

17. $\frac{1}{6}x + \frac{7}{360}x^3 + \frac{31}{15\,120}x^5 + \ldots$.

18. $x - \dfrac{3}{2}x^2 + \dfrac{11}{6}x^3 + \dfrac{x^4}{4!}\dfrac{1}{(1+\theta x)^5}(-50 + 24\log\overline{1 + \theta x})$.

19. $1 + x + \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{3}{24}x^4 + \dfrac{x^5}{5!}e^{\mathrm{sen}\,\theta x}[\cos^5(\theta x) - 10\cos^3(\theta x) + \cos(\theta x)$

$$-10\,\mathrm{sen}(\theta x)\cos^3(\theta x) + 15\,\mathrm{sen}(\theta x)\cos(\theta x) + 6\,\mathrm{sen}^2(\theta x)\cos(\theta x)].$$

20. $x + {}^1\!/_8\,x^3$; $0 < x < \pi/4$.

21. (a) $y = x^2 + x^4 + 2x^6 + \ldots$; (b) $y = 1 - x^2 - x^4 - 2x^6 - \ldots$;
(c) $y = x^8 + x^9 + \ldots$.

§ pág. 335.

1. 2. **2. 4.** 3. $a = 8/3$, $b = 16/3$, $c = -5/3$. $d = -5/3$.

4. Terceira, e também, ordem zero, em (0, 0); ordem zero em (½, ½).

5. Terceira ordem em (0, 0).

7. Tomemos P como origem, e a tangente à curva, em P, como eixo dos x. Sejam (x, y) as coordenadas de Q. O centro do círculo em questão ficará, neste caso, sôbre o eixo dos x, no ponto $\eta = \frac{y}{2} + \frac{x^2}{2y}$; use o exemplo 6.

8. Tomemos os eixos como no exemplo anterior; seja y' a inclinação da curva em Q. As duas normais interceptam-se no eixo dos y, no ponto $\eta = y + \frac{x}{y'}$. Escrevamos $y = \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \ldots$, e façamos $x \to 0$.

9. Num ponto P, em que $\rho = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}$ fôr um máximo ou um mínimo, teremos necessàriamente, $y''' = \frac{3y'y''}{(1 + y'^2)}$. Tomemos os eixos coordenados no exemplo 7. Neste caso, $y'''(0) = 0$, de sorte que a equação da curva, na vizinhança de $x = 0$, será $y = \frac{1}{2\rho}x^2 + ax^2 + \ldots$. A equação do círculo osculador é $y = \frac{1}{2\rho}x^2 + bx^4 + \ldots$, sendo o contacto, no mínimo, de 3.ª ordem.

10. Mínimo em $x = 0$.

Apêndice, pág. 341.

1. na^{n-1}. 2. 1/6. 3. 1/30. 4. 2. 5. 1.

6. Escrevamos a expressão como cotg x/cotg $5x$: 1/5.

7. 1/2. 8. 1/3. 9. Tomemos os logaritmos: 1.

10. e. 11. 2. 12. -2.

CAPÍTULO VII

§ 1, pág. 348.

1. (a) 3,14; (b) 3,141 5 2. 0,89.

3. 0,93.

§ 2, pág. 355.

1. Êrro $< -0,03$ m, $< 0,007$ %. 2. 0,693. 3. 1,609 438.

4. 3,141 59.

§ 3, pág. 360.

1. 1,075 5. 2. 4,493 4. 3. 1,475.

4. 0; 1,90; $-1,90$. 5. 1,045.

6. Escrevamos a equação sob a forma $x = 1 + 0,3x^3 - 0,1x^4$; 1.519.

7. $-1,236$ 1; 3,236 1; 5,000 0.

CAPÍTULO VIII

§ 1, pág. 376.

1. Utilizemos o fato que $\dfrac{1}{\nu(\nu+1)} = \dfrac{1}{\nu} - \dfrac{1}{\nu+1}$.

2. Decomponhamos $1/x(x+1)(x+2)$ em frações parciais, substituindo $x=1$, $x=2$, ..., $x=\nu$ no resultado, cada um por sua vez, e somar.

4. Convergente para $\alpha > 0$.

5. Façamos $\Sigma a_\nu = A$. Para qualquer ϵ positivo, $|s_n - A| < \epsilon$ se n fôr maior do que um determinado m. Escrevemos

$$\frac{s_1 + \ldots + s_N}{N} = \frac{s_1 + \ldots + s_m}{N} + \frac{N-m}{N}\,\frac{s_{m+1} + \ldots + s_N}{N-m}$$

e deixemos $N \to \infty$.

6. Sim. 7. Não.

§ 2, pág. 382.

1. Convergente.

2. Demonstremos, primeiramente, que $n!/n^n \leqq 2/n^2$, quando $n > 2$; convergente.

3. Divergente. 4. Cap. III, § 9, pág. 189, divergente.

5. Note-se que $(\log n)^{\log n} = n^{\log(\log n)}$ e $\log(\log n) > 2$ quando n é suficientemente grande: convergente.

6. Convergente. 7. $1/(n+1)^{\nu}$.

8. $$\text{Êrro} = \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \ldots\right]$$
$$< \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots\right]$$
$$< \frac{1}{(n+1)!}\,\frac{1}{1-\dfrac{1}{n+1}} < \frac{1}{n.n!}.$$

9. $$\text{Êrro} = \frac{1}{(n+1)^{n+1}} + \frac{1}{(n+2)^{n+2}} + \ldots$$
$$< \frac{1}{(n+1)^{n+1}} + \frac{1}{(n+1)^{n+2}} + \frac{1}{(n+1)^{n+3}} + \ldots < \frac{1}{n(n+1)^n}.$$

10. $\text{Êrro} = \dfrac{n+1}{2^{n+1}} + \dfrac{n+2}{2^{n+2}} + \ldots$. Para $n > 1$,

$$n + 2 < {}^3/_2(n+1), \quad n + 3 < {}^3/_2(n+2) < ({}^3/_2)^2(n+1), \ \ldots;$$

logo,

$$\text{Êrro} < \frac{n+1}{2^{n+1}}\left[1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \ldots\right] < \frac{n+1}{2^{n-1}}.$$

12. Convergente. **13.** Comparar com $\int \frac{dx}{x(\log x)^{\alpha}}$.

14. Comparar com $\int \frac{dx}{x \log x (\log \log x)^{\alpha}}$.

16. Empregue-se a desigualdade de Schwarz.

17. $1 + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \ldots - \frac{2}{3n+3} = \sum_{\nu=1}^{3n+3} \frac{1}{\nu} - 3 \sum_{\nu=1}^{n+1} \frac{1}{3\nu} = \sum_{\nu=n+2}^{3n} \frac{1}{\nu}$;

empregando-se, então, a fórmula da pág. 381,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = \log n + C + \epsilon_n,$$

em que $\lim_{n \to \infty} \epsilon_n = 0$.

18. Efetuemos a soma desde $\nu = 1$ até $\nu = mn$:

$$\sum_{\nu=1}^{mn} \frac{\alpha_\nu n}{\nu} = \sum_{\nu \neq kn} \frac{1}{\nu} - \sum_{\nu = kn} \frac{n-1}{\nu} = \sum_{\nu=1}^{mn} \frac{1}{\nu} - \sum_{k=1}^{m} \frac{n}{kn} = \sum_{\nu=m+1}^{mn} \frac{1}{\nu}.$$

§ § 3, 4, pág. 397.

3. (*a*) $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 \text{ se } x = 0 \\ 1 \text{ se } x \neq 0. \end{cases}$

(*b*) $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 \text{ se } x = 0 \\ 1 \text{ se } x \neq 0 \end{cases} \quad (\alpha > 0).$

A convergência não é uniforme, e $\lim_{n \to \infty} \int_{-1}^{1} f_n(x)\, dx = \int_{-1}^{1} \lim_{n \to \infty} f_n(x)\, dx$.

4. $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 \text{ se } |x| < 1 \\ \tfrac{1}{2} \text{ se } |x| = 1 \\ 1 \text{ se } |x| > 1. \end{cases}$

9. Consideremos $\lim_{n \to \infty} \sqrt[2n]{1 - x^{2n}}$ para $-1 < x < +1$ e $\lim_{n \to \infty} \sqrt[2n]{1 - y^{2n}}$ para $-1 < y < +1$.

10. Seja $\epsilon > 0$. Dividamos o intervalo pelos pontos $x_0 = a, x_1, \ldots, x_m = b$ em subintervalos de comprimento menor do que $\epsilon/3M$. Para cada ponto x_i podemos determinar um n_i tão grande que $|f_n(x_i) - f_m(x_i)| < \epsilon/3$ quando n e $m > n_i$. Seja N o maior dos $n_0, n_1, \ldots, n_m$. Podemos, então, demonstrar pelo teorema do valor médio que a desigualdade $|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$ se verificará em cada subintervalo, desde que n e $m > N$.

§ § 5, 6, pág. 409.

Nota para os exemplos 1-20: Na maioria dêstes problemas, o critério da razão é eficaz; entretanto, para os exemplos 12-15, é preferível o da raiz.

1. $|x| < 1$. **2.** $|x| < 1$. **3.** $|x| < 1$.
4. $|x| < 1$. **5.** $|x| < 1$. **6.** $-\infty < x < +\infty$.

7. $|x| < 1$.
8. $|x| < 1$.
9. $|x| < 1$.
10. $|x| < 1$.
11. $|x| < 1$.
12. $|x| < 1/a$.
13. $|x| < 1$.
14. $|x| < 1$.
15. $-\infty < x < +\infty$.
16. $|x| < 4$.
17. $|x| < 1$.
18. $|x| < 1$ ou a, que é sempre o maior
19. $|x| < 1$.
20. Note-se que $1/n^{1+1/n}$ fica entre n^{-1} e n^{-2}; $|x| < 1$.
21. $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \dfrac{(\log a)^{\nu}}{\nu!} x^{\nu}$.
22. $-\dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{3} - \dfrac{x^2}{4} - \ldots - \dfrac{x^n}{n+2} - \ldots = -\dfrac{1}{x^2} \sum\limits_{\nu=2}^{\infty} \dfrac{x^{\nu}}{\nu}$.
23. Escrevamos $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x$; $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{\nu-1} 2^{2\nu-1}}{(2\nu)!} x^{2\nu}$.
24. $1 + \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{\nu} 2^{2\nu-1}}{(2\nu)!} x^{2\nu}$.
25. $\sum\limits_{\nu=3}^{\infty} \dfrac{(-1)^{\nu-1}(2x)^{2\nu}}{32(2\nu)!} (15 + 3^{2\nu} - 6.2^{2\nu})$.
26. $x^3 + \dfrac{1}{2}\dfrac{x^9}{3} + \dfrac{1.3}{2.4}\dfrac{x^{15}}{5} + \ldots = x^3 + \sum\limits_{\nu=2}^{\infty} \dfrac{(x^3)^{2\nu-1}}{2\nu-1} \cdot \dfrac{1.3\ldots(2\nu-3)}{2.4\ldots(2\nu-2)}$.
27. 1,414 2.
28. (a) $1 - \dfrac{1}{3.3!} + \dfrac{1}{5.5!} - \dfrac{1}{7.7!} + - \ldots$.

    (b) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{320} + \dfrac{1}{3.2^{12}} + \ldots$.

    (c) $1 - \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} - \dfrac{1}{4^2} + \dfrac{1}{5^2} - + \ldots$.

    (d) Façamos $x = 1/t$; $\dfrac{1}{10} - \dfrac{2^5 - 1}{10^6} + \dfrac{2^9 - 1}{24.10^9} - + \ldots$.
29. (a) $x + x^2 + \dfrac{x^3}{3}$.
    (b) $x^2 - x^3 + \dfrac{11x^4}{12}$.

    (c) $x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{13x^3}{24} + \dfrac{19x^4}{48}$.
    (d) $x^2 - \dfrac{x^4}{3}$.
31. $|x| < \rho$.
32. $f(x) = 4e^x - x - 1$.

Apêndice, pág. 423.

1. Interrompamos a série no têrmo de ordem n. Teremos, então,

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{2.4}x^2 + \frac{1.3}{2.4.6}x^3 + \ldots + \frac{1.3\ldots(2n-3)}{2.4\ldots2n}x^n < 1 - \sqrt{1-x} \leqq 1.$$

Façamos $x = 1$; tôdas as somas parciais $\leqq 1$.

2. Empreguemos a série do exemplo 1. Mostremos que o maior êrro ocorre quando $x = 1$, e que pode ser tornado menor do que ϵ.

3. Escrevamos $|t| = \sqrt{t^2} = \sqrt{1 - (1 - t^2)}$: façamos, então, $x = 1 - t^2$ no ex. 2.

4. A substituição $x = a + (b - a)t$ transforma a função $f(x)$ em $\varphi(t)$, $0 \leqq t \leqq 1$. Aproximar para $\varphi(t)$ por uma função poligonal $\psi(t)$ a menos de $\epsilon/2$ (exemplo 2, pág. 70). Representar $\psi(t)$ por uma soma da forma $a + bt + \Sigma c_i \,|\, t - t_0 \,|$. Aproximar-se desta expressão por meio de um polinômio (exemplo 3) e substituir t pelo seu valor em função de x.

7. Se houvesse apenas um número finito de números primos, a identidade seria válida para qualquer s positivo, particularmente para $s = 1$. (Multiplicação das séries absolutamente convergentes.)

8. Demonstre-se, em primeiro lugar, por indução, que

$$(1 - x) \prod_{\nu=0}^{n-1} (1 + x^{2^\nu}) = 1 - x^{2^n}.$$

CAPÍTULO IX

§ § 1, 2, pág. 437.

3. $\sum\limits_{\nu=0}^{n} \operatorname{sen} \nu\alpha$ = parte imaginária de $\sum\limits_{\nu=0}^{n} e^{i\nu\alpha}$; $\operatorname{sen}\left(\frac{n+1}{2}\right)\alpha \operatorname{sen} \frac{n}{2}\alpha / \operatorname{sen} \frac{1}{2}\alpha$.

4. Empregue-se a fórmula $\sigma_n(\alpha) = \frac{1}{2}(1 - e^{i\alpha})^{-1}(e^{-in\alpha} - e^{(n+1)i\alpha})$ na pág. 436.

5. Calculemos $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sigma_k(\alpha)\, d\alpha$, e então empreguemos a expressão para $s_m(\alpha)$ em função de $\sigma_k(\alpha)$.

§ § 3, 4, pág. 446.

1. (a) $\dfrac{e^{a\pi} - e^{-a\pi}}{\pi}\left[\dfrac{1}{2a} + \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^\nu}{a^2 + \nu^2}(a \cos \nu x - \nu \operatorname{sen} \nu x)\right]$.

(b) $\dfrac{8}{15}\pi^4 - 48 \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^\nu}{\nu^4} \cos \nu x$.

(c) $\dfrac{\operatorname{sen} a\pi}{a} \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu \nu \left[\dfrac{1}{\nu^2 - (a+1)^2} + \dfrac{1}{\nu^2 - (a-1)^2} - \dfrac{2}{\nu^2 - a^2}\right] \operatorname{sen} \nu x$,

se a não fôr inteiro; $\frac{1}{2} \operatorname{sen}(a - 1)x + \operatorname{sen} ax + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(a + 1)x$ se a fôr inteiro.

(d) $\dfrac{b - a}{2\pi} + \dfrac{1}{\pi} \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \left(\dfrac{\operatorname{sen} \nu b - \operatorname{sen} \nu a}{\nu} \cos \nu x - \dfrac{\cos \nu b - \cos \nu a}{\nu} \operatorname{sen} \nu x\right)$.

2. Apliquemos a transformação $x = -\pi + 2\pi t$ ao § 4, n.° 2, pág. 440.

3. $B_2(t) = t^2 - t + {}^1/_6$; $B_3(t) = t^3 - {}^3/_2 t^2 + {}^1/_2 t$; $B_4(t) = t^4 - 2t^3 + t^2 - {}^1/_{30}$.

4. $B_1(t)$ já foi dada no exemplo 2. Os outros desenvolvimentos são obtidos por integração sucessiva por (b) da definição do exemplo 3. Pode-se provar que as constantes de integração são iguais a zero.

5. Nos resultados para $B_2(t)$ e $B_4(t)$ dos exemplos 3 e 4, fazendo-se $t = 0$.

6. Nos resultados para $B_3(t)$ dos exemplos 3 e 4, fazendo-se $t = 1/4$.

8. $\cos \pi x = \prod_{\nu=1}^{\infty}\left[1 - \dfrac{x^2}{(\nu + \frac{1}{2})^2}\right]$.

CAPÍTULO X

§ 2, pág. 465.

3. (*a*) Descontínua sôbre a linha $x = 0$; (*b*) descontínua para $x = y = 0$; (*c*) descontínua na linha $x = -y$; (*d*) descontínua para $y = -x^2$.

§ 3, pág. 472.

1. (*a*) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{2x}{3\sqrt{(x^2 + y^2)^2}}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{2y}{3\sqrt[3]{(x^2 + y^2)^2}}$.

(*b*) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x \cos (x^2 - y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -\cos (x^2 - y)$.

(*c*) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = e^{x-y}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -e^{x-y}$.

(*d*) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = -\dfrac{1}{2\sqrt{(1 + x + y^2 + z^2)^3}}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -\dfrac{y}{\sqrt{(1 + x + y^2 + z^2)^3}}$

$\dfrac{\partial f}{\partial z} = \dfrac{-z}{\sqrt{(1 + x + y^2 + z^2)^3}}$.

(*e*) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = yz \cos(xz)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \operatorname{sen} (xz)$, $\dfrac{\partial f}{\partial z} = xy \cos (xz)$.

(*f*) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{x}{1 + x^2 + y^2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{y}{1 + x^2 + y^2}$.

2. (*a*) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = y$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = x$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1$.

(*b*) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{1}{x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\dfrac{1}{x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\dfrac{1}{y^2}$

(*c*) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{1 + y^2}{(1 - xy)^2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1 + x^2}{(1 - xy)^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{2(1 + y^2)y}{(1 - xy)^3}$,

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{2(x + y)}{(1 - xy)^3}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{2(1 + x^2)x}{(1 - xy)^3}$.

(*d*) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = yx^{y-1}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = x^y \log x$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y(y - 1)x^{y-2}$,

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = x^{y-1}(1 + y \log x)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^y (\log x)^2$.

(e) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = yx^{y-1}e^{(x^y)}, \quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = x^y \log [xe^{(x^y)}],$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = yx^{y-2}e^{(x^y)}(yx^y + y - 1),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = x^{y-1}e^{(x^y)}(1 + y \log x + yx^y \log x),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^y (\log x)^2 e^{(x^y)}(1 + x^y).$$

3. Derivar $\varphi(x^2 + y^2) = \psi(x)\psi(y)$ parcialmente, em relação a x e a y. Eliminar $\varphi'(x^2 + y^2)$, fazer $y = 1$, e resolver a equação diferencial resultante: $f(x, y) = ae^{b(x^2+y^2)}$.

§ 4, pág. 479.

1. (a) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = -\dfrac{x + y \cos z}{\sqrt{(x^2 + y^2 + 2xy \cos z)^3}}, \quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = -\dfrac{y + x \cos z}{\sqrt{(x^2 + y^2 + 2xy \cos z)^3}},$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{xy \operatorname{sen} z}{\sqrt{(x^2 + y^2 + 2xy \cos z)^3}};$$

(b) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{1}{\sqrt{z^2 + 2zy^2 + y^4 - x^2}}, \quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = -\dfrac{2xy}{(z + y^2)\sqrt{z^2 + 2zy^2 + y^4 - x^2}},$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{x}{(z + y^2)\sqrt{z^2 + 2zy^2 + y^4 - x^2}};$$

(c) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x\left(1 + \dfrac{y}{1 + x^2 + y^2 + z^2}\right),$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \log(1 + x^2 + y^2 + z^2) + \frac{2y^2}{1 + x^2 + y^2 + z^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{2yz}{1 + x^2 + y^2 + z^2};$$

(d) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{1}{2(1 + x + yz)\sqrt{x + yz}}, \quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{z}{2(1 + x + yz)\sqrt{x + yz}},$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{y}{2(1 + x + yz)\sqrt{x + yz}}.$$

2. (a) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = x^{(x^x)}x^x\left[\log x + (\log x)^2 + \dfrac{1}{x}\right]$; (b) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{1}{x^{3+1/x^2}}(2 \log x - 1).$

5. $z_x = 3$, $z_y = 1$; $z_r = z_x \cos\theta + z_y \operatorname{sen}\theta$, $z_\theta = -z_x r \operatorname{sen}\theta + z_y r \cos\theta$.

7. (a) $ad - bc$; (b) $1/r$; (c) $4xy$.

§ 5, pág. 485.

2. (a) $-\dfrac{5}{4}$; (b) $-\dfrac{\pi}{2}$; (c) -1; (d) -1.

3. (*a*) $-\frac{21}{32}$; (*b*) π; (*c*) 2; (*d*) $-\frac{19}{3}$.

4. Valor máximo 6, valor mínimo -6. **5.** $\partial z/\partial x = -1$, $\partial z/\partial y = -1$.

§ 6, pág. 499.

1. (*a*) $a^2b^2(a^2 - b^2)/8$; (*b*) -4; (*c*) $\log 2$; (*d*) $e^{ab}/b - 1/b - a$;
(*e*) $\pi/16$; (*f*) $4/3$.

2. 2π.

3. Utilize-se da simetria da figura: 1/16 do volume fica acima do triângulo com vértices (0, 0), (1, 0), (1, 1), e abaixo da superfície $x^2 + z^2 = 1$; 16/3.

4. $\frac{1}{3}\pi(r - h)^2(2r + h)$.

	Área	Centro de gravidade	Momento em relação ao eixo dos x	Momento em relação ao eixo dos y	Momento de inércia em relação ao eixo dos x	Momento de inércia em relação ao eixo dos y
5. (*a*)	$\frac{1}{2}r^2$	$(0, 4r/3\pi)$	$\frac{2}{3}r^3$	0	$\pi r^4/8$	$\pi r^4/8$
(*b*)	ab	$(\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}b)$	$\frac{1}{2}ab^2$	$\frac{1}{2}a^2b$	$\frac{1}{3}ab^3$	$\frac{1}{3}a^3b$
(*c*)	$4ab$	(0, 0)	0	0	$4ab^3/3$	$4a^3b/3$
(*d*)	πab	(0, 0)	0	0	$\pi ab^3/4$	$\pi a^3b/4$
(*e*)	$\frac{1}{2}ab$	$(\frac{1}{3}a, \frac{1}{3}b)$	$\frac{1}{6}ab^2$	$\frac{1}{6}a^2b$	$ab^3/12$	$a^3b/12$

	Volume	Centro de gravidade	Momento de inércia em relação ao eixo dos x	Momento de inércia em relação ao eixo dos y	Momento de inércia em relação ao eixo dos z
6. (*a*)	abc	$(\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}b, \frac{1}{2}c)$	$\frac{1}{3}abc(b^2+c^2)$	$\frac{1}{3}abc(c^2+a^2)$	$\frac{1}{3}abc(a^2+b^2)$
(*b*)	$\frac{2}{3}\pi a^3$	$(0, 0, 3a/8)$	$4\pi a^5/15$	$4\pi a^5/15$	$4\pi a^5/15$
(*c*)	$\frac{1}{6}abc$	$(\frac{1}{4}a, \frac{1}{4}b, \frac{1}{4}c)$	$abc(b^2+c^2)/60$	$abc(c^2+a^2)/60$	$abc(a^2+b^2)/60$

CAPÍTULO XI

§ 2, pág. 509.

1. $c_1e^t + c_2e^{2t}$; $e^{2t} - e^t$.

2. $c_1e^{-t} + c_2e^{-2t}$; $e^{-t} - e^{-2t}$.

3. $c_1e^{1/2t} + c_2e^{-t}$; $\frac{2}{3}(e^{1/3t} - e^{-t})$.

4. $c_1e^{-2t} + c_2te^{-2t}$; te^{-2t}.

5. $c_1e^{-1/2t} + c_2te^{-1/2t}$; $te^{-1/2t}$.

6. $e^{-1/2t}\left(c_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + c_2 \operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) = ae^{-1/2t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}(t - \delta)$;
$\frac{2}{\sqrt{3}}e^{-1/2t}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}t$; $\nu = \sqrt{3/2}$, $T = 4\pi/\sqrt{3}$, $a = 2/\sqrt{3}$, $\delta = \pi/\sqrt{3}$.

7. $\sqrt{2}e^{-1/2t}\cos\frac{1}{2}(t + \frac{1}{2}\pi)$; $a = \sqrt{2}$, $\delta = -\pi/2$, $\nu = \frac{1}{2}$.

§ 3, pág. 519.

1. $-\dfrac{e^{-t}}{1+\omega^2} + \dfrac{2e^{-2t}}{4+\omega^2} + \dfrac{(2-\omega^2)\cos \omega t + 3\omega \operatorname{sen} \omega t}{(1+\omega^2)(4+\omega^2)}$;

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{(1+\omega^2)(4+\omega^2)}}, \quad \operatorname{tg} \omega\delta = \frac{3\omega}{2-\omega^2}, \quad \omega = 0.$$

2. $\dfrac{e^{-1/2t}\left[(\omega^2-1)\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}t - \dfrac{1}{\sqrt{3}}(\omega^2+1)\operatorname{sen}\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right]}{1-\omega^2+\omega^4}$

$$+ \frac{(1-\omega^2)\cos \omega t + \omega \operatorname{sen} \omega t}{1-\omega^2+\omega^4};$$

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-\omega^2+\omega^4}}, \quad \operatorname{tg} \omega\delta = \frac{\omega}{1-\omega^2}, \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

3. $\dfrac{e^{-1/2t}\left[\omega\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}t + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\omega(2\omega^2-1)\operatorname{sen}\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right]}{1-\omega^2+\omega^4}$

$$+ \frac{(1-\omega^2)\operatorname{sen} \omega t - \omega \cos \omega t}{1-\omega^2+\omega^4};$$

α, $\operatorname{tg} \omega\delta$, ω como no exemplo **2.**

4. $\dfrac{-e^{-1/2t}[(1-2\omega^2)\cos \frac{1}{2}t + (1+2\omega^2)\operatorname{sen} \frac{1}{2}t]}{1+4\omega^4}$

$$+ \frac{(1-2\omega^2)\cos \omega t + 2\omega \operatorname{sen} \omega t}{1+4\omega^4};$$

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+4\omega^4}} \operatorname{tg} \omega\delta = \frac{2\omega}{1-2\omega^2}, \quad \omega = 0.$$

5. $e^{-2t}\left[\dfrac{(\omega^3+4)^2}{\omega^2-4} - \dfrac{2t}{\omega^2+4}\right] + \dfrac{(4-\omega^2)\cos \omega t + 4\omega \operatorname{sen} \omega t}{(\omega^2+4)^2}$.

§ 4, pág. 527.

1. $\log(1+y^2)(y+\sqrt{y^2+1}) + 2(1+x)^{-1/2} = c$
2. $(y^3 - 2x^3)/y = c$.
3. $\log y - \displaystyle\int^{x/y} \frac{v\,dv}{\log v - v^2} = c$.
4. $1/y = \log x + 1 + cx$.
5. $x = \operatorname{arc\,tg} y - 1 + ce^{-\operatorname{arc\,tg} y}$.
6. $y^2 = \operatorname{sen} x - \cos x + ce^{-x}$.
7. $cy^2 = e^{xy - 1/xy}$.
8. $y^2 = x - 2 + ce^{-x}$.
9. $\cos x . \cos y = c$.

10. $ye^{x/y} + x = c$.

11. $x = c_1e^t + c_2te^t + c_3t^2e^t$.

12. $x = c_1e^{3t} + c_2te^{3t} + c_3$.

13. $y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + c_3x \cos x + c_4x \operatorname{sen} x$.

14. $y = c_1 + c_2e^{-x} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + c_3e^{-x} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}}{2}x$.

15. $y = c_1e^x + c_2xe^x + c_3e^{-x} + c_4xe^{-x}$
$\quad + c_5 \cos x + c_6 \operatorname{sen} x + c_7x \operatorname{sen} x + c_8x \cos x$.

16. $y = c_1 + c_2e^{x/a}$.

17. $e^{-y} = c_1 \sec(x + c_2)$.

18. $y = c_1 + c_2x + c_3e^x + c_4e^{-x}$.

19. $y = c_1 \operatorname{arc\,tg} x + c_2$.

20. $x = \int^y \frac{dy}{2 \log |y - 1| + c_1} + c_2$.

21. $x = -1/(c_1t + c_2)$.

22. $s = (\operatorname{arc\,sen} t)^2 + c_1 \operatorname{arc\,sen} t + c_2$.

23. $t + c_2 = \frac{1}{c_1} \sqrt{c_1s^2 - 2ks} - \frac{2k}{c_1} \operatorname{arc\,sen} \sqrt{\frac{c_1s}{2k}}$.

EXEMPLOS DIVERSOS

CAPÍTULO I

1. Empregar o § 5, n.º 7 (pág. 34).

2. $39 = 1\cdot 3^3 + 1\cdot 3^2 + 1\cdot 3 + 0$, logo, a resposta pedida é 1 110.

3. (*a*) 10 011 100; (*b*) 2 130.

4. (*a*) 758; (*b*) 5 954; (*c*) 10 000; (*d*) 0,2; (*e*) 0,023; (*f*) 0,249 7.

5. (*a*) $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$; (*b*) 2,65

6. (*a*) $x \leqq \dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}$, $x \geqq \dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$

(*b*) Todos os valores de x.

(*c*) $x \leqq -3-2\sqrt{2}$; $-3+2\sqrt{2} \leqq x \leqq 3-2\sqrt{2}$; $x \geqq 3+2\sqrt{2}$.

(*d*) $x \geqq -2$

7. Elevem-se ao quadrado ambos os membros. Sòmente haverá igualdade se $a = b$

8. Empregar o exemplo 7 Sòmente haverá igualdade, se $a = b$.

9. Somem-se as três desigualdades $a^2 + b^2 \geqq 2ab$, $b^2 + c^2 \geqq 2bc$, $c^2 + a^2 \geqq 2ca$.

(*b*) Multipliquem-se as três desigualdades

$$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}, \quad \frac{b+c}{2} \geqq \sqrt{bc}, \quad \frac{c+a}{2} \geqq \sqrt{ca}.$$

(*c*) Somem-se desigualdades do tipo $a^2b^2 + b^2c^2 \geqq 2b^2ac$.

10. Aplique-se a desigualdade de Schwarz aos números x_1, x_2, x_3 e 1, 1, 1.

11. Obtemos, da relação $(a_i - a_j)(b_i - b_j) \geqq 0$, a seguinte soma

$$a_ib_i + a_jb_j \geqq a_ib_j + a_jb_i$$

para todos os valores inteiros de i e j, desde 1 até n.

12. (*a*) Desenvolver $(1-1)^n$ pelo teorema do binômio.

(*e*) Desenvolver e reunir os têrmos em x^n da identidade $(1+x)^n(1+x)^n = (1+x)^{2n}$.

14. $n^2(n+1)^2/4$.

15. (*a*) Escrever $\dfrac{1}{\nu(\nu+1)(\nu+2)} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{\nu(\nu+1)} - \dfrac{1}{(\nu+1)(\nu+2)}\right]$ e somar desde $\nu = 1$ até n; $\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2n(n+1)}$;

(*b*) $\dfrac{n(3n+5)}{2(n+1)(n+2)}$; (*c*) $\dfrac{7n^2+21n+8}{36(n+1)(n+2)}$.

16. (*a*) $\frac{1}{2}(n^2 - n + 2)$; (*b*) $\frac{1}{6}(5n^3 - 18n^2 + n - 30)$.

17. (*a*) $n(n^2 + 5)/6$; (*b*) $n(n - 5)(5n^2 + 11n + 26)/24$.

18. Admitindo-se a veracidade do teorema para $n = m$, multiplicá-lo por $(a+b)$, obtendo-o para $n = m + 1$. Verificar o teorema para $n = 1, 2$.

19. (*a*) 1; (*b*) $\frac{1}{4}$; (*c*) ∞.

25. (*c*) Se $m > n$, $|a_m - a_n| = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \ldots + \frac{1}{m!}$

$$= \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \ldots + \frac{1}{(n+2)\ldots m}\right]$$

$$< \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+1)^{m-n-1}}\right]$$

$$< \frac{1}{(n+1)!}\,\frac{1}{1 - \dfrac{1}{n+1}} < \frac{1}{n\,.\,n!}$$

(*d*) O mesmo que (*c*).

26. Seja $c_n = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{\nu!}$, $d_n = \sum_{\tau=0}^{n} \frac{(-1)^\tau}{\tau!}$.

$c_n d_n = \sum_{\nu,\,\tau=0}^{n} \frac{(-1)^\tau}{\tau!\,\nu!}$, e fazendo $\tau + \nu = \mu$, teremos

$$c_n d_n = \sum_{\mu=n+1}^{2n} \sum_{\tau=0}^{n} \frac{(-1)^\tau}{\tau!\,(\mu-\tau)!} + \sum_{\mu=0}^{n} \sum_{\tau=0}^{\mu} \frac{(-1)^\tau}{\tau!\,(\mu-\tau)!}.$$

Agora, $\sum_{\tau=0}^{\mu} \frac{(-1)^\tau}{\tau!\,(\mu-\tau)!} = 0$ se $\mu > 0$, de sorte que

$$\left|c_n d_n - 1\right| = \left|\sum_{\mu=n+1}^{2n} \sum_{\tau=0}^{n} \frac{(-1)^\tau}{\tau!\,(\mu-\tau)!}\right| < \sum_{\mu=n+1}^{2n} \frac{2^\mu}{\mu!}.$$

$$< \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\left[1 + \frac{2}{n+1} + \frac{2^2}{(n+1)^2} + \ldots\right]$$

$$< \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\;\frac{1}{1 - \dfrac{2}{n+1}} < \frac{2^{n+1}}{(n-1)\,.\,n!}.$$

Desde que $\frac{2^n}{n!} \to 0$ quando $n \to \infty$, $c_n d_n \to 1$ e $\lim_{n\to\infty} d_n = \frac{1}{e}$.

27. (*a*) A seqüência é monòtonamente crescente sendo limitada superiormente por 2, visto que, se $a_n < 2$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} < \sqrt{4} < 2$.

(*b*) Seja $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Empreguemos a relação $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ para obtermos $a = \sqrt{2 + a}$ ou $a = 2$.

33. (*a*) 1; (*b*) 1; (*c*) $1/e$.

35. (*a*) $\frac{1}{11}$; (*b*) $\frac{1}{1001}$; (*c*) $\frac{\epsilon}{1+\epsilon}$.

36. (*a*) $4\epsilon/(1+2\epsilon)$; (*b*) $\epsilon/7$; (*c*) $\text{arc cos}\,(1-\epsilon)$.

39. Utilize-se o fato de que se x fôr racional, $n!x$ será um inteiro positivo para todos os valores suficientemente grandes de n.

40. (*a*) Contínua; (*b*) Descontínua em $x = 0$; (*c*) Descontínua em $x = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; (*d*) Descontínua para todos os valores de x.

42. Sim; considerem-se os sinais em $x = 0$ e em $x = \pi/5$.

44 Seja ϵ uma quantidade arbitrária qualquer. Teremos $|f(x') - f(x'')| < \epsilon$ desde que, ùnicamente, $|x' - x''| < \delta$. Em particular, $|f(x') - f(x'')| < \epsilon$ se $|x' - a| < \delta$, que é o critério de convergência de Cauchy.

45. (*a*) $(x^2 + y^2 - bx)^2 = a^2(x^2 + y^2)$.
(*b*) $3x^2 - 4x - 4 + 4y^2 = 0$.
(*c*) $x^2 = y^2(2a - x)$.
(*d*) $x^2 + y^2 = 3axy$.

47. (*a*) Círculo com o centro em $-\dfrac{5}{3}i$ e raio $\dfrac{4}{3}$.

(*b*) Se $k > 1$, círculo com centro em $-\dfrac{1}{k^2-1}\alpha + \dfrac{k^2}{k^2-1}\beta$ e raio $\dfrac{k^2}{k^2-1}|\beta - \alpha|$; se $k < 1$, permuta-se α e β; se $k = 1$, a bissetriz perpendicular à linha que une α, β.
(*c*) Consideram-se as três possibilidades: $k < 1$, $= 1$, > 1.

48. A "desigualdade triangular": a soma de dois lados de um triângulo é maior do que o terceiro lado

49. A soma dos quadrados das diagonais de um paralelogramo é igual à soma dos quadrados de todos os lados.

CAPÍTULO II

52. $\text{sen}\,\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x}$.

53. $f'(x) = (1+2x)\,\text{sen}\,\dfrac{1}{x} - \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)\cos\dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$; $f'(0)$ não existe, mas o quociente das diferenças $\dfrac{f(x) - f(0)}{x}$ tem os limites superior e inferior, respectivamente, $+1$ e -1, à medida que $x \to 0$.

54. $f''(x) = \left(\dfrac{2}{x^3} - \dfrac{1}{x}\right)\text{sen}\,x - \dfrac{2}{x^2}\cos x$, $x \neq 0$; $f''(0) = -\dfrac{1}{3}$.

55. Empregue-se o teorema do valor médio.

56. Empregue-se o teorema do valor médio.

57. Considere-se $\varphi(x) = [f(x+h) - f(x)]/h$. Provar que esta expressão assume valores acima e abaixo de μ, para valores de h pequenos (fixos); logo, verificar-se-á $\varphi(x) = \mu$ para algum valor de x. Empregue-se, então, o teorema do valor médio.

58. Determina-se a equação da tangente $y = g(x)$ e aplica-se o teorema do valor médio a $f'(x) - g'(x)$, usando-se o resultado do exemplo n.º 55.

59. Estabelece-se a equação da corda que liga os pontos $x = x_1$, $x = x_2$ da curva, $y = g(x)$; considera-se, então, $h(x) = f(x) - g(x)$, $h''(x) = f''(x) \geqq 0$. Se $h(x) > 0$ em algum ponto do intervalo $x_1 \leqq x \leqq x_2$, haverá um ponto ξ com $h'(\xi) = 0$ e $h(\xi) < 0$; empregue-se, então, o exemplo n.º 58.

60. Utilize-se o exemplo n.º 59.

61. 0,006.

62. (*a*) $\frac{1}{2}x^{-1/2}$; (*b*) $\sec^2 x$.

63. Emprega-se o exemplo n.º 62. (*a*) 2; (*b*) 1.

66. Seja $\mu = \dfrac{1}{a}\displaystyle\int_0^a u(t)\,dt$. Determina-se a equação $y = g(x)$ da tangente à curva $y = f(x)$ no ponto $x = \mu$. Ter-se-á $f(x) \geqq g(x)$ para todos os valores de x (exemplo n.º 58). Façamos $x = u(t)$ e integremos.

67. Suponhamos que a aceleração é menor do que 4 em qualquer posição. Neste caso, $v < 4t$, e semelhantemente, $v < 4 - 4t$. A distância percorrida, $s = \displaystyle\int_0^1 v\,dt$ é, então, menor do que 1.

CAPÍTULO III

68. (*a*) $\left(\dfrac{2\,\mathrm{tg}\,x}{\cos^2 x} + \cot x\right) e^{\mathrm{tg}^2 x + \log \mathrm{sen}\, x}$.

(*b*) $4(x+2)^3(x^2+1)^{5/7}\sqrt[3]{1-x^2} - \dfrac{2x}{3\sqrt[3]{(1-x^2)^2}}(x+2)^4(x^2+1)^{5/7}$
$+ {}^{10}/_{7}\,x(x^2+1)^{-2/7}(x+2)^4\sqrt[3]{1-x^2}$.

(*c*) $-x \,\mathrm{sen}\, x + \cos x + 3x^2 \,\mathrm{sen}\, x + x^3 \cos x - \dfrac{3x^2}{\mathrm{sen}\, x} + \dfrac{x^3 \cos x}{\mathrm{sen}^2 x}$.

6. O denominador não deve anular-se para valor algum, real, de x. Igualmente, o numerador da derivada não deve anular-se. As condições são: $ac - b^2 > 0$, $a > 0$, $\alpha b - a\beta = 0$, $\alpha \neq 0$, ou $a = b = 0$, $\alpha \neq 0$, $c \neq 0$.

70. Máximo para $x = -1/e$, mínimo para $x = 1/e$, inflexões nos pontos $(0, 1)$ e $(2 + \log x^2)^2 + 2/x = 0$.

74. Seja T um triângulo de área dada e menor perímetro, sendo b um dos seus lados. Fixando-se b, T será o triângulo de base dada b e com área estabelecida, com o menor perímetro. Logo, T será isósceles, com os dois lados diferentes de b, iguais entre si. Mas, b é qualquer lado, de sorte que o triângulo T é eqüilateral.

Analìticamente, basta considerar sòmente o caso do triângulo isósceles. Sejam as coordenadas dos vértices $(-x)$, 0, $(x, 0)$ e $\left(0, \frac{A}{x}\right)$; o perímetro será, portanto, $2x + \frac{2}{x}\sqrt{x^4 + A^2}$. Iguala-se a primeira derivada a zero estabelecendo, então, a segunda derivada.

75. Em face do exemplo 71, considerem-se apenas triângulos isósceles.

76. Em vista do exemplo 72, considerem-se sòmente os triângulos isósceles.

77. (*a*) A derivada de $(1 + x)e^x$ é sempre positiva para $x \geqq 0$. O mínimo para $x \geqq 0$ se dá quando $x = 0$, a saber, 1; (*b*) integra-se (*a*) desde 0 até x; (*c*) integra-se (*b*) desde 0 até x.

78. Seja $f(\theta) = \frac{[\theta a^p + (1 - \theta)b^p]^{1/p}}{[\theta a^q + (1 - \theta)b^q]^{1/q}}$; teremos $f(0) = f(1) = 1$. Determinar $f'(\theta)$ e mostrar que tanto $f'(\theta) \equiv 0$ como $f'(\theta) = 0$ se verificam para um único valor de θ no intervalo de 0 a 1. No último caso, mostrar que $f(\theta)$ nunca é igual a 1, visto que $0 < \theta < 1$. Calcula-se, então, $f'(0)$ que é igual, exceto para um fator positivo, a

$$b^q \frac{a^p - b^p}{p} - b^p \frac{a^q - b^q}{q} = \int_b^a b^p x^{p-1}(b^{q-p} - x^{q-p})\, dx,$$

que é negativo, salvo quando $a = b$. Portanto, $f(\theta) \leqq 1$.

79. O sinal de igualdade é válido sòmente quando $f'(0) = 0$, ou $a = b$.

82. Fazer com que $a^{-\theta}b^{\theta-1}[\theta a + (1 - \theta)b]$ seja um mínimo.

85. (*a*) Superior; (*b*) o mesmo; (*c*) inferior; (*d*) superior.

86. Integrar o primeiro membro, somar, e derivar novamente.

89. $\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(e^{x^2/2}) = \frac{d^n}{dx^n}(xe^{x^2/2}) = x\frac{d^n}{dx^n}(e^{x^2/2}) + n\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(e^{x^2/2})$ pela regra de Leibnitz.

90. Eliminar u_{n+1} de ambas as equações: $nu_{n-1} = u_n'$; derivar uma das equações, empregando esta relação.

91. $u_n(x) = x^n + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4}x^{n-4} + \dots$.

92. Aplicar a regra de Leibnitz a

(*a*) $\frac{d^{n+2}}{dx^{n+2}}(x^2 - 1)^{n+1} = \frac{d^{n+2}}{dx^{n+2}}[(x^2 - 1) \,.\, (x^2 - 1)^n]$;

(*b*) $\frac{d^{n+1}}{dx^{n+2}}(x^2 - 1)^{n+1} = \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}[2(n + 1)x \,.\, (x^2 - 1)^n]$.

(*c*) Igualar as duas expressões de P'_{n+1} em (*a*) e (*b*).

93. $P_n(x) = \frac{2(n)!}{2^n(n!)^2}\left[x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4.(2n-1)(2n-3)}x^{n-4} \dots\right]$.

94. O mesmo como no exemplo n.º 93.

95. Pelo teorema do binômio, $\sum_{n=0}^{p} \lambda_n(x) = (x + 1 - x)^p = 1$.

Também, derivando

$$(a + x)^p = \sum_{n=0}^{p} \binom{p}{n} a^{p-n} x^n$$

k vêzes, teremos:

$$\binom{p}{k}(a + x)^{p-k} = \sum_{n=k}^{p} \binom{p}{n} \binom{n}{k} a^{p-n} x^{n-k}.$$

Multiplicando por x^k e fazendo $a = 1 - x$, virá:

$$\binom{p}{k} x^k = \sum_{n=k}^{p} \binom{n}{k} \binom{p}{n} (1 - x)^{p-n} x^n = \sum_{n=k}^{p} \binom{n}{k} \lambda_{n,p}(x)$$

CAPÍTULO IV

96. $^{12}/_{13}\, x^{13/12} - {}^{6}/_{5}\, x^{5/6} + {}^{4}/_{3}\, x^{3/4} + {}^{12}/_{7}\, x^{7/12} - 2x^{1/2} - 3x^{1/3} + 4x^{1/4} + 12x^{1/12}$

$$- 2 \log (1 + x^{1/4}) - 4 \log (1 + x^{1/12}) - 4\sqrt{3} \operatorname{arc} \frac{2}{\sqrt{3}} (x^{1/12} - {}^{1}/_{2}).$$

97. $^{4}/_{7}(1 + e^x)^{7/4} - {}^{4}/_{3}(1 + e^x)^{3/4}$.

98. $-6 \sqrt[3]{(1 + x)^2} [{}^{1}/_{4} + {}^{1}/_{5} \sqrt[6]{1 + x} + {}^{1}/_{6} \sqrt[3]{1 + x} + {}^{1}/_{7} \sqrt{1 + x}$

$$+ {}^{1}/_{8} \sqrt[3]{(1 + x)^2} + {}^{1}/_{9} \sqrt[6]{(1 + x)^5}].$$

99. Façamos $x + \dfrac{1}{x} = t$: $\dfrac{1}{2} \log \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$.

100. $\dfrac{1}{n} \operatorname{arc} \cos \dfrac{1}{x^n}$.

101. $\dfrac{1}{n!}\left[\log x - \dbinom{n}{1} \log (x + 1) + \dbinom{n}{2} \log (x + 2) - + \ldots \right.$

$$\left. = \binom{n}{n} \log (x + n)\right].$$

102. $\dfrac{(n - 1)(n - 3)\ldots 1}{n(n - 2)\ldots 2} \cdot \dfrac{\pi}{2}$ se n fôr par; $\dfrac{(n - 1)(n - 3)\ldots 2}{n(n - 2)\ldots 3}$ se n fôr ímpar.

103 $2^{12}/(1 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 7 \,.\, 9 \,.\, 11 \,.\, 13)$.

104. $\dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \cdot \dfrac{\pi}{2}$.

105. $\dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n + 1)!}$.

106. $\pi/16$.

107. $\pi/32$.

108. $\displaystyle\int x^a (\log x)^m \, dx = \frac{x^{a+1} (\log x)^m}{a + 1} - \frac{m}{a + 1} \int x^a (\log x)^{m-1} \, dx.$

109. $\displaystyle\int x^n e^{ax} \operatorname{sen} bx \, dx = \frac{x^n e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \operatorname{sen} bx - b \cos bx)$

$$- \frac{an}{a^2 + b^2} \int x^{n-1} e^{ax} \operatorname{sen} bx \, dx + \frac{bn}{a^2 + b^2} \int x^{n-1} e^{ax} \cos bx \, dx.$$

110. $\displaystyle\int x^n e^{ax} \cos bx\, dx = \frac{x^n e^{ax}}{a^2+b^2}(a \cos bx + b \operatorname{sen} bx)$

$$- \frac{an}{a^2+b^2}\int x^{n-1}e^{ax}\cos bx\, dx - \frac{bn}{a^2+b^2}\int x^{n-1}e^{ax}\operatorname{sen} bx\, dx.$$

111. $\displaystyle\int e^{ax}\,\mathrm{Sh}\, bx\, dx = \frac{e^{ax}}{b^2-a^2}(b\,\mathrm{Ch}\, bx - a\,\mathrm{Sh}\, bx).$

112. $\displaystyle\int e^{ax}\,\mathrm{Ch}\, bx\, dx = \frac{e^{ax}}{b^2-a^2}(b\,\mathrm{Sh}\, bx - a\,\mathrm{Ch}\, bx).$

114, 115, 116. Integrar por partes.

117. $2^{n-1}(n!)^2/(2n+1)!$.

118. Convergente.

119. Convergente.

120. Convergente se $n > -1$; divergente se $n \leqq -1$.

121. Convergente se $n > -1$, $m > -1$; de outra maneira é divergente.

122. Convergente se $n > 0$, $m > -1$; de outra maneira é divergente.

123. Convergente.

124. Divergente.

125. Convergente.

126. Convergente.

127. Convergente se $n > 0$; divergente quando $n \leqq 0$.

128. Convergente quando $m > n-1$; divergente se $m \leqq n-1$.

129. Convergente. Considere-se

$$\int_{\nu\pi}^{(\nu+1)\pi}\frac{dx}{1+x^4\operatorname{sen}^2 x} = \left[\int_{\nu\pi}^{(\nu+\epsilon)\pi} + \int_{(\nu+\epsilon)\pi}^{(\nu+1-\epsilon)\pi} + \int_{(\nu+1-\epsilon)\pi}^{(\nu+1)\pi}\right]\frac{dx}{1+x^4\operatorname{sen}^2 x}$$

O integrando é < 1 na primeira e na última das integrais, sendo $< \dfrac{1}{\pi^4\nu^4\operatorname{sen}^2 \epsilon\pi}$, na segunda, de sorte que

$$\int_{\nu\pi}^{(\nu+1)\pi}\frac{dx}{1+x^4\operatorname{sen}^2 x} < 2\epsilon\pi + \frac{\pi}{\pi^4\nu^4\operatorname{sen}^2 \epsilon\pi}.$$

Escolhamos $\epsilon = \dfrac{1}{\nu^{4/3}}$; então, $\operatorname{sen} \epsilon\pi > \frac{1}{2}\epsilon\pi$, e

$$\int_{\nu\pi}^{(\nu+1)\pi}\frac{dx}{1+x^4\operatorname{sen}^2 x} < \frac{k}{\nu^{4/3}} < k\int_{\nu-1}^{\nu}\frac{dx}{x^{4/3}},$$

onde k é constante. Finalmente,

$$\int_A^B \frac{dx}{1+x^4\operatorname{sen}^2 x} < \int_{n\pi}^{m\pi}\frac{dx}{1+x^4\operatorname{sen}^2 x} < k\int_{(n-1)\pi}^{(m-1)\pi}\frac{dx}{x^{4/3}}$$

$$= \frac{3k}{\pi^{1/3}}\left[\frac{1}{\sqrt[3]{n-1}} - \frac{1}{\sqrt[3]{m-1}}\right] < \frac{3k}{\pi^{1/3}\sqrt[3]{n-1}} \to 0 \text{ quando } n \to \infty.$$

Ou, $\displaystyle\int_{\nu\pi}^{(\nu+1)\pi}\frac{dx}{1+x^4\operatorname{sen}^2 x} < \int_{\nu\pi}^{(\nu+1)\pi}\frac{dx}{1+(\nu\pi)^4\operatorname{sen}^2 x} < \frac{\pi}{\sqrt{1+(\nu\pi)^4}} < \frac{k}{\nu^2}.$

130. $\int_0^A \frac{x\,dx}{1 + x^2 \operatorname{sen}^2 x} > \int_0^A \frac{x\,dx}{1+x^2} > \frac{1}{2} \log(1 + A^2)$; divergente.

131. Convergente quando $\beta < -2, \beta + 1 < \alpha < -1$ ou $\beta > 0, -1 < \alpha < \beta/2 - 1$; de outra maneira é divergente.

Suponhamos que $\beta \leqq 0$. Neste caso, $\int^{\infty} \frac{x^\alpha\,dx}{1 + x^\beta \operatorname{sen}^2 x}$ convergiria sòmente quando $\alpha < -1$; $\int_0 \frac{x^\alpha\,dx}{1 + x^\beta \operatorname{sen}^2 x}$ comporta-se como $\int_0 \frac{x^\alpha\,dx}{1 + x^{\beta-2}}$, isto é, quando $\beta + 2 \geqq 0$, teremos $\alpha > -1$, ao contrário da dedução anterior; se $\beta + 2 < 0$, $\alpha - \beta - 2 > -1$.

Suponhamos, ainda, que $\beta > 0$. Então, $\int_0 \frac{x^\alpha\,dx}{1 + x^\beta \operatorname{sen}^2 x}$ convergirá sòmente quando $\alpha > -1$. Além disso,

$$\frac{\nu^\alpha \pi^{\alpha+1}}{\sqrt{1 + (\nu+1)^\beta \pi^\beta}} = \int_{\nu\pi}^{(\nu+1)\pi} \frac{(\nu\pi)^\alpha\,dx}{1 + (\nu+1)^\beta \pi^\beta \operatorname{sen}^2 x}$$

$$< \int_{\nu\pi}^{(\nu+1)\pi} \frac{x^\alpha\,dx}{1 + x^\beta \operatorname{sen}^2 x} < \int_{\nu\pi}^{(\nu+1)\pi} \frac{(\nu+1)^\alpha \pi^\alpha\,dx}{1 + (\nu\pi)^\beta \operatorname{sen}^2 x} < \frac{(\nu+1)^\alpha \pi^{\alpha+1}}{\sqrt{1 + (\nu\pi)^\beta}}$$

ou

$$k_1 \nu^{\alpha - \beta/2} < \int_{\nu\pi}^{(\nu+1)\pi} \frac{x^\alpha\,dx}{1 + x^\beta \operatorname{sen}^2 x} < k_2 \nu^{\alpha - \beta/2}.$$

Logo $\int_\pi^\infty \frac{x^\alpha\,dx}{1 + x^\beta \operatorname{sen}^2 x}$ será convergente quando, e sòmente quando $\alpha - \beta/2 < -1$.

A integral pode ser calculada, igualmente, pelo método exposto no exemplo n.º 129.

132. $$\int_a^\infty \frac{f(\alpha x) - f(\beta x)}{x}\,dx = \int_{a\alpha}^\infty \frac{f(x)}{x}\,dx - \int_{a\beta}^\infty \frac{f(x)}{x}\,dx$$

$$= \int_{a\alpha}^{a\beta} \frac{f(x)}{x}\,dx = L \log \frac{\beta}{\alpha} + \int_{a\alpha}^{a\beta} \frac{f(x) - L}{x}\,dx.$$

Mostrar que esta última integral tende para zero quando $a \to 0$.

134. Consideremos $\int_0^b \frac{f(\alpha x) - f(\beta x)}{x}\,dx$, e procedamos como no exemplo n.º 132.

135. Na fórmula $\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-t} t^{n-1} dt$ deve-se substituir $t = x^2$ e $t = \log \frac{1}{x}$ respectivamente.

CAPÍTULO V

136. (a) $x^6 + y^5 = 5ax^2y^2$; (b) $x = a \arccos \frac{a-y}{b} + \sqrt{b^2 - (a-y)^2}$.

138. (a) $x^2 + y^2 = \sqrt{a^2x^2 + b^2y^2}$. (c) $x(x^2 + y^2) + py^2 = 0$.
(b) $x^2 + y^2 = \sqrt{a^2x^2 - b^2y^2}$. (d) $x = 0$.

141. $x = t - \frac{l\sqrt{p}}{\sqrt{t+p}}$, $y^2 = 4pt\left(1 + \frac{l}{2\sqrt{p}\sqrt{t+p}}\right)^2$.

142. $5a^2/2$. **143.** $\pi b(2a + b)(a - b)^2/(2a^2)$.

144. $\dfrac{4b(a+b)}{a}\left(1-\cos\dfrac{a}{2b}\,l\right)$.

146. Escolher os eixos de sorte que a curva toque o eixo dos x na origem, e que a ordenada dos y seja função do ângulo que a tangente no ponto (x, y) faz com o eixo dos x.

147. (a) $l^3/12$; (b) $l^3/3$; (c), (d) $l(l^2/12+d^2)$.

148. $r = ce^{\operatorname{cotg} a.\theta}$.

149. $(x-c)^2+y^2=k^2$.

151. $(x-c_1)^2+y^2=c_2^2$.

152. $y = a\ \mathrm{Ch}\,\dfrac{x-b}{a}$.

153. O comprimento da linha reta que une os pontos (r_ν, φ_ν), $(r_{\nu+1}, \varphi_{\nu+1})$ da curva é

$$\sqrt{(r_{\nu+1}-r_\nu)^2+2r_\nu r_{\nu+1}[(1-\cos(\varphi_{\nu+1}-\varphi_\nu)]},$$

valendo o comprimento da linha poligonal inscrita:

$$\sum_{\nu=0}^{n-1}\sqrt{(\Delta r_\nu)^2+r_\nu r_{\nu+1}(\Delta\varphi_\nu)^2+r_\nu r_{\nu+1}(\Delta\varphi_\nu)^4\,.\,R_\nu},$$

onde todos os $|R_\nu|$ são limitados. Deixando o máximo de $\Delta\varphi_\nu$ tender para zero, obteremos

$$\int\sqrt{\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2+r^2}\ d\varphi.$$

CAPÍTULO VI

157. $x^2-\dfrac{1}{3}x^4+\dfrac{2}{45}x^6+\ldots$; $(\operatorname{sen} x)^2=\left(x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-x^7R\right)^2$

$$= x^2-\frac{1}{3}x^4+\frac{2}{45}x^6+x^8R',$$

onde R e R' permanecem limitados quando $x\to 0$.

158. $x+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{2}{15}x^5+\ldots$; $\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}=\dfrac{x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-x^7R}{1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-x^6S}$

$$= x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+x^7T,$$

em que R, S, T são limitados, à medida que $x\to 0$.

159. $1-\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{x^4}{96}-\ldots$; $\sqrt{\cos x}=\left(1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-x^6R\right)^{1/2}$

$$=1+\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-x^6R\right)-\frac{1}{8}\left(-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-x^6R\right)^2$$

$$+\left(-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-x^6R\right)^3S=1-\frac{x^2}{4}-\frac{x^4}{96}+x^6T,$$

onde R, S, T são limitados, quando $x\to 0$.

160. (*a*) $1 - \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{45} - \frac{2x^6}{945} \dots$ (*b*) $1 - \frac{x^2}{12} + \frac{x^4}{1\,440} - \frac{x^6}{23\,712} \dots$

(*c*) $1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + \frac{61}{720}x^6 + \dots$ (*d*) $1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{8} \dots$

(*e*) $e + ex + ex^2 + \frac{5}{6}ex^3 + \dots$ (*f*) $-\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} - \frac{x^6}{2\,835} \dots$

161. $x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\,.\,3}{2^2\,.\,2!}\frac{x^5}{5} + \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2^3\,.\,3!}\frac{x^7}{7} + \dots$

162. $\sum_{\tau=0}^{\infty}\left[\sum_{\nu=0}^{\tau}\binom{2n}{n}\binom{2\tau-2n}{\tau-n}\frac{1}{(2n+1)(2\tau-2n+1)}\right]\frac{x^{2\tau+2}}{2^{2\tau}}$.

163. (*a*) $\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu\frac{1\,.\,3\,.\,5\,.\,\dots\,.\,(2\nu-1)}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,\dots\,.\,2\nu}\frac{x^{2\nu+1}}{2\nu+1}$;

(*b*) $\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^\nu}{\nu!}\frac{x^{2\nu+1}}{2\nu+1}$; (*c*) $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)!}\frac{x^{2\nu+1}}{2\nu+1}$.

164. (*a*) $\frac{(2n)!x^{2n+1}}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)}$; (*b*) $\frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)}$; (*c*) $\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)}$

166. $e - \frac{e}{2}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{11e}{24}\left(\frac{1}{x}\right)^2 - \dots$

167. (*a*) $-\frac{e}{2}$; (*b*) $\frac{11e}{24}$; (*c*) 0; (*d*) $e^{-1/6}$; (*e*) 1.

169. (*a*) Mínimo em $x = 0$; (*b*) máximos e mínimos nos pontos em que $\operatorname{tg}\frac{1}{x} = \frac{1}{x}$, os quais ocorrem uma vez em cada intervalo: $\frac{1}{(n+\frac{1}{2})\pi} < x < \frac{1}{(n-\frac{1}{2})\pi}$, $n = \pm 1, \pm 2, \dots$; máximos e mínimos alternadamente.

CAPÍTULO VII

170. 5,881*a*. **171.** 11.

172. 0,822 47. **173.** 0,175; 0,302; 3,490.

174. Visto $\log(\alpha + x)$ ter a convexidade voltada para baixo, e $\alpha > 0$,

$$\log(\alpha+1) + \dots + \log(\alpha+n) > \int_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\log(\alpha+x)\,dx$$

$$= (n+\tfrac{1}{2}+\alpha)\log(n+\tfrac{1}{2}+\alpha) - (\alpha+\tfrac{1}{2})\log(\alpha+\tfrac{1}{2}) - n,$$

ou
$$\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n) > \alpha\frac{(n+\frac{1}{2}+\alpha)^{n+\frac{1}{2}+\alpha}}{(\alpha+\frac{1}{2})^{\alpha+\frac{1}{2}}}e^{-n} > k(\alpha)n!n^\alpha,$$

onde $k(\alpha)$ é uma quantidade positiva que depende de α. Além disso,

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\alpha} = 1 - \frac{\alpha(\alpha+1)}{2}\frac{1}{n^2} + \frac{R}{n^3},$$

em que R permanece limitado, quando $n \to \infty$. Portanto, para valores suficientemente grandes de n, $a_n < a_{n-1}$, sendo a sequência monòtonamente decrescente.

175. $c + (n + \frac{1}{2}) \log n - \sum_{\nu=1}^{l} (n_\nu + \frac{1}{2}) \log n_\nu$.

CAPÍTULO VIII

178. Quando $\lim a_n \leqq 1$, os têrmos não tendem para zero. Quando $\lim a_n > k > 1$, compare-se a série com $\Sigma \frac{1}{k^n}$.

179. $\sum_{\nu=n}^{m} a_\nu < \epsilon$, qualquer que seja ϵ, para todos os n, m, suficientemente grandes. Mas, $\sum_{\nu=n}^{m} a_\nu > (m-n)a_m$, ou $ma_m < \epsilon + na_m$. Conservando n fixo, escolher m tão grande que $na_m < \epsilon$; para qualquer m assim determinado, $ma_m < 2\epsilon$.

180. Aplicar o exemplo n.º 179.

181. Designemos por s_n as somas parciais de $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$, por s a soma, e seja $\sigma_n = s_n - s$. Teremos

$$\sum_{\nu=n}^{m} a_\nu b_\nu = \sum_{\nu=n}^{m} (\sigma_\nu - \sigma_{\nu-1}) b_\nu = \sum_{\nu=n}^{m} \sigma_\nu (b_\nu - b_{\nu+1}) - \sigma_{n-1} b_n + \sigma_m b_{m+1}.$$

Para qualquer valor de ν suficientemente grande, teremos $|\sigma_\nu| < \epsilon$, e

$$\left|\sum_{\nu=n}^{m} a_\nu b_\nu\right| < \epsilon \sum_{\nu=n}^{m} |b_\nu - b_{\nu+1}| + \epsilon |b_n| + \epsilon |b_{m+1}|$$
$$< \epsilon |b_n - b_{m+1}| + \epsilon |b_n| + \epsilon |b_{m+1}|.$$

Que, por sua vez, é menor do que $4B\epsilon$, sendo B um limite de $|b_\nu|$, e a série $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu b_\nu$ convergirá.

182. Proceder como no exemplo anterior (n.º 181):

$$\sum_{\nu=n}^{m} a_\nu b_\nu = \sum_{\nu=n}^{m} (s_\nu - s_{\nu-1}) b_\nu = \sum_{\nu=n}^{m} s_\nu (b_\nu - b_{\nu+1}) - s_{n-1} b_n + s_m b_{m+1}$$

empregando o caráter monótono de b_n, o fato de que $b_n \to 0$, e de que $|s_\nu| < s$ para qualquer ν.

183. (a), (b), (d), (f) convergentes; (c) convergente quando $\theta \neq 2n\pi$; (e) convergente se $\theta \neq (2n+1)\pi$.

184. (*a*) $\frac{1}{2}\log 2$; (*b*) $\log 2$.

185. (*a*) $\alpha = 1$; (*b*) $\alpha \geqq 1$.

186. (*a*) Diverge; (*b*) converge.

188. Se $|a_n| < \dfrac{1}{n^{1+\epsilon}}$ teremos, para qualquer valor de n suficientemente grande,

$$\log \frac{1}{|a_n|} > (1+\epsilon)\log n \quad \text{ou} \quad \frac{\log 1/|a_n|}{\log n} > 1+\epsilon.$$

Invertendo o raciocínio: $\dfrac{\log 1/|a_n|}{\log n} > 1+\epsilon$ implica em $|a_n| < \dfrac{1}{n^{1+\epsilon}}$. De modo semelhante, no caso de divergência.

189. Aplicar o exemplo anterior (n.° 188).

190. Proceder como no exemplo n.° 188.

191. O critério da raiz de ordem n pode ser escrito como segue: se $\dfrac{\log 1/|a_n|}{n} > \epsilon$, a série é convergente; quando $< -\epsilon$, ela será divergente. Escrevamos, pois,

$$\frac{\log 1/|a_n|}{\log n} = \frac{n}{\log n}\,\frac{\log 1/|a_n|}{n}.$$

192. Se $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| < \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$ para qualquer $n \geqq N$, teremos:

$$|a_{n+1}| < \frac{b_{n+1}}{b_n}|a_n| < \frac{b_{n+1}}{b_n}\frac{b_n}{b_{n-1}}|a_{n-1}| < \dots < \frac{|a_N|}{b_N}b_{n+1};$$

portanto, $\Sigma\,|a_\nu|$ convergirá se Σb_ν também o fizer. Da mesma forma para a divergência.

194. Empregar o exemplo n.° 192, comparando com $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\dfrac{1}{\nu^{\alpha}}$. A série $\Sigma\,|a_\nu|$ será convergente se

$$\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha} > 1 + \frac{\alpha}{n} + \frac{R}{n^2},$$

onde $\alpha > 1$. Teremos,

$$n\left(\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} - 1\right) > \alpha + \frac{R}{n} > 1+\epsilon.$$

Invertendo o raciocínio,

$$n\left(\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} - 1\right) > 1+\epsilon$$

implica na convergência de $\Sigma\,|a_\nu|$. Da mesma forma para a divergência.

195. $\Sigma\,|a_\nu|$ convergirá, se

$$\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} > \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log n}\right)^{\alpha} > 1 + \frac{1}{n} + \frac{\alpha}{n\log n} + \frac{R}{n^2\log n},$$

sendo $\alpha > 1$. Virá, então,

$$n\log n\left(\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} - 1 - \frac{1}{n}\right) > \alpha + \frac{R}{n} > 1+\epsilon.$$

A inversão dêste raciocínio conduz ao critério da convergência; procede-se de maneira semelhante, no caso de divergência.

197. (*a*) Converge quando $\beta - \alpha > 1$, divergindo se $\beta - \alpha \leqq 1$.
(*b*) Converge quando $\gamma > \alpha + \beta$, divergindo se $\gamma \leqq \alpha + \beta$.

198. (*a*) Se $x \geqq 1 + \epsilon$, $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^x} \leqq \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^{1+\epsilon}}$. Da mesma forma para (*b*).

199. As somas parciais de $\Sigma \cos \nu x$ são limitadas uniformemente para qualquer valor de x compreendido no intervalo $\epsilon \leqq x \leqq 2\pi - \epsilon$. (Escrevamos $\cos \nu x = \frac{e^{i\nu x} + e^{-i\nu x}}{2}$ e $\sum_{\nu=0}^{n} \cos \nu x = \frac{1}{2} \sum_{\nu=-n}^{n} e^{i\nu x}$.) Demonstremos, então, um teorema análogo ao do exemplo n.º 182, para a convergência uniforme.

200. Se x estiver compreendido no intervalo $\epsilon \leqq x \leqq N$, $y = \frac{x-1}{x+1}$ estará compreendido em $-1 + \frac{2\epsilon}{1+\epsilon} \leqq y \leqq 1 - \frac{2}{N+1}$.

201. (*a*) $-1 < x < 1$; (*b*) $-4 < x < 4$; (*c*) $x > 1$; (*d*) $x > 0$; (*e*) qualquer x; (*f*) nenhum x; (*g*) $x > 1$; (*h*) $-1 < x < 1$.

202. Se $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu^{x_0}}$ fôr convergente, escreva-se $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu^x} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu^{x_0}} \cdot \frac{1}{\nu^{x-x_0}}$, empregando-se, então, o exemplo n.º 181 ou 182. Se $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu^{x_0}}$ divergir, $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu^x}$ não poderá ser convergente para $x < x_0$, pelo que acabou de ser demonstrado.

203. Escreva-se $\Sigma \frac{a_\nu \log \nu}{\nu^x} = \Sigma \frac{a_\nu}{\nu^{x_0}} \cdot \frac{\log \nu}{\nu^{x-x_0}}$.

204. Lògicamente $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu < \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ para $x < 1$. Por outro lado,

$$\lim_{x\to 1} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu > \lim_{x\to 1} \sum_{\nu=0}^{N} a_\nu x^\nu = \sum_{\nu=0}^{N} a_\nu; \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to 1} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu \geqq \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu.$$

205. Como no exemplo 204, $\lim_{x\to 1} \sum_{x=0}^{\infty} a_\nu x^\nu \geqq \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$, sendo, pois, ∞.

206. Escrevamos $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu X^\nu \left(\frac{x}{X}\right)^\nu$. Provemos, então, o teorema para a convergência uniforme, análogo ao do exemplo n.º 181: se $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ convergir, e se a sequência $b_0(x)$, $b_1(x)$, $\ldots$, $b_n(x)$ $\ldots$, fôr monótona para qualquer valor de x e uniformemente limitada para todos os x de um certo intervalo, teremos $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu b_\nu(x)$, que será uniformemente convergente no intervalo considerado.

207. Isto decorre da convergência uniforme da série $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$ no intervalo $0 \leqq x \leqq X$. Desta maneira, $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$ é contínua neste intervalo.

208. (*a*) $x(1+x)/(1+x^2)$; (*b*) $(1-x^2)/(1-x+x^2)^2$.

209. (*a*) A série é igual a $\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)\Big|_{x=1}$;

(*b*) A série é igual a $\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{2}\Big|_{x=1}$.

CAPÍTULO IX

211. $\pi x \operatorname{cotg} \pi x = 1 - 2x^2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2 - x^2} = 1 - 2x^2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m}}{\nu^{2m}} \right)$

$$= 1 - 2 \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^{2m}} \right) x^{2m}.$$

214. (a) $\int_0^1 \frac{\log x}{1-x}\, dx = - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2}$; (b) $\int \frac{\log x}{1+x}\, dx = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu^2}$.

216. (a) $\sqrt{2}$; (b) $\sqrt{3}$.

217. $\operatorname{Coth} \pi x - \frac{1}{\pi x} = \frac{2x}{\pi} \left(\frac{1}{1^2 + x^2} + \frac{1}{2^2 + x^2} + \frac{1}{3^2 + x^2} + \dots \right)$.

CAPÍTULO XI

218. $x + c = \sqrt{a^2 - y^2} - a \log \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y}$.

219. $\frac{1}{2} ky^2 + x = c$.

221. $I = \frac{E_0}{\sqrt{\rho^2 + \omega^2\mu^2}} \operatorname{sen}(\omega t - \varphi) + \frac{A}{\sqrt{\rho^2 + \omega^2\mu^2}} e^{-\rho t/\mu}$, onde $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega\mu}{\rho}$.

222. $x^2 = a^2 - \frac{kt^2}{a^2}$; o tempo de queda é $a^2/\sqrt{k}$.

223. Diferenciar em relação a x e resolver a equação diferencial resultante de p, em função de x:

$$y = -\frac{1}{4x^2} \quad \text{e} \quad y = \frac{c}{x} + c^2.$$

224. $x = -1 + \sqrt{2y + c} + \log(-1 + \sqrt{2y + c})$.

ÍNDICE ALFABÉTICO-REMISSIVO

A

C

D

E

F

G

H

I

J

L

M

N

O

P

Q

R

S

Êste livro foi composto e impresso nas oficinas gráficas
da Livraria do Globo S. A. em Pôrto Alegre
Filiais: Santa Maria, Pelotas e Rio Grande

EDIÇÃO 1645 A — Para pedidos telegráficos dêste livro, basta indicar o número 1645 A, antepondo a êsse número a quantidade desejada. Por exemplo, para pedir 5 exemplares, é suficiente telegrafar assim: **Dicionário — Pôrto Alegre — 51645 A.** Desejando-se encomendar 10 ou mais exemplares, não é necessário transmitir a letra A.